

(論 文)

부분구조의 상태방정식을 이용한 국부 비선형계의 과도응답해석

김형근* · 박윤식**

(1993년 3월 5일 접수)

Transient Response Analysis of Locally Nonlinear Structures Using Substructure-Based-State Equations

Hyeong Keun Kim and Youn-sik Park

Key Words :Substructure Mode(부분구조 모드), Localized Nonlinearity(국부 비선형성), Geometric Compatibility(기하학적 적합조건), State Equation(상태방정식), Lagrange Multiplier(라그랑지 승수)

Abstract

A simple method is presented for determining transient responses of locally nonlinear structures using substructure eigenproperties and Lagrange multiplier technique. Although the method is based upon the mode synthesis formulation procedure, the equations of motion of the combined whole structure are not constructed compared with the conventional methods. Lagrange multipliers are used to enforce the conditions of geometric compatibility between the substructure interfaces and they are treated as external forces on each substructure itself. Substructure eigenvalue problem is defined with the substructure interface free of fixed. The transient analysis is based upon the recurrence discrete-time state equations and offers the simplicity of the Euler integration method without requiring small time increment and iterative solution procedure. Numerical examples reveal that the method is very accurated and efficient in calculating transient responses compared with the direct numerical integration method.

1. 서 론

오늘날 컴퓨터의 급속한 발달과 보급으로 인해 비선형 구조물의 동적해석을 위한 수치해석기법 분야에도 많은 발전이 있었다. 비선형 구조물의 수학적 모델수립 및 동적해석을 위해서는 유한요소법이 광범위하게 사용되며 이를 위한 범용의 유한요소 프로그램들이 개발되었다. 그러나 구조물의 정확한

동적해석을 위해 필요한 자유도의 수가 점점 증가하면서 고성능 컴퓨터로도 컴퓨터의 기억용량이나 계산시간 등이 여전히 해결해야 할 과제로 남아있다.

비선형계의 동적해석을 위해서는 직접적분법,⁽¹⁻⁶⁾ 모드중첩법⁽⁷⁾ 그리고 모드합성법⁽⁸⁻¹²⁾이 주로 사용된다. 직접적분법에서는 유한요소법을 이용하여 전체계에 대한 질량, 감쇠 및 강성행렬을 구성한 후 구조물의 점선강성행렬을 매 시간마다 구하여 증분식의 형태로 표현되는 운동방정식을 Houbolt,⁽¹⁾ Newmark,⁽²⁾ Wilson^(3,4) 또는 Hilber⁽⁵⁾ 등에 의

*정회원, (주)삼성중공업 중장비사업본부

**정회원, 한국과학기술원 기계공학과

해 제안된 수치적분법을 이용하여 시간영역에서 동적응답을 구한다. 이 방법은 임의의 비선형계에도 적용이 가능하나 매 시간마다 구조물의 유효접선강성행렬을 구하여 증분식의 형태로 표현되는 등가선형식을 풀어야 하므로 계산시간이 많이 소요되는 단점이 있다.

모드중첩법은 선형계의 해석을 위해서는 매우 효과적인 것으로 밝혀졌으며 다소 변형된 형태로 비선형계의 해석을 위해 작용되었다. Nickell⁽⁷⁾은 시간에 따른 구조물의 강성변화를 자유진동 모드행렬을 매 시간 새로 계산하면서 고려하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 직접적분법에 비해 물리적으로 의미가 있는 고유진동수와 모드형상의 개념을 이용하므로 이해하기가 쉬운 장점이 있으나 자유도가 많은 유한요소모델의 경우 고유치해석을 반복적으로 수행해야하므로 그 효율성은 문제에 따라 달라질 수 있다.

국부 비선형계의 동적해석을 위해서도 모드합성법이 널리 사용되었으며 이 경우 선형 부분구조를 나타내기 위해서는 콘볼루션 적분(convolution integral formulation)이 주로 사용되었다.^(8,9) 이 방법은 전체계를 선형 및 비선형 부분구조로 구분한 후 모드좌표계로 표현되는 선형 부분구조와 물리좌표계로 표현되는 비선형 부분구조를 기하학적 적합조건을 이용하여 합성한다. 합성시 자유도를 축약시킬 수 있으므로 이 방법은 비선형 요소가 국부적으로 존재하며 선형 및 비선형 부분구조로 구분하여 모델을 수립할 수 있는 대형 구조물의 모델수립 및 동적해석에 효과적이다. 이와는 별도로 부분구조의 고유치특성과 기하학적 적합조건만을 이용하여 전체계를 나타내는 운동방정식을 구성하지 않고 동적응답해석을 수행할 수 있는 기법이 제시되었다.^(10,11) Tongue과 Dowell⁽¹⁰⁾ 그리고 Yee와 Tsuei⁽¹¹⁾는 부분구조의 자유경계모드와 기하학적 적합조건만을 이용하는 비선형 구조물의 과도응답해석법을 제시하였다. 그러나 콘볼루션을 이용한 강제진동해석법⁽⁸⁻¹¹⁾은 수식전개가 매우 복잡한 단점이 있다.

본 연구에서는 비선형 유한요소모델의 과도응답해석을 위해 부분구조의 상태방정식을 이용한 시간영역해석법을 제시한다. 부분구조간의 경계면에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건을 처리하기 위해서는 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)가 사용된다. 본 방법은 기존의 방법과는 달리 전체계에 대한 운동방정식을 구성하지 않으며 부분구조 모드

로는 자유 및 고정경계모드를 모두 사용할 수 있다. 시간영역해석법은 반복적인 계산과정을 필요치 않는 이산형태의 상태방정식을 사용하며 이는 수치적으로 매우 간단한 장점이 있다. 제시한 방법을 비선형 강성을 갖는 유한요소모델의 과도응답해석에 적용하여 그 결과를 Newmark의 수치적분법으로 구한 엄밀해와 비교하며 제시한 방법의 수치해석시 효율성과 해의 정확도를 검증한다.

