

〈論 文〉

# 유한요소법에 의한 이종재료 접합면에 수직인 균열의 응력확대계수 결정

임원균\* · 김상철\*\* · 이창수\*\*\*

(1992년 12월 21일 접수)

## Determination of Stress Intensity Factor for a Crack Perpendicular to Bimaterial Interface by Finite Element Method

Won-Kyun Lim, Sang-Chul Kim and Chang-Soo Lee

**Key Words :** Bimaterial Interface Crack(이종재료접합면균열), Stress Singularity(응력특이성), Isoparametric Singular Element(등매개특이요소), Stress Intensity Factor(응력확대계수), Finite Element Method(유한요소법)

### Abstract

Abdi's numerical method(ref. 13) for representing a stress singularity by shifting the mid-side nodes of isoparametric elements is reviewed. A simple technique to obtain the optimal position of the mid-side nodes in quadratic isoparametric finite element is presented. From this technique we can directly obtain the position of the side-nodes adjacent to the crack tip. It is also observed that the present technique provides good accuracy for the expression of the opening displacement and the determination of the mid-side nodes for more wide range of material properties than that obtained by Abdi. And the finite element method is applied to determine stress intensity factors for pressurized crack perpendicular to and terminating at the interface of two bonded dissimilar materials. A proper definition for stress intensity factors of a crack perpendicular to bimaterial interface is provided. It is based upon a near-tip displacement solutions on the crack surface for interface crack between two dissimilar materials. Numerical testing is carried out with the eight-node and six-node elements. The results obtained are compared with the previous solutions.

### 1. 서 론

구조물내의 균열들은 균열선단에서의 응력집중 때문에 구조물이 하중을 견딜 수 있는 능력을 크게 감소시킨다. 선형 파괴역학 문제들의 해석에서 균열선단의 특이성은  $r^{(-1/2)}$ 로 변화하며 유한요소법

을 이용한 이러한 문제들의 수치해석 결과는 문헌<sup>(1,2)</sup>에 잘 나타나 있다. 그러나 Fig. 1과 같이 두개의 서로 다른 탄성재료의 접합면에 수직인 균열선단에서의 응력 특이성의 차수는 등방성재료의 균열선단에서의 것과는 달리 반드시  $- (1/2)$ 는 아니며, 이는 두재료의 재료 특성치에 따라 다르다. 문헌들<sup>(3,4)</sup>은 두재료의 전단탄성계수와 포아손비의 비율에 따라 응력 특이성의 차수가  $r^{(\lambda-1)}$  ( $0 < \lambda < 1$ )로 변화하고 있음을 보여준다.

이러한 응력이  $r^{(\lambda-1)}$ 으로 변화하는 문제들에 대

\* 정회원, 명지대학교 기계공학과

\*\* 정회원, 인하대학교 기계공학과

\*\*\* 정회원, 명지대학교 기계공학과 대학원

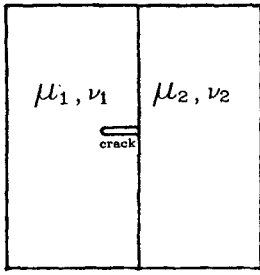


Fig. 1 Crack Terminating at the interface

하여 정확한 수치해를 얻기 위해서는 균열선단에서의 정확한 특이성 모델링이 가능한 특이요소가 필요하게 된다. 이와 같은 목적으로 균열선단요소에 이론적 특이성을 부과하기 위한 연구들이 여러 문헌들<sup>(8-13)</sup>에 보고되고 있다. 그중에 우선 Tracey와 Cook<sup>(8)</sup>에 의하여 제안된 특이요소가 있다. 그들은  $r^{(\lambda-1)}$ 의 특이성을 내포하는 3절점 삼각형 요소를 개발하여, 이를 특이성을 내포하는 균열을 가진 문제에 적용하여 균열개구변위 및 균열선단주위응력을 예측하는데 매우 정확함을 보였다. Akin<sup>(9)</sup>도 삼각형 및 사각형요소를 이용하여 두 재료의 특성치에 따라 변화하는 응력의 특이성을 나타낼 수 있음을 제안하고 있고, Pian등<sup>(12)</sup>도 하이브리드요소를 이용하여 이의 해석을 시도하였다. 이들 특이요소들은 균열선단에서 이론적 특이성을 얻기 위하여 균열선단주위에 많은 수의 요소분할을 요구하고 있지는 않으나, 이들이 표준요소와 결합하였을 때 적합조건과 수렴을 위한 필요조건을 만족하고 있지 않는 단점이 있다.

이러한 어려움을 극복하려는 연구가 Abdi<sup>(13)</sup>에 의하여 이루어 졌으며, 이들은 선형탄성체내 균열선단에서의 응력특이성을 모델링하기 위하여 Barsoum<sup>(14)</sup> 및 Henshell<sup>(15)</sup>이 제안한 1/4절점 특이 등매개요소 즉, 등매개 2차요소에서 균열선단을 포함하는 변의 중앙절점을 1/4만큼 균열선단쪽으로 이동하여 놓음으로서 균열선단에서의 특이성을 간단히 나타낼 수 있는 수법을 이종탄성재료내 접합면에 수직으로 위치하는 균열에 적용하여 이들 재료의 이론적 특이성을 얻기위한 중간절점의 최적위치를 구하고 있다. 그러나 이를 얻기 위하여 최소자승법 또는 Simplex법 그리고 Optimization법등 계산과정이 번잡하며, 또한 이의 적용범위가 두 재료의 특성치에 따라 한정되어 있다.

