

〈論 文〉

탄성 다물체계의 체계적인 동역학적 해석

이병훈* · 유완석**

(1993년 3월 12일 접수)

A Systematic Formulation for Dynamics of Flexible Multibody Systems

Byung Hoon Lee and Wan Suk Yoo

Key Words : Flexible Multibody System(탄성 다물체계), Dynamic Analysis(동역학적 해석), Relative Coordinates(상대좌표), Velocity Transformation Technique(속도변환기법)

Abstract

This paper presents a systematic formulation for the kinematic and dynamic analysis of flexible multibody systems. The system equations of motion are derived in terms of relative and elastic coordinates using velocity transformation technique. The position transformation equations that relate the relative and elastic coordinates to the Cartesian coordinates for the two contiguous flexible bodies are derived. The velocity transformation matrix is derived systematically corresponding to the type of kinematic joints connecting the bodies and system path matrix. This matrix is employed to represent the equations of motion in relative coordinate space. Two examples are taken to test the method developed here.

1. 서 론

다물체계(multibody system) 동역학에 대한 연구는 최근 컴퓨터의 발달과 더불어 강체로 구성된 개방연쇄계(open-loop system)에서부터 부재의 탄성효과를 고려한 폐쇄연쇄계(closed-loop system)에 이르기까지 많이 수행되어 왔다. 오늘날의 기계 시스템은 많은 부재로 복잡하게 구성되고 경량화되는 추세이므로 부재의 탄성을 고려하여 보다 정확하고 효과적으로 해석할 수 있는 방법을 개발할 필요성이 요구되고 있다.

다물체계에 대한 운동방정식을 유도할 때 좌표계의 설정에는 직교좌표계(cartesian coordinate system)^(1~3)와 상대좌표계(relative coordinate system)^(4~6)의

2가지 경우로 구분된다. 상대좌표계를 사용하는 경우 운동방정식의 유도가 직교좌표의 경우보다 복잡하고 구속조건을 포함시키는데 어려움이 있으나 최소의 미분방정식 및 대수방정식을 얻게 되므로 효율적인 수치적분을 할 수 있으며, 우주 구조물이나 다관절 로봇 등의 복잡한 개방 연쇄계에 대한 해석과 제어에 매우 효과적이나 폐쇄연쇄계에서는 일반성이 결여된다.

속도변환기법(velocity transformation technique)은 기계시스템에 있는 여러 종류의 기구학적 조인트에 대한 상대속도로부터 각 물체의 절대속도를 찾아내자는 방법으로서, 직교좌표의 장점인 일반성과 상대좌표의 장점인 효율성을 모두 얻을 수 있다.

Jerkovsky⁽⁶⁾는 시스템을 구성하는 각 물체의 연결관계를 나타내는 경로행렬(path matrix)과 기준행렬(reference matrix)을 이용하여 관성계에서 직

*정회원, 부산대학교 기계공학과, 기계기술연구소

**정회원, 부산대학교 생산기계공학과, 기계기술연구소

교좌표로 기술된 다물체계에 대한 운동방정식을 상대좌표로 변환시키는 속도변환기법을 제안하였다. 이 방법은 운동방정식을 유도하기 쉬운 절대량으로 표현한 후, 상대량으로 변환함으로써 효율적인 컴퓨터 시뮬레이션을 할 수 있다는 점에서 매우 유용하다. Kim과 Vanderploeg⁽⁶⁾도 강체계에 대하여 속도변환기법을 적용하였으며 일반적인 시스템의 운동방정식을 체계적으로 구성하기 위하여 도식이론(graph theory)을 이용하였다. Chang과 Shabana⁽⁷⁾는 탄성계에 대한 제어에서 조인트의 상대좌표에 따르는 조인트 힘을 구하기 위하여 속도변환기법을 이용하였다.

본 연구에서는 일반적인 조인트로 연결된 탄성 다물체계의 3차원 운동에 대한 동역학적 해석을 위하여 Jerkovsky의 속도변환기법을 이용한 체계적인 알고리즘을 개발함을 목표로 한다.