2. 상태방정식을 이용한 과도응답해석

2.1 부분구조의 운동방정식

해석의 편의를 위해 전체 구조물은 Fig. 1과 같이 두개의 선형 부분구조와 한개의 비선형 부분구조로 구성되는 것으로 가정한다. 비선형 부분구조 r 은 두개의 선형 부분구조 $(r+1)$ 과 $(r+1)$ 을 연결하는 J 개의 비선형 강성으로 구성되며 선형 부분구조와의 연결부에서 경계자유도만 가지며 관성 및 외력항은 갖지 않는 것으로 가정한다. 선형 부분구조는 유한요소법을 이용하여 모형화하며 비례 감쇠를 가정한다. 본 연구에서는 비선형 강성만 고려하나 속도 또는 변위와 속도의 함수로 주어지는 비선형 감쇠요소가 있는 경우에도 같은 방법으로 해석할 수 있다.

선형 부분구조 $s(s=r-1, r+1)$ 의 운동에너지 T_s , 탄성에너지 V_s 그리고 소산함수 D_s 는 일반화된 좌표에 대한 2차형태로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_s = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_s^T [m]_s \{\dot{x}\}_s, \quad V_s = \frac{1}{2} \{x\}_s^T [k]_s \{x\}_s, \\ D_s = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}_s^T [c]_s \{\dot{x}\}_s \quad (1)$$

여기서 $\{x\}_s$ 는 부분구조의 변위벡터이며 $[m]_s, [c]$

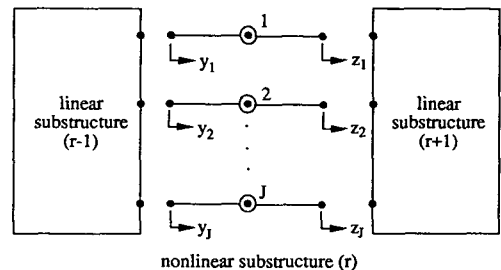


Fig. 1 A structural system with localized nonlinearities

。 그리고 $[k]_s$ 는 각각 부분구조의 질량, 감쇠 및 강성행렬로 경계자유도와 내부자유도에 따라 분리되어 구성된다. 첨자 s 는 두개의 선형 부분구조 또는 전체 부분구조를 나타내기 위해 사용되며 비선형 부분구조만을 나타내기 위해서는 첨자 r 을 사용한다.

비선형 부분구조 r 의 j 번째 강성요소에 대한 탄성에너지 V_{rj} 가 다음과 같이 표현될 수 있는 경우를 생각한다.

$$V_{rj} = \frac{k_{rj}}{n_{rj} + 1} |y_j - z_j|^{n_{rj} + 1} \quad (2)$$

여기서 k_{rj} 는 j 번째 강성의 비선형 강성계수이며 n_{rj} 는 비선형의 차수(order)이다.

부분구조의 좌표계를 경계 및 내부자유도로 구분하여 나타내면 부분구조의 경계면에서 만족해야 하는 기하학적 적합조건은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[\beta] \dot{f}(x)_t = \{0\} \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} \{x\}_t &= \{\{x\}_t^{r-1} \{x\}_t^r \{x\}_t^{r+1}\}^T \\ \{x\}_r &= \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_j \ z_1 \ z_2 \ \dots \ z_j\}^T \end{aligned}$$

이며 $\{x\}_t$ 는 차원이 $N_r^n \times 1$ 인 좌표계벡터 그리고 $[\beta]_s$ 는 차원이 $N_r^n \times N_r^n$ 인 계수행렬이다. 여기서 N_r^n 은 모두 독립적인 부분구조를 나타내기 위해 사용되는 자유도의 수이며 N_r^n 은 구속조건의 수로써 $2J$ 이다. 식(3)의 구속조건으로 인해 $N_r^n - N_r^n$ 개의 좌표만 독립적이다.

식(3)을 각각의 부분구조로 분리하여 나타내면 다음과 같다.

$$\sum_{s=r-1}^{r+1} [\beta]_s \dot{f}(x)_s = \{0\} \quad (4)$$

여기서 $[\beta]_s$ 는 차원이 $N_r^n \times N_r^n$ 인 계수행렬이며 N_r^n 은 부분구조 s 의 자유도수이다.

라그랑지 방정식을 적용하면 선형 부분구조에 대한 운동방정식을 다음과 같이 구할 수 있으며

$$\begin{aligned} [m]_s \ddot{x}_s + [c]_s \dot{x}_s + [k]_s x_s &= [\beta]_s \lambda \\ + \{p\}_s \text{ for } s &= r-1 \text{ and } r+1 \end{aligned} \quad (5)$$

비선형 부분구조 r 의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\{g\}_r = [\beta]_r \lambda \quad (6)$$

여기서 $[\lambda]$ 는 라그랑지 승수벡터로 경계면에 작용하는 힘을 의미하며 $\{p\}_s$ 는 외력이다. $\{g\}_r$ 은 부분

구조 r 의 상대적인 변위에 관련된 비선형 강성력 벡터로 차원은 $N_r^n \times 1$ 이며 j 번째 성분($j=1, 2, \dots, 2J$)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_j = k_{rj}(y_j - z_j) |y_j - z_j|^{n_{rj}-1} \quad (7)$$

식(5)와 (6)의 각 부분구조에 대한 운동방정식과 식(4)의 구속조건은 고려하는 구조물의 강제진동해석을 위한 기본식들로서 서로 연립되어 있다. 식(5)는 2개의 미분방정식, 식(6)은 비선형 대수방정식 그리고 식(4)는 선형 대수방정식이다. 식(5)와 (6)에서 라그랑지 승수벡터 $\{\lambda\}$ 만 구한다면 전체 구조물의 운동방정식을 구성하지 않고도 구조물의 응답을 구할 수 있음을 알 수 있다.