범용 유한요소법에서 등매개2차요소가 가장 널리

보편적으로 사용되어지고 있고, 이의 적용 또한 쉬운점을 든다면, 이러한 요소를 이종재료내 균열의 문제까지로의 확장적용은 매우 바람직하다고 보고, 본 연구에서는 해석의 단순화를 통한 이의 적용방법과 두재료의 특성치에 따른 이의 적용범위에 확장을 이룰 수 있는 중간절점위치 결정에서의 수정된 최소자승법을 제안한다. 또한 균열의 성장을 지배하는 가장 중요한 매개변수는 응력확대계수이고, 이를 정확히 계산한다는 것은 이종재료내 균열의 파괴거동을 정확히 예측할 수 있는 매우 중요한 과제이므로, 앞에서 언급한 2차 등매개유한요소의 중간절점을 적절히 이동함으로써 얻어진 균열선단 특이요소를 이용하여 이들 재료에 대한 응력확대계수를 간편하게 구할 수 있는 새로운 수법을 제안하고, 이 방법의 유효성을 기존의 결과와 비교 검토하며, 아울러 균열선단에서의 특이요소의 형상에 따른 응력확대계수의 정확도에 대하여 기초적인 검토를 하고자 한다.

## 2. 특이등매개요소의 형성

지금 Fig. 2와 같은 8절점 등매개요소를 생각하여 보자. 이때 국소좌표  $\eta = -1$ 인 변 1-3을 따르는  $x$ 좌표는 다음과 같이 주어진다.

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i x_i = N x_i \tag{1}$$

여기서  $N_i$ 는 각 절점에 대한 형상함수로서 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} N_1 &= -0.5\xi(1-\xi) \\ N_2 &= 1-\xi^2 \\ N_3 &= 0.5\xi(1+\xi) \end{aligned} \tag{2}$$

절점1을 원점으로 하고 변 1-3의 길이를  $L$ 이라 표시하면,  $x_1=0, x_2=aL, x_3=L$ 이 된다. 따라서

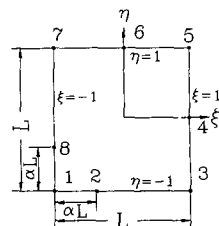


Fig. 2 8-noded quadrilateral element(Q8)

변 1-3을 따르는  $x$ 좌표는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = (1 - \xi^2)\alpha L + (0.5)\xi(1 + \xi)L$$

$$x/L = \alpha + (0.5)\xi + (0.5 - \alpha)\xi^2 \quad (3)$$

원점과 제일 가까운 중간절점의 위치  $\alpha$ 를 1/4로 취한 경우에 Barsoum이 제안한 선형탄성체내에서의 응력특이성(특이차수 0.5)을 얻을 수 있으며, 이때의  $x$ 좌표식은 다음과 같이 표시된다.

$$x/L = [(1 + \xi)/2]^2$$

$$\text{또는 } \xi = -1 + 2(x/L)^{1/2} \quad (4)$$

한편 상기식을 특이차수  $\lambda$ 를 이용한 다음과 같은 식, 즉

$$x/L = [(1 + \xi)/2]^{(1/\lambda)}$$

$$\text{또는 } \xi = -1 + 2(x/L)^{\lambda} \quad (5)$$

로 놓을 수 있다고 가정하면, 이때 변 1-3을 따르는  $x$ 방향의 변위  $u$ 는,

$$u = \sum_{i=1}^3 N_i u_i = -(0.5)\xi(1 - \xi)u_1 + (1 - \xi^2)u_2$$

$$+ (0.5)\xi(1 + \xi)u_3 \quad (6)$$

으로 나타낼 수 있으므로 상기식에 식 (5)를 대입 함으로서 다음과 같은 변형된 식을 얻는다.

$$u = [1 - 3(x/L)^{\lambda} + 2(x/L)^{(2\lambda)}]u_1$$

$$+ [4(x/L)^{\lambda} - 4(x/L)^{(2\lambda)}]u_2$$

$$+ [- (x/L)^{\lambda} + 2(x/L)^{(2\lambda)}]u_3 \quad (7)$$

따라  $x$ 방향의 변형률  $\epsilon_x$ 는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x$$

$$= x^{(\lambda-1)}[3\lambda/L^{(\lambda)} - (4\lambda/L^{(2\lambda)})x^{(\lambda)}]u_1$$

$$+ x^{(\lambda-1)}[4\lambda/L^{(\lambda)} - (8\lambda/L^{(2\lambda)})x^{(\lambda)}]u_2$$

$$+ x^{(\lambda-1)}[-\lambda/L^{(\lambda)} + (4\lambda/L^{(2\lambda)})x^{(\lambda)}]u_3 \quad (8)$$

상기 결과식으로부터 요소변 1-3을 따르는 변형

율성분  $\epsilon_x$ 는  $r^{(\lambda-1)}$ 의 특이성 즉 응력특이성을 가지고 있음을 알 수 있다. 이와 같은 변형률 특이성은 Fig. 2에서의 절점 1, 7, 8들을 일치시켜 놓음으로써 형성되어지는 Fig. 3과 같은 삼각형요소로부터도 얻어질 수 있다.