2. 다물체계의 기구학 및 동역학

2.1 절대좌표 및 상대좌표

3차원 공간에서 운동하는 다물체계에서 탄성체 i 의 운동을 직교좌표계를 사용하여 기술한다. Fig. 1에서 XYZ좌표계는 관성좌표계(inertial coordinate system)이며 $x^i y^i z^i$ 좌표계는 물체 i 에 설정된 국부좌표계(local coordinate system)이다. 변형전 물체 i 상의 각 점은 이 좌표계에 대하여 정의될 수 있으며 변형에 따른 병진변위와 회전도 이 좌표계에서 정의된다. 변형량은 전체계의 일반좌표수를 줄이기 위하여 모드좌표로 표현한다.

변형전 $x^i y^i z^i$ 좌표계에 대한 위치가 s_0^{ki} 로 정의되는 물체 i 상의 절점 P^{ki} 가 물체의 변형에 따라 u^{ki} 만큼 이동한다면 이 점의 변형후 관성좌표계에

대한 절대위치 r^{ki} 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} r^{ki} &= r^{hi} + s^{ki} = r^{hi} + s_0^{ki} + u^{ki} \\ &= r^{hi} + A^i (s_0^{ki} + u^{ki}) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 r^i 는 $x^i y^i z^i$ 좌표계 원점 O^i 의 관성좌표계에 대한 위치벡터이다. 그리고 A^i 는 $x^i y^i z^i$ 좌표계로부터 관성좌표계의 좌표변형행렬이며, 오일러 매개변수 $p^i = [p_1^i p_2^i p_3^i]^T$ 로 표현될 수 있다.

절점 P^{ki} 의 변위 u^{ki} 는 변형모드(deformation mode)를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u^{ki} = \phi_i^{ki} a^i \quad (2)$$

여기서 ϕ_i^{ki} 는 물체 i 의 모드 행렬로부터 절점 P^{ki} 의 병진변위 성분을 뽑아낸 행렬이며, a^i 는 물체 i 의 모드좌표 벡터이다.

그러므로 탄성체 i 상의 임의점의 관성좌표계에 대한 위치는 이 물체에 설정한 국부좌표계의 관성좌표계에 대한 위치좌표 r^i , 회전좌표 p^i 및 국부좌표계에 대한 탄성체의 변형 모드좌표 a^i 로서 나타낼 수 있다. 따라서 물체 i 의 직교좌표 벡터를 다음과 같이 나타낸다.

$$x^i = [r^{i^T}, p^{i^T}, a^{i^T}]^T \quad (3)$$

절점 P^{ki} 의 속도는 식(1)을 시간에 대하여 미분하고 $\dot{r}^i = v^i$, $\dot{A} = \omega \times A = \bar{\omega}A$ 의 관계를 적용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{r}^{ki} = v^i + \bar{\omega}^i A^i s^{ki} + A^i \phi_i^{ki} \dot{a}^i \quad (4)$$

여기서 $(\dot{\quad})$ 는 시간에 대한 일차미분을 표시한다. ω^i 는 국부좌표계 $x^i y^i z^i$ 의 각속도이며, $\bar{\omega}^i$ 는 $\bar{\omega}A = \omega \times A$ 가 되도록 ω^i 의 요소로 정의되는 (3×3) 행렬이다.⁽⁸⁾ 오일러 매개변수의 시간미분 \dot{p}^i 와 ω^i 는 다음의 관계를 가진다.⁽⁸⁾

$$\dot{p}^i = \frac{1}{2} E^{i^T} \omega^i \quad (5)$$

여기서 E^i 는 다음과 같이 \dot{p}^i 의 요소로 정의되는 (3×4) 행렬이다.

$$E^i = \begin{bmatrix} -p_1 & p_0 & -p_3 & p_2 \\ -p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ -p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix}^i \quad (6)$$

그러므로 물체의 i 의 직교속도 벡터(cartesian velocity vector) \dot{y}^i 를 다음과 같이 나타냄으로써, 물체 i 에 속한 각 절점에 대한 속도를 표현할 수 있다.