비선형 부분구조에서는 경계자유도만 정의되므로 식(7)과 같이 표현되는 1개의 강성요소 양단에는 2개의 구속조건이 부가된다. 따라서 부분구조 r 에는 $2J$ 개의 라그랑지 승수가 존재하며 $\{\lambda\}$ 는 $2J \times 1$ 벡터가 된다. 그러나 1개의 강성요소 양단에 작용하는 2개의 내력은 그 크기가 서로 같으므로 이를 독립적인 1개의 내력으로 표현할 수가 있다.

즉, $\{\lambda_i\}$ 를 독립적인 라그랑지 승수벡터라고 하면 $\{\lambda\}$ 는 $\{\lambda_i\}$ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{\lambda\} = [\gamma] \{\lambda_i\} \quad (8)$$

여기서 $[\gamma]$ 는 차원이 $N_r^n \times N_r^n / 2$ 인 계수행렬로 본 연구에서는 차원이 $2J \times J$ 인 행렬이 되며 따라서 $\{\lambda_i\}$ 는 차원이 $J \times 1$ 인 벡터가 된다.

식(8)을 식(5)와 (6)에 대입하면 각각의 부분구조에 대한 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} [m]_s \ddot{x}_s + [c]_s \dot{x}_s + [k]_s x_s &= [\beta]_s \lambda_i \\ + \{p\}_s, s &= r-1 \text{ and } r+1 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\{g\}_r = [\beta]_r \lambda_i \quad (10)$$

여기서

$$[\beta]_s = [\beta]_s \{\gamma\} \text{ for } s = r-1, r, r+1$$

식(7)에서 보듯이 비선형 부분구조 r 에서는 경계자유도의 상대적인 변위가 사용되며 간단한 조작에 의해 이를 선형 부분구조의 경계자유도를 이용하여 일반적인 형태로 나타낼 수가 있다. 이는 행렬 $[\beta]_s$ 를 통해 이루어지며, 먼저 $[\beta]_s$ 를 이용하면 기하학적 적합조건은 $[\beta]_s$ 에 의해서도 식(4)와 같은 형태로 표현된다.

$$\sum_{s=r-1}^{r+1} [\beta]_s \dot{f}(x)_s = \{0\} \quad (11)$$

행렬 $[\beta]_s$ 와는 달리 행렬 $[\beta_i]_s$ 에는 각 부분구조의 상대적인 변위에 대한 정보가 포함되어 있으며 이를 이용하면 비선형 부분구조 r 의 상대적인 변위는 선형 부분구조 $(r-1)$ 과 $(r+1)$ 의 경계자유도에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{y\} - \{z\} = [\beta_i]_r^T \{x\}_r = - \left(\sum_{s=r-1, r+1} [\beta_i]_s^T \{x\}_s \right) \quad (12)$$

여기서

$$\{y\} = \{y_1 \ y_2 \ \dots \ y_r\}^T, \quad \{z\} = \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_r\}^T$$

비선형 부분구조에 대한 행렬 $[\beta_i]_r$ 의 차원은 $N_r^i \times N_r^i/2$ 이므로 식(10)은 다음과 같이 분리될 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \{g_i\}_r \\ \{g_D\}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\beta_{ii}]_r \\ [\beta_{iD}]_r \end{Bmatrix} \{\lambda_i\} \quad (13)$$

여기서 $[\beta_{iD}]_r = -[\beta_{ii}]_r$ 그리고 $\{g_D\}_r = -\{g_i\}_r$ 이고 $\{g_i\}_r$ 은 독립적인 강성력벡터이므로 $\{g_D\}_r$ 은 $\{g_i\}_r$ 에 대해 종속적인 관계에 있다.

따라서 비선형 부분구조의 각각의 강성요소에 작용하는 독립적인 내력 $\{\lambda_i\}$ 는 식(13)으로 부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\lambda_i\} = [\beta_{ii}]_r^{-1} \{g_i\}_r \text{ or } \{\lambda_i\} = [\beta_{iD}]_r^{-1} \{g_D\}_r \quad (14)$$

여기서 $\{g_i\}_r$ 또는 $\{g_D\}_r$ 의 각 성분은 식(12)에 의해 선형 부분구조의 경계자유도에 의해 표현된다.

2.2 모드변환식

식(14)에서 각 부분구조의 연결부에 작용하는 구속력을 구하였으며 이는 선형부분구조의 경계자유도로 표현된다. 선형 부분구조에서는 자유도를 줄이기 위해 모드변환식을 사용하며 부분구조의 모드는 자유 또는 고정경계모드가 사용될 수 있다.