### 3. 균열요소 중간절점위치의 선정법

특이차수  $\lambda$ 의 함수인 식 (5)를 식 (3)과 같은 2차함수로 근사화 할 수 있다면, Barsoum이 제안한 1/4절점 특이요소수법을 차수가 변화하는 이중절합 절합면에 수직인 균열에 대해서도 적용할 수 있으며, 이를 위하여 Abdi등은 일반 최소자승법과 Simplex법을 이용하여 식(9)의 근사함수를 구하였고, 이들 계수와  $\alpha$ 와의 관계로부터 Optimization법을 이용하여 중간절점의 최적위치를 구하는 다소 번잡한 계산과정을 거치고 있다. 여기에서는 위와 같은 계산을 하지 않고서도 단 한번의 계산으로  $\alpha$ 의 값을 결정할 수 있는 수정된 최소자승법을 제안한다.

지금  $Y$ 를  $x/L$ 의 2차 근사함수라고 하면 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Y = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 \quad (9)$$

앞에서도 언급하였듯이 Barsoum이 제안한 수법을 이용하기 위하여 상기식과 식 (3)을 등치하여 놓는다. 이로부터  $A_0 = \alpha$ ,  $A_1 = 0.5$  그리고  $A_2 = 0.5 - \alpha$ 임을 알 수 있다. 따라서 식 (9)는 다음과 같이 변형된 식으로 나타낼 수 있다.

$$Y' = \alpha + 0.5\xi + (0.5 - \alpha)\xi^2 \quad (10)$$

따라서 상기 근사식에서  $x/L$ 의 실제값인  $y$ 와 오차가 최소가 되도록 편차의 제곱의 총합이 최소가 되는  $\alpha$ 의 값을 결정해야 된다.

지금 편차 제곱의 총합  $S$ 를

$$S = \sum (Y'_i - y_i)^2 = \sum [\alpha + 0.5\xi$$

$$+ (0.5 - \alpha)\xi^2 - y_i]^2 \quad (11)$$

으로 하였을 때  $S$ 가 최소로 될 필요 조건은,

$$\partial S / \partial \alpha = 0 \quad (12)$$

이며, 상기미분으로부터 다음 방정식을 얻는다.

$$\alpha \sum_{i=1}^n + 0.5 \sum_{i=1}^n \xi + 0.5 \sum_{i=1}^n \xi^2 - 2\alpha \sum_{i=1}^n \xi^2$$

$$+ \sum_{i=1}^n y_i \xi^2 - 0.5 \sum_{i=1}^n \xi^3 - 0.5 \sum_{i=1}^n \xi^4$$

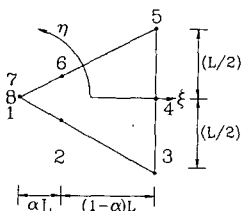


Fig. 3 6-noded triangular element(T6)

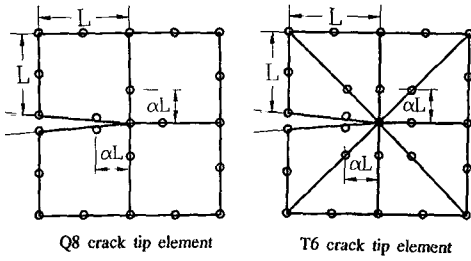


Fig. 4 Displacement of the mid-side nodes

$$+ a \sum_{i=1}^n \xi_i^3 - \sum_{i=1}^n y_i = 0$$

여기서  $n$ 은 주어진 자료의 갯수를 나타낸다. 상기식을  $a$ 에 대하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$a = \frac{-0.5 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i \xi_i^2 + 0.5 \sum_{i=1}^n \xi_i^4 + \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n -2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \sum_{i=1}^n \xi_i^4} \quad (13)$$

따라서 상기식으로부터  $a$ 를 직접 구할 수 있으므로, 요소의 길이가  $L$ 인 균열요소 중간절점의 최적위치  $aL$ 을 손쉽게 결정할 수 있다. 이들 균열선단 주위 요소변위 중간절점 이동 모양을 Fig. 4에 도시하였다.