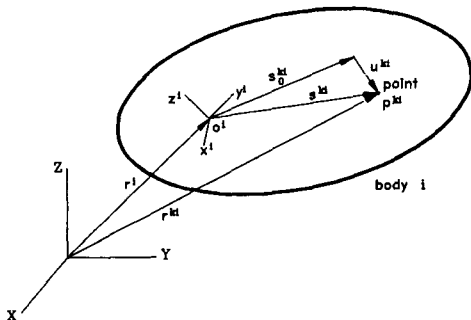


Fig. 1 Inertial and body reference frames

$$\dot{y}^i = [v^{it}, \omega^{it}, \dot{a}^{it}]^T \quad (7)$$

식 (3), (5) 및 (7)로부터 \dot{x}^i 와 \dot{y}^i 는 다음과 같은 관계를 가진다.

$$\dot{x}^i = D^i \dot{y}^i \quad (8)$$

여기서,

$$D^i = \begin{bmatrix} I_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 E^{it} & 0 \\ 0 & 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서 m 은 탄성변형을 표시하기 위한 모드의 수이며 I_m 은 크기가 $(m \times m)$ 인 단위행렬이다.

물체 i 의 상대좌표 q^i 는 그 물체의 기준물체 (reference body)와의 조인트에서의 상대적인 회전 각 및 병진거리로서 정의되며 조인트 유형에 따라 운동형태 및 자유도 수가 결정된다. 그리고 기초물체 (base body)의 상대좌표는 그 물체의 직교좌표로서의 정의한다. 본 연구에서 탄성체 i 의 일반좌표 (generalized coordinates) q^{i*} 를 이와같이 정의되는 상대좌표 q^i 및 모드좌표 a^i 의 집합으로서 다음과 같이 정의한다.

$$q^{i*} = [q^{it}, a^{it}]^T \quad (10)$$

2.2 위치변환

인접하여 있는 두 탄성체의 변형된 상태가 Fig. 2에 나타나 있다. 좌표계 $x^i y^i z^i$ 및 $x^j y^j z^j$ 는 각각 물체 i, j 의 조인트 정의점 p^i, p^j 에 설정된 좌표계로서 조인트 정의점의 회전변형을 나타내기 위하여 사용되며 물체가 변형전의 상태에서는 각각 좌표계 $x^i y^i z^i$ 와 $x^j y^j z^j$ 에 나란하다. 두 물체가 회

전 조인트(revolute joint)로 연결되어 있는 경우, 조인트축 주위의 회전각 $\theta^i=0$ 인 물체 i 의 매개상태 i_0 를 그림에서와 같이 설정한다.

물체의 i 의 자세는 Wehage's algorithm⁽⁹⁾에 따라서 좌표계 $x^j y^j z^j$ 에서 $x^i y^i z^i$, 좌표계 $x^j y^j z^j$ 에서 $x^{i0} y^{i0} z^{i0}$, 좌표계 $x^{i0} y^{i0} z^{i0}$ 에서 $x^i y^i z^i$, 그리고 좌표계 $x^i y^i z^i$ 에서 $x^i y^i z^i$ 로 반복적인 변환을 통하여 얻어질 수 있다.

물체 i 와 j 가 회전 조인트로 연결된 경우, 좌표계 $x^j y^j z^j$ 에 대한 좌표계 $x^i y^i z^i$ 의 자세는 다음과 같이 표현된다.⁽⁶⁾

$$p^i = \hat{E}^{i i_0} \hat{E}^{i_0 j} p^j \quad (11)$$

여기서 $\hat{E}^{i i_0}$ 는 조인트 회전각 θ^i 에 따른 행렬이며 $\hat{E}^{i_0 j}$ 은 상수행렬이고, \hat{E} 은 다음과 같이 정의된다.

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} p^T \\ E \end{bmatrix} \quad (12)$$

물체 j 의 조인트 정의점의 변형에 따른 좌표계 $x^j y^j z^j$ 의 좌표계 $x^i y^i z^i$ 에 대한 자세는 x^j, y^j 및 z^j 축 주위의 회전 변형각 $\epsilon_x^{ij}, \epsilon_y^{ij}$ 및 ϵ_z^{ij} 으로 만들어지는 변환행렬 B^{ij} 에 의하여 표현될 수 있다. 회전 변형각 $\epsilon_x^{ij}, \epsilon_y^{ij}$ 및 ϵ_z^{ij} 을 미소각으로 가정하면 좌표계 $x^j y^j z^j$ 에서 좌표계 $x^i y^i z^i$ 로의 좌표변환행렬 B^{ij} 는 다음과 같이 표현된다.