(1) 자유경계모드

각각의 선형 부분구조에서 모드행렬 $[\Phi]_s$ 를 이용하면 다음과 같은 모드변환식이 만족된다.

$$\{x\}_s = [\Phi]_s \{q\}_s \quad (15)$$

여기서 $[\Phi]_s$ 는 $[m]_s$ 와 $[k]_s$ 로 부터 경계면을 자유상태로 두고 구한 자유경계모드행렬이며 $\{q\}_s$ 는 모드좌표 벡터이다.

식(15)를 식(9)에 대입하고 $[\Phi]_s^T$ 를 곱하면 모드좌표계에 대해 비연성된 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[M]_s \{\dot{q}\}_s + [C]_s \{q\}_s + [K]_s \{q\}_s = [\Phi]_s^T [\beta_i]_r \{\lambda_i\} + [\Phi]_s^T \{p\}_s, \quad s=r-1 \text{ and } r+1 \quad (16)$$

여기서

$$[M]_s = [\Phi]_s^T [m]_s [\Phi]_s, \quad [C]_s = [\Phi]_s^T [c]_s \\ [\Phi]_s, \quad [K]_s = [\Phi]_s^T [k]_s [\Phi]_s$$

따라서 식(7), (12) 그리고 (15)로 부터 비선형 강성력벡터는 선형 부분구조의 모드좌표계로 표현할 수 있으며 벡터 $\{g_i\}_r$ 의 j 번째 강성력 g_j 는 다음과 같이 표현된다.

$$g_j = k_{rj} \left(- \sum_{s=r-1, r+1} \{\beta_{ij}\}_s^T [\Phi]_s \{q\}_s \right) - \sum_{s=r-1, r+1} \{\beta_{ij}\}_s^T [\Phi]_s \{q\}_s \quad (17)$$

여기서 벡터 $\{\beta_{ij}\}_s$ 는 $\{g_i\}_r$ 의 j 번째 강성력 g_j 에 대한 $[\beta_i]_s$ 의 j 번째 벡터이다.

(2) 고정경계모드

부분구조의 고정경계모드를 이용한 고유치해석에서는 인접한 부분구조와의 경계면을 구속시킨 상태에서 구한 고정경계의 정규모드(fixed-constraint normal mode)와 연결부의 임의의 한 자유도에 단위 변위를 부가하고 나머지 경계자유도는 구속시킨 상태에서 구하는 구속모드(constraint mode)를 이용하여 부분구조의 동적거동을 묘사한다.

임의의 선형 부분구조 s 에 대한 정적평형식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} [k_{bb}] & [k_{ba}] \\ [k_{ab}] & [k_{aa}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \{x_b\} \\ \{x_a\} \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \{p_b\} \\ \{p_a\} \end{Bmatrix}_s \quad (18)$$

여기서 $\{x_b\}$ 는 주좌표(master coordinates)로서 인접한 부분구조와의 경계면에 존재하는 경계자유도를 나타내며 $\{x_a\}$ 는 종속좌표(slave coordinates)로서 내부자유도를 나타낸다.

모든 내부자유도에 작용하는 외력을 0으로 두면 식(18)의 두번째 식으로 부터 내부자유도를 경계자유도로써 다음과 같이 표현할 수가 있다.

$$\{x_a\}_s = [\Phi_c]_s \{x_b\}_s \quad (19)$$

여기서 식(19)의 $[\Phi_c]_s$ 가 원하는 구속모드행렬로 다음과 같이 주어진다.

$$[\Phi_c]_s = -[k_{aa}]_s^{-1} [k_{ab}]_s \quad (20)$$

고정경계의 정규모드는 다음 식으로부터 유도한다.

$$[k_{aa}]_s \{\phi_a\}_s = \omega^2 [m_{aa}]_s \{\phi_a\}_s \quad (21) \quad \text{진다.}$$

식(21)의 모드벡터가 고정경계의 정규모드에 대한 모드해렬 $[\Phi_n]_s$ 의 행(column)을 구성한다.

정규모드의 모드축약을 고려하고 모드좌표계를 $\{\eta_n\}_s$ 라 하면 내부자유도는 구속모드와 정규모드에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\{x_a\}_s = [\Phi_c]_s \{x_b\}_s + [\Phi_n]_s \{\eta_n\}_s \quad (22)$$

부분구조의 모드좌표 벡터를 다음과 같이 정의하면

$$\{\eta_r\}_s = \begin{Bmatrix} \{\eta_b\} \\ \{\eta_n\} \end{Bmatrix}_s \quad (23)$$

각 부분구조에는 다음과 같은 좌표변환식이 성립한다.

$$\{x\}_s = [\tilde{\Phi}_r]_s \{\eta_r\}_s \quad (24)$$

여기서

$$[\tilde{\Phi}_r]_s = \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [\Phi_c] & [\Phi_n] \end{bmatrix}_s$$

식(24)의 단위행렬은 다음을 의미한다.

$$\{x_b\}_s \equiv \{\eta_b\}_s \quad (25)$$

식(24)를 식(9)에 대입하고 $[\tilde{\Phi}_r]_s^T$ 를 앞에 곱하면 $\{\eta_r\}_s$ 에 대한 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & [\tilde{m}_r]_s \{\eta_r\}_s + [\tilde{c}_r]_s \dot{\{\eta_r\}}_s + [\tilde{k}_r]_s \{\eta_r\}_s \\ &= [\tilde{\Phi}_r]_s^T [\beta_r]_s \{\lambda_r\}_s + [\tilde{\Phi}_r]_s^T [p]_s \end{aligned} \quad (26)$$