#### 4. 응력확대계수 결정법

Fig. 2와 같은 사변형요소에서 변 1-3을 따르는 변위  $u$ 는 식 (7)로부터 다음과 같이 표시된다. 동일한 표현식을  $y$ 방향으로의 변위인  $v$ 에 대하여 나타낼 수 있는데 이는 다음과 같다.

$$v = v_1 + (-3v_1 + 4v_2 - v_3) (x/L)^{(1)} + (2v_1 - 4v_2 + 2v_3) (x/L)^{(2)} \quad (14)$$

위의 표현식은 Fig. 3과 같은 삼각형요소로부터 또한 얻을 수 있다. 균열선단을 좌표의 원점으로 취하면 절점1에서의 변위인  $v_1=0$ 이고, 따라서 식 (14)는 다음과 같이 간단히 표시된다.

$$v = (4v_2 - v_3) (r/L)^{(1)} + (-4v_2 + 2v_3) (r/L)^{(2)} \quad (15)$$

한편 주어진 응력성분  $\sigma_y$ 에 따른 균열선단에서의 응력확대계수  $K_I$ 의 이론식은 다음과 같이 정의된다.<sup>(6)</sup>

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r}^{(1-\lambda)} \sigma_{yy}(r, \theta) \quad (16)$$

특히 중요한 것은 균열선단과 인접하는 이종재료에서의  $y$ 방향으로의 응력  $\sigma_{yy}$ 이므로  $\theta=0$ 에서의 응력확대계수는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2r}^{(1-\lambda)} \sigma_{yy}(r, 0) \quad (17)$$

$\theta=\pi$ 인 균열면을 따르는  $y$ 방향의 변위  $v(r, \pi)$ 와 응력  $\sigma_{yy}(r, 0)$ 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\sigma_{yy}(r, 0) = \frac{2\lambda \mu^* v(r, \pi)}{r}$$

$$\mu^* = \mu_1 m \frac{(1-2\lambda)(m+x_2) + 1 + 2\lambda}{(m+x_2)(1+mx_1) \sin(\pi\lambda)} \quad (18)$$

여기서  $\mu^*$ 는 두재료의 특성치와 특이차수와와의 대수함수이며,  $\mu_1, \nu_1$ 과  $\mu_2, \nu_2$ 는 각각 균열을 가진 재료 1과 재료 2에서의 전단탄성계수와 푸아송비이고,  $m = \mu_2/\mu_1$  그리고  $x_1$ 과  $x_2$ 는 평면변형률 상태에서 각각  $3-4\nu_1$ 과  $3-4\nu_2$ 이다.

식 (18)을 식 (17)에 대입함으로써 응력확대계수에 대한 식을 변위의 성분으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K_I = \frac{2\sqrt{2}\lambda \mu^* v(r, \pi)}{r^{(\lambda)}} \quad (19)$$

상기식으로부터  $v(r, \pi)$ 에 대하여 정리하면,

$$v(r, \pi) = \frac{K}{2\sqrt{2}\lambda \mu^*} r^{(\lambda)} \quad (20)$$

이 된다. 따라서 식(15)과 식 (20)에서  $r^{(\lambda)}$ 의 계수를 서로 같게 놓음으로서 균열요소절점에서의 변위들의 값으로서 응력확대계수를 결정할 수 있는 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$K_I = 2\sqrt{2}\lambda \mu^* (4v_2 - v_3) (1/L)^{(1)} \quad (21)$$

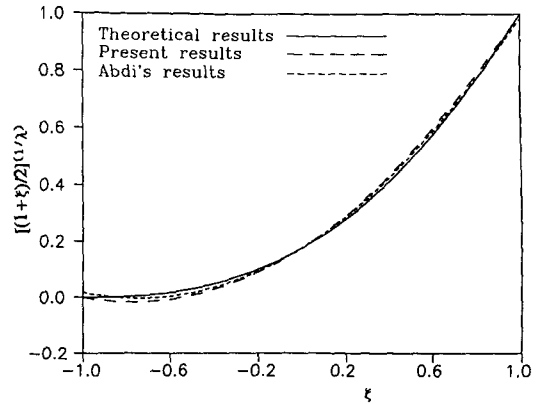
#### 5. 계산결과 및 고찰

##### 5.1 중간절점의 위치

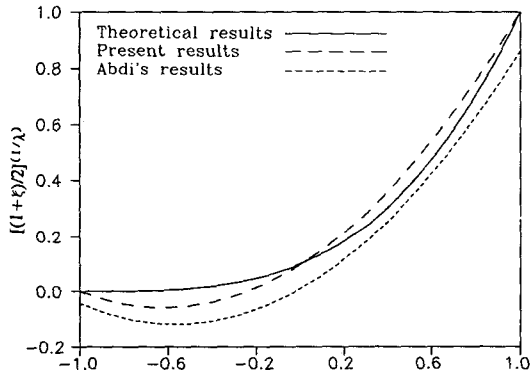
특이차수  $\lambda$ 의 값에 따른 ( $\lambda$ 가 0.5이면 등방성 재료이고, 0과 0.5사이 그리고 0.5와 1.0사이이면 각각 균은재료와 연한재료에 균열이 있는 경우임)  $x$ 좌표 근사식의 계수  $A_0, A_1, A_2$ 의 값을 수정된 최소자승법을 이용하여 결정하였으며, 이들 결과를 Table 1에 표시하였다. 또한 위의 결과로부터 얻은  $x$ 좌표식을 Abdi에 의한 근사값 그리고 식 (5)의 실제함수와 함께 비교하여 특이차수  $\lambda$ 에 따른