$$B^{ij} = I_3 + \epsilon^{ij} \quad (13)$$

여기서 미소 회전각벡터 ϵ^{ij} 를 모드행렬과 모드좌표로 나타내면 다음과 같다.

$$\epsilon^{ij} = [\epsilon_x^{ij}, \epsilon_y^{ij}, \epsilon_z^{ij}]^T = (\phi_{ij}^k a^j) \quad (14)$$

ϕ_{ij}^k 는 모드행렬로부터 조인트 정의점 P^{ij} 에서의 회전변형 성분을 뽑아낸 행렬이다.

오일러 매개변수와 좌표변환 행렬요소 사이의 관계⁽⁸⁾를 이용하면, 좌표계 $x^j y^j z^j$ 에 대한 좌표계 $x^i y^i z^i$ 의 자세를 나타내는 오일러 매개변수는 다음과 같다.

$$P^{ij} = [1, 1/2 \epsilon^{ijT}]^T \quad (15)$$

따라서 좌표계 $x^j y^j z^j$ 의 자세는 다음과 같이 P^{ij} 및 좌표계 $x^j y^j z^j$ 의 자세 P^j 로 나타낼 수 있다.

$$p^i = \hat{E}^{ij} p^j \quad (16)$$

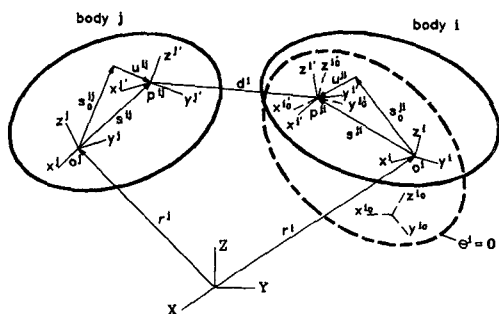


Fig. 2 A pair of flexible bodies in deformed state

마찬가지로 좌표계 $x''y''z''$ 의 자세 p'' 도 다음과 같이 표현된다.

$$p'' = \hat{E}''{}^i{}^T p^i \quad (17)$$

여기서 $\hat{E}''{}^i{}^T$ 는 좌표계 $x^i y^i z^i$ 에 대한 좌표계 $x'' y'' z''$ 의 회전변형각으로 표현되는 행렬이다.

식(11), (16) 및 (17)을 결합하면 다음과 같다.

$$\hat{E}''{}^i{}^T p^i = \hat{E}''{}^i{}^T \hat{E}''{}^j{}^T \hat{E}''{}^j{}^T p^j \quad (18)$$

식(18)의 양변에 $\hat{E}''{}^i{}^T$ 를 곱하고 $\hat{E}\hat{E}^T = I_4$ 임을 적용하면 물체 i 의 자세는 다음과 같이 행렬의 연속적인 곱으로 표현된다.

$$p^i = \hat{E}''{}^i{}^i \hat{E}''{}^i{}^j \hat{E}''{}^j{}^k \hat{E}''{}^k{}^l p^l \quad (19)$$

그러므로 회전 조인트로 연결된 물체 i 의 회전좌표계 p^i 는 그 기준물체 j 의 회전좌표 p^j , 조인트축 주위의 회전각 θ^i 및 조인트 정의점에서의 회전변형량으로 구할 수 있다. 조인트 정의점 p^i 에서 p^j 까지의 거리 d^i 는 두 물체가 병진 조인트로 연결된 경우의 상대적 병진거리를 나타내는 일반좌표이며 회전 조인트의 경우에는 0이 된다. 따라서 국부 좌표계 $x^i y^i z^i$ 의 원점위치 r^i 는 다음과 같다.

$$r^i = r^j + s^{ij} + d^{ii} \quad (20)$$

여기서,

$$s^{ij} = A^j (s_0^{ij} + \phi_i^{ij} a^j) \quad (21)$$

$$d^{ii} = -A^i (s_0^{ii} + \phi_i^{ii} a^i) + A^i \sum_k e_k^i q_k^i B^{ji} e_k^{j''} \quad (22)$$