여기서

$$\begin{aligned} [\tilde{m}_r]_s &= [\tilde{\Phi}_r]_s^T [m]_s [\tilde{\Phi}_r]_s, [\tilde{c}_r]_s = [\tilde{\Phi}_r]_s^T [c]_s \\ [\tilde{\Phi}_r]_s, [\tilde{k}_r]_s &= [\tilde{\Phi}_r]_s^T [k]_s [\tilde{\Phi}_r]_s \end{aligned}$$

식(26)의 $[\tilde{m}_r]_s, [\tilde{c}_r]_s$ 그리고 $[\tilde{k}_r]_s$ 는 대각행렬(diagonal matrix)이 아닌 일반적인 대칭행렬이므로 비연성된 운동방정식을 얻기 위해서는 고유치해석을 한번 더 수행해야 하며 $[\tilde{m}_r]_s$ 와 $[\tilde{k}_r]_s$ 로부터 구한 모드행렬을 $[\Phi_r]_s$ 라 가정하면 $\{\eta_r\}_s$ 는 새로운 모드좌표벡터 $\{q\}_s$ 에 의해 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\{\eta_r\}_s = [\Phi_r]_s \{q\}_s \quad (27)$$

여기서 $[\Phi_r]_s$ 는 $[\tilde{m}_r]_s$ 와 $[\tilde{k}_r]_s$ 로부터 구한 모드행렬이다.

식(24)와 (27)을 이용하면 식(26)은 식(16)과 같이 $\{q\}_s$ 에 대해 비연성된 운동방정식으로 표현되나 이때 최종적인 모드행렬 $[\Phi]_s$ 는 다음과 같이 주어

$$[\Phi]_s = [\tilde{\Phi}_r]_s [\tilde{\Phi}_r]_s \quad (28)$$

2.3 과도응답해석

시간영역에서의 강제진동해석을 위해서는 상태천이행렬(state transition matrix)의 개념을 이용한 상태방정식이 사용된다. 먼저 다음과 같이 각 부분구조의 모드변위 및 속도벡터를 상태벡터(state vector)로 정의하면

$$\{y_1\}_s \equiv \{q\}_s, \{y_2\}_s \equiv \{\dot{q}\}_s \quad (29)$$

모드좌표계로 표현된 식(16)은 다음과 같이 1차의 연속상태방정식(state space continuous-time state equation)으로 변환된다.

$$\dot{\{y\}}_s = [A]_s \{y\}_s + [B]_s \{u\}_s \quad (30)$$

여기서 $\{y\}_s$ 는 상태벡터, $\{u\}_s$ 는 외력과 내력으로 구성되는 하중벡터이며 $[A]_s$ 와 $[B]_s$ 는 구조체의 동특성을 나타내는 계수행렬로써 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \{y\}_s &= \begin{Bmatrix} \{y_1\}_s \\ \{y_2\}_s \end{Bmatrix}_s = \begin{Bmatrix} \{q\}_s \\ \{\dot{q}\}_s \end{Bmatrix}_s, \{u\}_s = \begin{Bmatrix} \{\lambda_r\} \\ \{p\} \end{Bmatrix}_s \\ [A]_s &= \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]_s^{-1}[K]_s & -[M]_s^{-1}[C]_s \end{bmatrix}_s \\ [B]_s &= \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [M]_s^{-1}[\Phi]_s^T [\beta_r]_s & [M]_s^{-1}[\Phi]_s^T \end{bmatrix}_s \end{aligned}$$

$\{u(t)\}_s$ 의 모든 성분은 시간 $t_k (=k\Delta t)$ 와 t_{k+1} 사이에서 일정하다고 가정하면 수치적분을 위한 시간증분 Δt_k 가 주어진 경우 식(30)은 다음과 같이 이산형태의 상태방정식(discrete-time state equation)으로 치환된다.⁽¹²⁾

$$\{y(t_{k+1})\}_s = [G]_s \{y(t_k)\}_s + [H]_s \{u(t_k)\}_s \quad (31)$$

여기서 $\{y(t_k)\}_s = \{y(k\Delta t)\}_s$ 이며 계수행렬 $[G]_s$ 와 $[H]_s$ 는 시간증분 Δt_k 가 Δt 로 일정하다고 가정하면 다음과 같이 무한급수전개(infinite series expansion)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} [G]_s &= e^{[A]_s \Delta t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[A]_s^j \Delta t^j}{j!}, [A]_s^0 = [I] \\ [H]_s &= \left(\int_0^{\Delta t} e^{[A]_s t} dt \right) [B]_s \end{aligned} \quad (32)$$

식(31)을 각각의 상태벡터에 대해 분리하여 나타내면 다음과 같으며

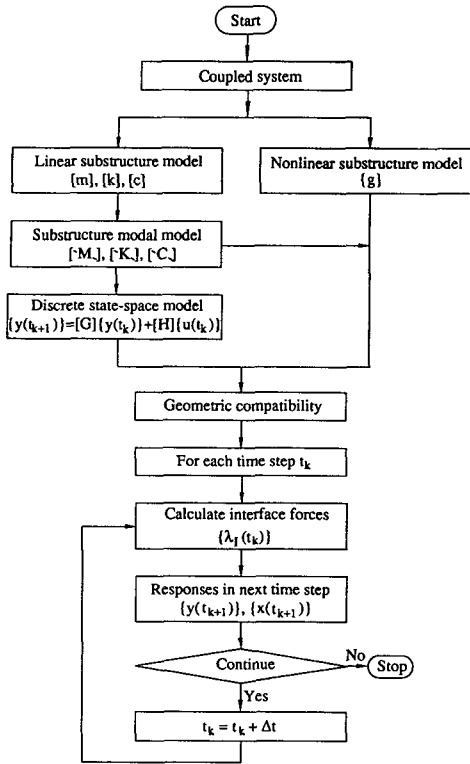


Fig. 2 Flowchart for transient response analysis

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t_{k+1}) \\ \dot{\mathbf{q}}(t_{k+1}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t_k) \\ \dot{\mathbf{q}}(t_k) \end{Bmatrix}_s + \begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix}_s \begin{Bmatrix} \lambda_l(t_k) \\ p(t_k) \end{Bmatrix}_s \quad (33)$$