**Table 1**  $A_i$  values computed by modified least square method for various  $\lambda$  values

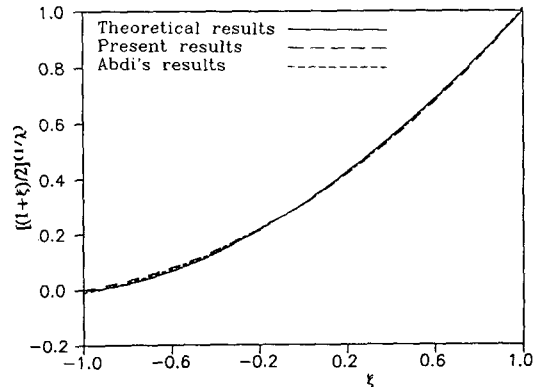
$\lambda$	$A_0$	$A_1$	$A_2$
0.3	0.0970	0.5	0.4030
0.4	0.1780	0.5	0.322
0.5	0.25	0.5	0.25
0.6	0.3133	0.5	0.1867
0.7	0.3690	0.5	0.131
0.8	0.4180	0.5	0.082
0.9	0.4614	0.5	0.0386
1.0	0.5	0.5	0.0



**Fig. 6** Approximate values of a theoretical opening displacement ( $\lambda=0.4$ )



**Fig. 5** Approximate values of a theoretical opening displacement ( $\lambda=0.3$ )



**Fig. 7** Approximate values of a theoretical opening displacement ( $\lambda=0.6$ )

이들 결과값을 Fig. 5에서 Fig. 8에 도시하였다. 우선  $\lambda$ 가 0.3인 작은 값을 가지는 경우 두 근사곡선은 모두 실제함수와 다소 이탈하는 경향을 Fig. 5에서 볼 수 있다. 그러나 그림에서 보듯이 본 해석을 통하여 얻어진 결과는 Abdi에 의한 결과보다 실제함수에 다소 근접하고 있는 것을 알 수 있다.  $\lambda$ 가 더욱 작은 값을 가질 경우에는 근사함수의 이탈현상이 더욱 두드러지게 나타나는데, 이는 실제함수인 식(5)를 2차함수로 근사화시키는 것은 무리이며, 보다 높은 차수의 근사함수가 필요하게 됨을 알 수 있다. 다음에  $\lambda$ 가 0.3보다 점차 큰 값을 가지면 두 근사함수 모두는 실제함수에 거의 근접하게 일치되는데 이의 결과를 Fig. 6과 Fig. 7에서 볼 수 있다. 그러나  $\lambda$ 의 값이 더욱 커져서 0.8정도의

값을 가지는 경우에는 Fig. 8에서 보듯이 Abdi에 의한 결과는 다시 실제함수로부터 이탈하기 시작하는 경향을 보이고 있는데, 본 해석으로부터 얻어진 결과는 실제함수와 거의 일치하고 있다. 오히려  $\lambda$ 가 0.9와 1.0에 이르기까지 본 해법에 의한 결과는 정확한 근사함수를 나타내주고 있는데, 이의 결과를 Fig. 9과 Fig. 10에 도시하였다.

다음에 균열선단요소의 중간절점 최적위치를 나타내주는  $\alpha$ 의 값은 Table 1에서 바로  $A_0$ 의 값이 되며, 위의 결과를 Abdi의 Optimization법에 의한 결과로 함께 Table 2에 표시하였다. 표에서 보듯이 두 결과값 모두 거의 비슷한 값을 보이고 있다. Abdi에 의한 해석방법으로서는  $\lambda=0.8$ 까지의 범위에서만 가능하다고 언급되어 있으므로, 따라서 그

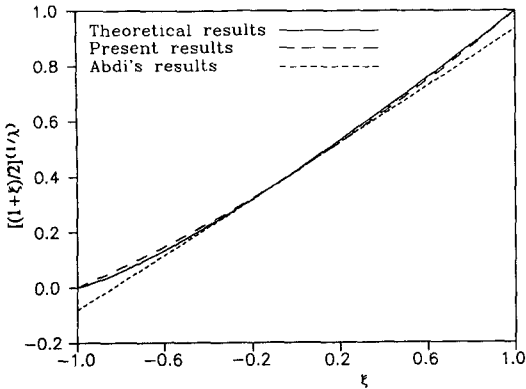


Fig. 8 Approximate values of a theoretical opening displacement ( $\lambda=0.8$ )

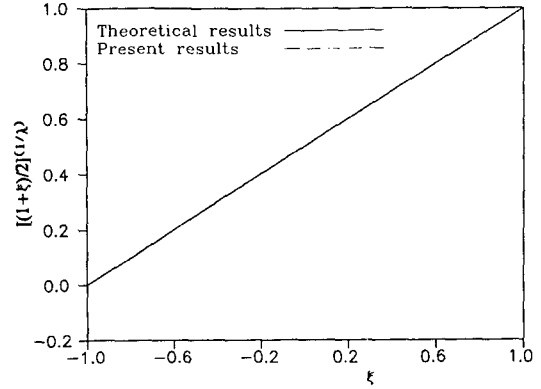


Fig. 10 Approximate values of a theoretical opening displacement ( $\lambda=1.0$ )