여기서 $e_k^{j''}$ 는 조인트축 방향의 $x'' y'' z''$ 좌표계에서의 단위벡터, k 는 다자유도 조인트에 대한 지칭, q_k^i 는 물체 i 의 k 번째 조인트축 방향의 좌표이며 ϵ_k^i 는 다음과 같이 정의 한다.

$$\epsilon_k^i = \begin{cases} 0, & q_k^i \text{가 회전 조인트 좌표일 경우} \\ 1, & q_k^i \text{가 병진 조인트 좌표일 경우} \end{cases} \quad (23)$$

그러므로 식(19)와 (20)에 따라 회전좌표 및 위치좌표 변환을 기초물체로부터 외향경로(outward path)를 따라 마지막 물체까지 행함으로서 시스템의 일반좌표 벡터를 절대좌표 벡터로 변환할 수 있다.

2.3 속도 및 가속도변환

Fig. 2에서 물체 i 의 기준물체를 물체 j 로 할때 물체 i 와 j 의 국부좌표계의 각속도는 다음과 같은

관계를 가진다.

$$w^i = w^j + A^j \dot{\epsilon}^{ij} - A^i \dot{\epsilon}^{ji} + \Omega^i \quad (24)$$

여기서 Ω^i 는 물체 i 의 그 기준물체 j 에 대한 상대 각속도 벡터이며 일반속도로 다음과 같이 주어진다.

$$\Omega^i = \sum_k (1 - \epsilon_k^i) \dot{q}_k^i e_k^i \quad (25)$$

$$e_k^i = A^i B^{ji} e_k^{j''} \quad (26)$$

식(20)의 시간에 대한 1차 미분식과 식(24)를 결합하면 물체 i 의 국부좌표계 원점 0^i 의 속도는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} v^i &= v^j + \bar{w}^j c^{ij} - \bar{d}^{ii} A^j \dot{\epsilon}^{ij} + A^j \dot{u}^{ij} \\ &= v^j + \bar{\Omega}^j d^{ij} + \bar{d}^{ii} A^j \dot{\epsilon}^{ij} - A^j \dot{u}^{ij} + \mu^{ji} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서,

$$v^i = \sum_k \epsilon_k^i \dot{q}_k^i e_k^i \quad (28)$$

$$\mu^{ji} = -\sum_k \epsilon_k^i q_k^i \dot{e}_k^i A^i \dot{\epsilon}^{ji} \quad (29)$$

$$c^{ij} = s^{ij} + d^{ii} = r^i - r^j \quad (30)$$

마찬가지로 물체 j 와 그 기준물체에 대하여서도 각속도 및 속도관계식을 만든 후 식(24)와 식(27)에 대입하고, 이러한 과정을 기준물체가 기초물체가 될 때까지 반복함으로써 물체 i 의 직교속도 벡터를 일반속도 벡터로 표현할 수 있어 다음과 같은 행렬형으로 만들 수 있다.

$$\dot{y}^i = \begin{bmatrix} v^i \\ w^i \\ \dot{a}^i \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N_b} S_{ij} \dot{q}^{j*} \quad (31)$$

여기서, S_{ij} 는 크기가 $(6+m) \times (k+m)$ 인 블록행렬로서 물체 j 가 그 기준 물체와 연결된 조인트의 유형에 따라 구해진다. $i=1, 2, \dots, N_b$ 에 대한 식(31)을 모두 결합하면 다음과 같은 형태의 속도변환식을 얻을 수 있다.

$$\dot{y} = S(q^*) \dot{q}^* \quad (32)$$

여기서 S 는 시스템의 일반속도 벡터 \dot{q}^* 를 직교속도 벡터 \dot{y} 로 변환하는 속도변환행렬로서 시스템의 경로행렬에 따라 체계적으로 구성될 수 있다.

식(8) 및 (32)를 이용하면,

$$\dot{x} = DS\dot{q}^* = S^* \dot{q}^* \quad (33)$$

여기서 $D = \text{Block dia.}[D^1, D^2, \dots, D^{N_b}]$ 이며, N_b 는 시스템의 물체수이다.