따라서 임의의 시간 t_k 에서 선형 부분구조의 모드좌표계가 주어지면 경계면에 작용하는 독립적인 내력을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\lambda_l(t_k)\} = [\beta_{11}]^{-1} \{g_l(t_k)\}_r \quad (34)$$

여기서 $\{g_l(t_k)\}_r$ 의 j 번째 성분은 다음과 같이 주어진다.

$$g_j = k_{rj} \left(- \sum_{s=r-1, r+1}^n \{\beta_{1j}\}_s^T [\Phi]_s \{q(t_k)\}_s \right) - \sum_{s=r-1, r+1}^n \{\beta_{1j}\}_s^T [\Phi]_s \{q(t_k)\}_s \Big|^{n_{rj}-1} \quad (35)$$

Fig. 2는 제시한 시간영역해석법의 전체적인 흐름도를 나타낸 것이다.

3. 수치예제

제시한 시간영역해석법의 수치해석시 해의 정확

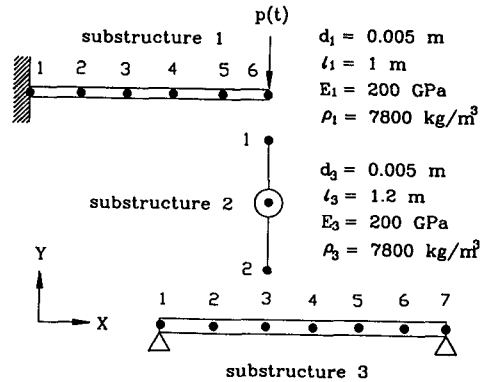


Fig. 3 An example finite element model with localized nonlinearities

Table 1 Natural frequencies of each beam substructure

Mode	Natural frequency (Hz)	
	Substructure 1	Substructure 3
1	3.66	7.10
2	22.76	28.33
3	63.87	63.91
4	125.99	114.39
5	208.42	180.95
6	343.60	280.51
7	495.05	376.53
8	697.69	510.82

도와 계산 효율성 그리고 각 부분구조에서 고려하는 모드의 수를 달리했을 때 응답에 미치는 영향 등을 고찰하기 위하여 Fig. 3에 제시한 비선형 유한요소모델에 대해 수치해석을 실시하였다. Fig. 3에 제시된 비선형모델은 두개의 선형 부분구조(부분구조 1과 3)와 한개의 비선형 부분구조(부분구조 2)로 구성된다. 부분구조 1은 탄성계수 $E_1=200$ GPa, 질량밀도 $\rho_1=7800$ kg/m³, 길이 $l_1=1$ m, 직경 $d_1=0.005$ m인 원형 외팔보이며 부분구조 3은 탄성계수, 질량밀도 그리고 직경은 부분구조 1과 같으며 길이는 $l_3=1.2$ m로 양단이 힌지(hinge)된 원형보이다. 부분구조 1은 5개의 보요소로 10 자유도의 모델로 모형화되며 부분구조 3은 6개의 보요소와 12 자유도로 모형화된다. 선형 부분구조 1과 3에 대해서는 질량 및 강성에 비례하는 점성감쇠를 가정하며 2개의 저차모드에 대해 약 1%의 감쇠를

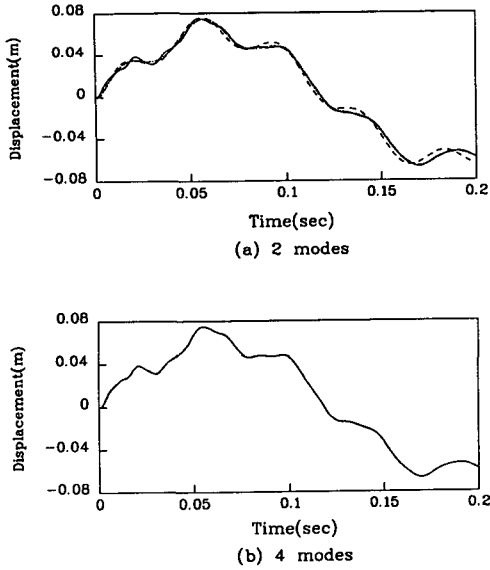


Fig. 4 An example of displacement time histories : —, direct numerical integration, method ; ·····, fixed interface mode technique ; — — —, free interface mode technique

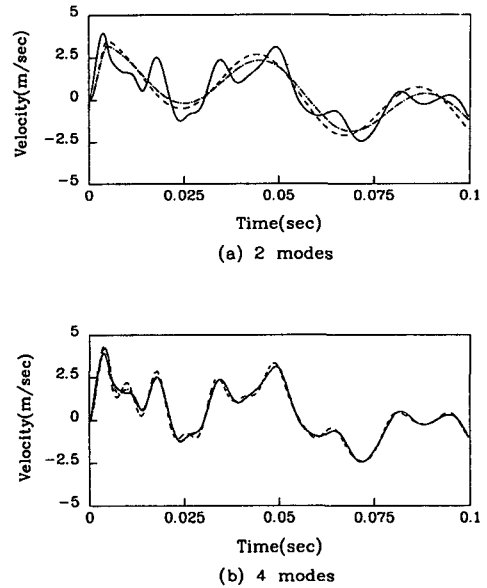


Fig. 5 An example of velocity time histories : —, direct numerical integration method ; ·····, fixed interface mode technique ; — — —, free interface mode technique

가정하였다. 선형 부분구조 1과 3에 대한 고유치 해석 결과는 Table 1에 주어져있다. 부분구조 2는 강성계수가 2000 N/m³인 비선형 3차의 경화스프링으로 길이방향의 자유도만 갖는 것으로 가정하며 부분구조 1의 절점 6과 부분구조 3의 절점 3을 연결한다.