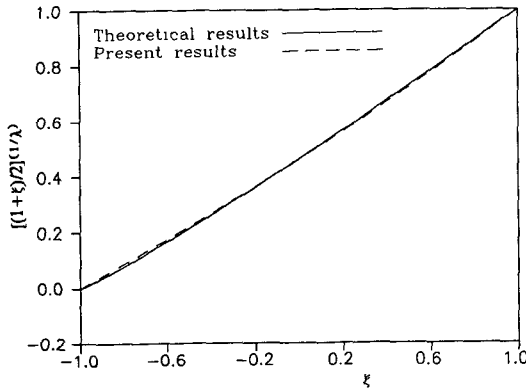


Fig. 9 Approximate values of a theoretical opening displacement ( $\lambda=0.9$ )

Table 2  $\alpha$  values for various  $\lambda$  values

$\lambda$	$\alpha$ (Abdi's results)	$\alpha$ (Present results)
0.3	0.0984	0.0970
0.4	0.1772	0.1780
0.5	0.25	0.025
0.6	0.3145	0.3133
0.7	0.3707	0.3690
0.8	0.4198	0.4180
0.9	****	0.4614
1.0	****	0.5

이상의  $\alpha$ 값은 주어지지 않았다. 그러나 본 해법을 이용하여서는 그림에서 보듯이  $\lambda=1.0$ 에 이르기까지 정확한 근사해를 얻을 수가 있다. 따라서 본 해법은 변화하는 균열의 특이성을 나타내기 위한 요소 중간절점의 위치를 구하는 해석과정에 단순화를 이룰 수 있으며, 아울러 해석범위를  $\lambda=1.0$ 에 이르기까지 확장 적용할 수 있는 유효성을 가지고 있음을 알 수 있다.

### 5.2 응력확대계수

수치해석을 위한 모델로서 Tracey등<sup>(8)</sup>에 의하여 해석된 단순평면변형률 상태하에서의 균열문제를 고려하였다. (Fig. 11) 균일압력  $\sigma_0$ 를 받는 균열은 알루미늄과 에폭시의 접합면에 수직으로 위치하며, 이들 재료들의 재료특성치들은 알루미늄에 대한 전

단탄성계수  $\mu_{A1}$ 와 푸아송비  $\nu_{A1}$ 이 각각  $2.652 \times 10^7$  N/m<sup>2</sup>와 0.3, 그리고 에폭시에 대한 값들은 각각  $\mu_{EP}=1,149 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>와  $\nu_{EP}=0.35$ 이다. 해석모델은 균열선을 따라서 서로 대칭인 고로 1/2평판만을 고려하였으며, 수치해석을 위한 분할요소로는 표준 2차등매개유한요소를 사용하였고, 균열요소로서는 2차요소 중간절점의 위치를 적절히 이동시켜 놓음으로서 특이성을 나타내도록 하였다. 아울러 강성행렬을 구하기 위한 수치적분에서는  $2 \times 2$  Gauss적분점이 유리하므로 이를 채택하였다.<sup>(16)</sup>

8절점사변형요소(Q8)와 퇴화된(degenerated) 6절점삼각형요소(T6) 모두가 균열선단에서의 특이성을 나타낼 수 있으므로 이들 모두를 균열요소로 사용하였으며 수치해석을 위한 대표적인 유한요소 분할모습을 Fig. 12에 도시하였다. 분할요소수는

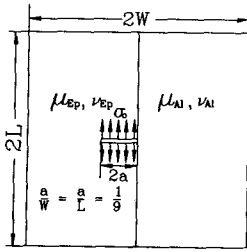


Fig. 11 Finite crack perpendicular to the interface

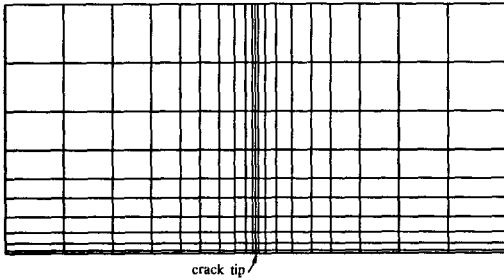


Fig. 12 Finite element discretization

균열요소를 제외하고 전해석모델 공히 198개로 분할 하였다.

균열요소의 형상과 균열요소의 크기가 응력확대계수의 계산에 미치는 영향을 검토하기 위하여 요소의 크기를 균열길이의 0.2배에 이르기까지 변화시켜 주어가며 해석을 수행하였으며, 응력확대계수의 결정을 위하여 본연구에서 제안한 균열선상의 2개의 절점변위 이용법인 식 (21)과 균열선단과 가

장 인접한 단일절점변위 이용법인 식 (19)를 이용하였다. 계산된 응력확대계수의 값  $K_I$ 은  $K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$ 로 나누어줌으로서 무차원화된 값으로 표시하였으며, 비교를 위해 Tracey 등의 변위 값들로부터 구한  $K_I$ 값을 함께 Table 3에 도표화 하였다.

Fig. 13과 Fig. 14은 균열선단 특이요소로서 각각 Q8요소와 T6요소를 사용하였을 때의 균열요소 길이에 따른 응력확대계수의 오차를 도시한 것으로서 그림중의 \*표시는 응력확대계수의 결정 방법으로 2절점 변위를 이용한 결과이고 □표시는 단일절점 변위를 이용한 결과들을 나타낸다. 그림에서 보듯이 두 균열선단특이요소 모두 2절점 이용법이 단일절점 이용법보다도 응력확대계수의 결정에 약간의 큰오차를 유발한다. 그러나 균열선단요소의 크기  $L/a=0.1\sim 0.2$ 정도의 범위 내에 두었을 경우에  $K_I$ 값은 공업적으로 적용가능한 범위내에 있음을 알 수 있다.

Fig. 15와 Fig. 16에서는 응력확대계수의 결정방법으로서 2절점 변위와 단일절점 변위를 사용하였을 때의 균열길이에 따른 응력확대계수의 오차를 도시한 것으로서 그림에서 □표시는 균열선단요소로서 Q8요소를 사용한 경우의 해석결과이고 \*표시는 T6요소를 사용한 결과를 사용한 결과를 나타낸다. 그림에서 보듯이 균열선단특이요소로서는 Q8요소보다도 T6요소를 이용하였을 때에 균열에서의 변위분포를 더욱 효과적으로 나타낼 수 있으며, 2절점 변위 이용법을 적용할 경우에 균열선단특이요소의 크기  $L/a=0.1\sim 0.2$  범위에서 가장 정

Table 3 Stress intensity factor of a crack perpendicular at the bondline of two dissimilar materials

L/a	$K_I/K_0$							
	Q8 Element				T6 Element			
	Value(Eq. 19)	%diff.	Value(Eq. 21)	%diff.	Value(Eq. 19)	%diff.	Value(Eq. 21)	%diff.
0.05	1.0253	2.53	1.2086	20.9	0.9838	-1.62	0.0945	9.4
0.08	1.0144	1.44	1.0994	9.9	0.9947	-0.5	0.0376	3.8
0.10	1.0116	1.16	1.0688	6.9	0.9986	-0.1	0.0235	2.4
0.133	1.0091	0.91	1.0446	4.5	1.0025	0.2	1.0155	1.5
0.16	1.0081	0.81	1.0369	3.7	1.0042	0.4	1.0151	1.5
0.20	1.0074	0.74	1.0334	3.3	1.0063	0.6	1.0197	2.0
0.266	1.0063	0.63	1.0369	3.7	1.0084	0.8	1.0327	3.3
0.40	1.0025	0.25	1.0558	5.6	1.0105	1.1	1.0671	6.7
Tracey and Cooks <sup>(8)</sup>					1.0			

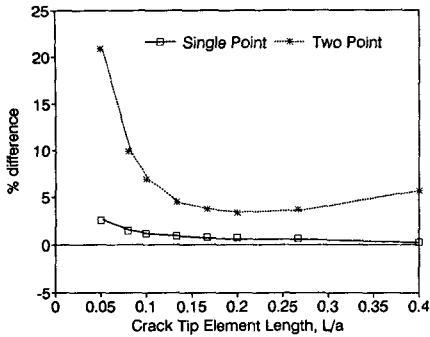


Fig. 13 Percentage difference for  $K_I$  obtained using Q8 element

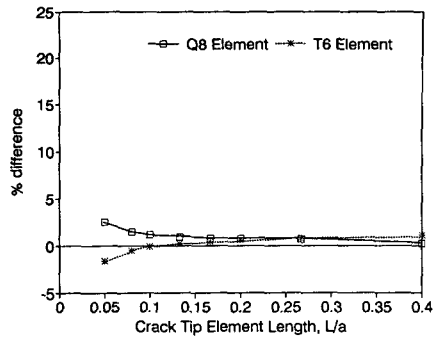


Fig. 16 Percentage difference for  $K_I$  obtained using one point formula

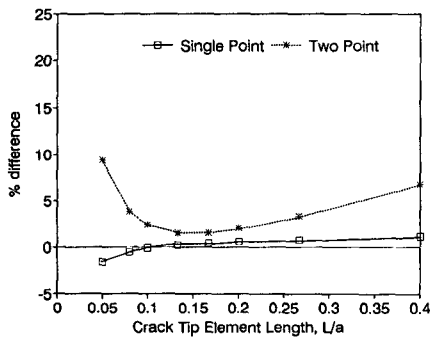


Fig. 14 Percentage difference for  $K_I$  obtained using Q6 element

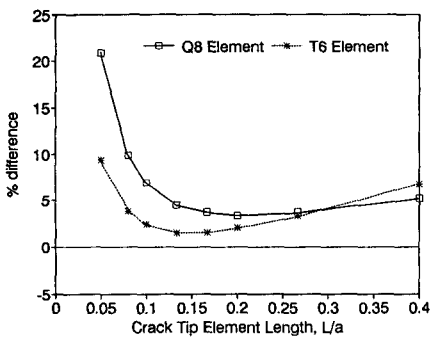


Fig. 15 Percentage difference for  $K_I$  obtained using two points formula

확한 응력확대계수의 값을 얻을 수 있다. 그러나 단일절점 변위 이용법은 균열요소의 크기가  $L/a \leq 0.05$  이하의 값을 갖지 않는다면 균열요소의 형상에 상관하지 않고 거의 2%내의 정확도를 가진 응

력확대계수를 얻을 수 있는 매우 효율적인 방법임을 알 수 있다.