외력은 부분구조 1의 절점 6에 Y-방향으로 다음과 같은 형태로 작용한다고 가정하였다.

$$p(t) = \begin{cases} P_o \sin(2\pi f_o t) & \text{if } 0 \leq t \leq t_o \\ 0 & \text{if } t > t_o \end{cases} \quad (36)$$

여기서 $P_o=20$ N, $f_o=100$ Hz, $t_o=1/(2f_o)$.

시간응답은 Newmark의 직접적분법으로 구한 엄밀해와 부분구조의 축약된 모드를 사용한 근사해를 각각 구하여 근사해의 상대적인 정확성과 소요되는 계산시간을 비교하였다. 시간응답에서 해의 정확성은 최대응답과 시간이력(time history)을 이용하여 판별하며 근사해는 선형 부분구조에서 모드의 수를 2, 4, 6, 8로 변화시키며 구하였다.

Fig. 4에서 Fig. 6은 각각 부분구조의 모드 수를 2, 4, 6으로 변화시키며 구한 근사해와 직접적분법으로 구한 엄밀해의, 부분구조 1의 절점 6에서 Y-방향의 변위, 속도 그리고 가속도의 시간응답을 나타낸 것이다. 각각의 시간응답에서 실선은 직접

Table 2 Comparison of solution accuracies

Response type	Number of substructure modes							
	2 modes		4 modes		6 modes		8 modes	
	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free
Displacement	1.33	0.57	0.17	0.03	0.02	0.01	0.004	0.002
Velocity	11.07	19.04	11.25	7.78	0.77	1.60	0.10	0.57
Acceleration	26.69	33.47	18.66	9.41	10.09	9.77	6.12	5.91

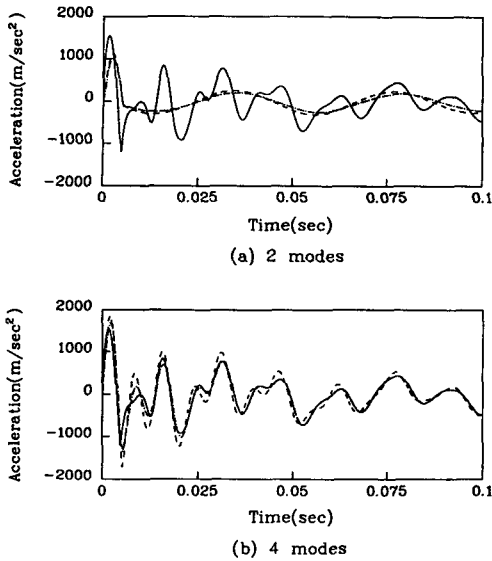


Fig. 6 An example of acceleration time histories: —, direct numerical integration method; ·····, fixed interface mode technique; - - -, free interface mode technique

적분법으로 구한 엄밀해이며 점선과 일점쇄선은 각각 고정 및 자유경계모드를 이용하여 구한 근사해이다. 시간중분 Δt 는 0.0001 sec로 취하였으며 0.2 sec까지의 시간응답을 구하였다.

Table 2는 축약된 모드를 사용하여 구한 근사해의 정확성을 나타낸 것으로 근사해의 엄밀해에 대한 상대적인 정확성은 관심있는 시간영역내에서 최대응답의 차의상대적인 비로 다음과 같이 정의하였다.

$$\text{Error} = \frac{\max |x_9(t_k)_{ex}| - \max |x_9(t_k)_{app}|}{\max |x_9(t_k)_{ex}|} \times 100 \quad (37)$$

여기서 $x_9(t_k)_{ex}$ 는 직접적분으로 구한 엄밀해이며 $x_9(t_k)_{app}$ 는 축약된 부분구조의 모드를 사용하여 구

한 근사해이다.

Fig. 4는 부분구조의 모드 수를 증가시키며 구한 변위응답을 나타낸 것이다. Fig. 4에서 보듯이 선형 부분구조에서 2개 이상의 모드를 고려하면 근사해의 변위응답은 엄밀해와 매우 유사함을 볼 수 있다. 그러나 Fig. 5와 Fig. 6에서 보듯이 부분구조의 모드 수에 따라 근사해의 속도와 가속도응답은 엄밀해와 비교하면 현저히 차이를 볼 수 있다. 즉 선형 부분구조에서 2개의 저차모드만을 사용한 경우에, 변위의 최대응답의 상대적인 오차는 사용하는 모드에 따라 약 1% 정도이나 속도와 가속도의 경우에는 최대응답의 상대적인 오차가 10~30% 정도로 매우 큰 차이가 나며 시간응답도 Fig. 5와 Fig. 6에서 보듯이 엄밀해와 전혀 다른 것을 볼 수 있다.