## 6. 결론

균열내압을 받고 있는 이종재료 접합면에 수직인 균열에 대한 응력확대계수의 결정에 2차등매개요소의 유한요소법을 적용하는 연구에서 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 특이차수  $\lambda$ 가 변화하는 서로다른 두재료의 접합면에 수직인 균열의 특이성 포사를 위한 균열을 포함하는 2차등매개 유한요소 중간절점의 위치를, 본 연구에서 제안한 수정된 최소자승법을 이용함으로써 간단하게 결정할 수 있음을 보였으며, 또한 기존의 방법보다 더욱 넓은  $\lambda$ 의 범위 ( $0.4 \leq \lambda \leq 1.0$ )에 이르기까지 확장 적용할 수 있는 유효성을 가지고 있음을 확인하였다.

(2) 2차 등매개유한요소를 이용하여 서로다른 두재료의 접합면에 수직인 균열에서의 응력확대계수를 결정할 수 있는 새로운 수법을 제시하였다. 이는 균열선을 따르는 균열요소에서의 두개의 절점변위를 이용한 것으로서, 균질탄성체내 균열에서의 1/4절점이동 특이유한요소에서 변위를 이용한 응력확대계수의 결정방법과 유사하다.

(3) 균열특이요소에서 위치이동한 중간절점만의 변위를 이용한 응력확대계수 결정법은 균열선단요소의 형상과 크기에 거의 상관하지 않고 정확한 값을 나타내어 주는 매우 효율적인 방법임을 알 수 있었으며, 본 해석에서 제안한 2절점 변위 이용법도 균열요소의 크기  $L/a=0.1 \sim 0.2$  정도의 범위에서는 공학적으로 적용 가능한 범위내에 있는 값을



얻을 수 있었다.

(4) 균열선단요소로서는 6절점 삼각형요소가 8절점 사변형요소보다도 균열의 거동을 더욱 효율적으로 나타낼 수 있었으며, 균열선단요소의 크기  $L/a = 0.1 \sim 0.2$ 범위에서 가장 정확한 응력확대계수를 얻을 수 있었다.

### 참고문헌

- (1) Gallagher, R. H. 1978, "A Review of Finite Element Techniques in Fracture Mechanics," Numerical Methods in Fracture Mechanics, Luxembourg and Oweneds.
- (2) Yamada, Y., Ezawa, Y., Nishigachi I. and Okabe, M. 1979, "Reconsiderations on Singularity or Crack Tip Elements," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 14, pp. 1525~1544.
- (3) Williams, M. L. 1952, "Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extensions," J. Appl. Mech., Vol. 19, Trans. ASME, Vol. 74, SeriesE, pp. 526~528.
- (4) Lu, M. C. and Erdogan, F. 1983, "Stress Intensity Factors in Two Bonded Elastic Layers Containing Cracks Perpendicular to and on the Interface. I-Analysis," Engng. Fract. Mech., Vol. 18, pp. 491~506.
- (5) Cook, T. S. and Erdogan, F. 1972, "Stresses in Bonded Materials with a Cracks Perpendicular to and on the Interface," Int. J. Engng. Science, Vol. 10, pp. 677~698.
- (6) Swenson, D. O. and Raw, C. A. 1970, "The Stress Distribution around a Crack Perpendicular to an Interface Between Materials," Int. J. Fract. Mech., Vol. 6, pp. 357~365.
- (7) Fenner, D. N. 1976, "Stress Singularities in Composite Materials with an Arbitrary Oriented Crack Meeting an Interface," Int. J. Fract. Mech., Vol. 15.
- (8) Tracey, D. M. and Cook, T. S. 1977, "Analysis of Power Type Singularities Using Finite Elements," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, pp. 1225~1233.
- (9) Akin, J. E. 1976, "The Generation of Elements with Singularities," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 1249~1259.
- (10) Hughes, T. J. R. and Akin, J. E. 1980 "Techniques for Developing Special Finite Element Shape Functions with Particular Reference to Singularities," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 15, pp. 733~751.
- (11) Stern, M. 1979, "Families of Consistent Conforming Elements with Singular Derivative Fields," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 14, pp. 409~421.
- (12) Pian, T. H. H. and Tong, P. 1973, "On the Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity," Int. J. Solids Struct., Vol. 9, pp. 313~321.
- (13) Abdi, R. E and Valentin, G. V. 1989, "Isoparametric Elements for A Crack Normal to The Interface between Two Bonded Layers," Comput. Struct., Vol. 33, pp. 241~248.
- (14) Barsoum, 1976, "On the Use of Isoparametric Finite Elements in Linear Fracture Mechanics," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10, pp. 25~37.
- (15) Henshell, R. D. and Shaw, K. G. 1975, "Crack Tip Finite Elements are Unnecessary," Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 19. 495~507.
- (16) Saouma, V. E. and Schwemmer, D. 1984, "Numerical Evaluation of the Quarter-Point Crack Tip Element," Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 20, pp. 1629~1641.