선형 부분구조에서 4개의 저차모드를 사용한 경우에는 변위의 최대응답의 상대적인 오차도 자유경계모드를 사용한 경우에 0.03%에 불과하며 변위의 시간응답도 엄밀해와 아주 잘 일치한다. 그러나 속도의 최대응답의 오차는 고정경계모드를 사용한 경우에 11.25%이며 가속도의 경우에는 18.66% 정도로 다소 최대값에서 차이가 있으나 전체적인 시간응답의 형태는 엄밀해와 거의 같음을 볼 수 있다. 선형 부분구조에서 6개 또는 8개의 저차모드를 사용한 경우에는 변위, 속도 그리고 가속도의 시간응답은 엄밀해와 거의 같으며 응답의 최대값과 전체적인 시간응답의 형태면에서 고찰하면 만족할 만한 결과라고 할 수 있다.⁽¹³⁾

Table 3은 직접적분법 및 제시한 방법으로 0.2 sec까지의 응답을 구하는데 소요되는 계산시간을 나타낸 것이다. Table 3에서 보듯이 2개의 저차모드를 사용한 경우에는 제시한 방법은 직접적분법에 비해 계산시간이 불과 4%에 불과하며 4개의 모드를 사용한 경우에는 8% 그리고 6개 및 8개의 모드를 사용한 경우에는 12%와 18%에 불과하다.

Table 3 Comparison of computation times.

(unit : sec)

Direct numerical integration method	Number of substructure modes							
	2 modes		4 modes		6 modes		8 modes	
	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free	Fix	Free
124.7	5.3	5.2	9.9	9.8	15.8	15.5	22.9	22.4
(100)	(4.25)	(4.17)	(7.94)	(7.86)	(12.7)	(12.4)	(18.4)	(18.0)

따라서 변위응답에만 관심이 있는 경우에는 최대변위의 상대적인 오차를 0.57% 정도로 유지하며 직접적분법에 비해 불과 4% 정도의 계산시간으로 만족할만한 결과를 얻을 수 있다. 또한 가속도응답에 관심이 있는 경우에도 최대가속도의 상대적인 오차를 6% 이내로 유지하며 직접적분법에 비해 불과 18%의 계산시간으로 원하는 결과를 얻을 수 있음을 볼 수 있다. 이상의 결과에서 보듯이 본 연구에서 제시한 응답해석법은 국부 비선형 구조물의 시간응답을 매우 정확히 그리고 매우 효율적으로 구할 수 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 비교적 간단한 유한요소모델에 대해 제시한 방법의 수치해석시의 효율성 및 해의 정확성을 검토하였으나 자유도가 많은 대형 비선형 구조물의 동적해석에 본 방법을 적용하면 그 유용성은 더욱 증가될 것으로 예상된다.

4. 결 론

부분구조의 모드와 라그랑지 승수기법을 이용하여 전체계를 나타내는 운동방정식을 구성하지 않고도 국부 비선형 구조물의 동적응답해석을 수행할 수 있는 새로운 방법을 제시하였다. 제시한 시간영역해석법은 상태천이행렬과 이산형태의 상태방정식을 이용하므로 반복적인 계산과정을 필요치 않으며 수식전개에 매우 간단한 장점이 있다. 본 방법을 간단한 비선형 유한요소모델에 적용하여 제시한 방법이 수치해의 정확도 뿐만 아니라 수치계산의 효율면에서 매우 우수함을 보였으며 그 효율성은 자유도가 많은 대형 구조물의 동적해석의 경우에 더욱 증대할 것으로 예상된다.

참고문헌

- (1) Houbolt, J.C., 1950, "A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft," *Journal of Aeronautical Science*, Vol. 17, pp. 540~550.
- (2) Newmark, N.M., 1959, "A Method of Computation for Structural Dynamics," *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp. 67~94.
- (3) Wilson, E.L., Farhoomand, I. and Bathe, K.J., 1973, "Nonlinear Dynamic Analysis of Complex Structures," *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, pp. 241~252.
- (4) Bathe, K.J. and Wilson, E.L., 1973, "Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods," *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 1, pp. 283~291.
- (5) Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L., 1977, "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics," *International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 5, pp. 283~292.
- (6) Bathe, K.J., Bolourchi, S., Ramaswamy, S. and Snyder, M.D., 1978, "Some Computational Capabilities for Nonlinear Finite Element Analysis," *Journal of Nuclear Engineering and Design*, Vol. 46, pp. 429~455.
- (7) Nickell, R.E., 1976, "Nonlinear Dynamics by Mode Superposition," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 7, pp. 107~129.
- (8) Chiang, I.F. and Noah, S.T., 1990, "A Convolution Approach for the Transient Analysis of Locally Nonlinear Rotor Systems," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 731~737.
- (9) Clough, R.W. and Wilson, E.L., 1980, "Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities," *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 22, pp. 59~85.
- (10) Tongue, B.H. and Dowell, E.H., 1983, "Component Mode Analysis of Nonlinear, Nonconservative Systems," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 204~209.
- (11) Yee, Eric K.L. and Tsuei, Y.G., 1989, "Transient Responses via Modal Synthesis Technique," 7th International Modal Analysis Conference, Las Vegas, Nevada, pp. 22~28.
- (12) Kim, H.K. and Park, Y.S., 1993, "An Efficient Response Analysis Method for a Nonlinear/Parameter Changing System Using Substructure Modes," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Me-*

chanical Engineering Science, Vol. 27, pp. 41~52.

혼합경계모드를 이용한 구조계의 동적해석, 한국 과학기술원 박사학위논문.

(13) 김형근, 1993, 라그랑지 승수와 부분구조의