식(33)을 시간에 대하여 미분하면 다음과 같은 가속도변환식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x} = S^* \dot{q}^* + \dot{S}^* q^* \quad (34)$$

여기서 ($\dot{}$)는 시간에 대한 2차 미분을 뜻하며,

$$\dot{S}^* = \dot{D}S + D\dot{S} \quad (35)$$

2.4 운동방정식

시스템의 운동방정식을 라그랑지 방정식 및 앞절에서 유도한 속도와 가속도변환식을 이용하여 상대좌표로 유도한다. 구속조건을 가지는 다물체계의 라그랑지 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^*} \right]^T - \left[\frac{\partial T}{\partial q^*} \right]^T + \left[\frac{\partial V}{\partial q^*} \right]^T + \Phi_{q^*}^T \lambda = Q \quad (36)$$

여기서 T 와 V 는 각각 시스템의 운동방정식 및 변형에너지, Φ_{q^*} 는 오일러 매개변수 구속조건 ($p^T p = 1^{(6)}$)을 포함하는 구속조건식 ($\Phi = 0$)의 야코비안 행렬, λ 는 라그랑지 승수이며 Q 는 일반력벡터이다.

시스템의 운동에너지 및 변형에너지는 다음과 같이 표현된다.⁽³⁾

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T M \dot{x} \quad (37)$$

$$V = \frac{1}{2} x^T K x \quad (38)$$

여기서 M 과 K 는 각각 시스템의 질량행렬 및 강성행렬이다.

시스템에 작용하는 외력을 절대좌표 공간에서의 힘벡터 F 로 표현할 수 있다.⁽³⁾ 이 힘의 시스템에 대한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta W = F^T \delta x \quad (39)$$

한편, 직교좌표와 일반좌표의 변분은 다음과 같은 관계를 가진다.⁽⁶⁾

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q^*} \delta q^* = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}^*} \delta \dot{q}^* = S^* \delta q^* \quad (40)$$

식(40)을 이용하면 식(39)는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W = Q^T \delta q^* \quad (41)$$

여기서 $Q = S^{*T} F$ 로 정의되는 일반력벡터이다.

식(37)과 (38)을 라그랑지 방정식(36)에 대입하

고 변환식(33), (34)를 이용하면, 시스템의 운동방정식은 다음과 같이 일반좌표로 표현된다.

$$M^* \ddot{q}^* = Q^* - \Phi_{q^*}^T \lambda \quad (42)$$

여기서,

$$M^* = S^{*T} M S^* \quad (43)$$

$$Q^* = S^{*T} \left[F - M \dot{S}^* \dot{q}^* - K x - M \dot{x} + \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]^T \right] \quad (44)$$

구속조건식의 2차 시간미분과 식(42)를 결합하면 다음과 같은 행렬형이 된다.

$$\begin{bmatrix} M^* & \Phi_{q^*}^T \\ \Phi_{q^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}^* \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^* \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (45)$$

여기서,

$$\gamma = -\Phi_{q^*} \dot{q}^* - \dot{\Phi} \quad (46)$$

이며, $\Phi_i \equiv \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_i$ 이다.

식(45)로부터 일반속도 \dot{q}^* 와 일반좌표 q^* 를 구한 후 위치 및 속도변환을 통하여 시스템의 운동을 직교좌표 공간에서 표현할 수 있다.

3. 수치예제

3.1 단순지지보

Fig. 3에 보인 단순지지보의 자중에 따른 동적거동을 해석하였다. 보의 좌단으로부터 100 cm 떨어진 점 P 의 수직방향 운동을 알아보기 위하여 본 연구에서 제시한 알고리즘을 이용하여 얻어진 결과와 엄밀해(exact solution)를 비교하였다. 보는 초기에 변형이 되지않은 형상으로 가정하고 정지상태로부터 놓여지며, 관형단면을 가진 보의 물성치들은 Table 1에 있다.

단순지지보의 자중에 따른 동적거동의 엄밀해는 다음과 같이 주어진다.⁽¹⁰⁾

$$Y(X, t) = \frac{96A}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \sin \frac{(2n+1)\pi X}{L} \cos \omega_n t \delta_s(X) \quad (47)$$

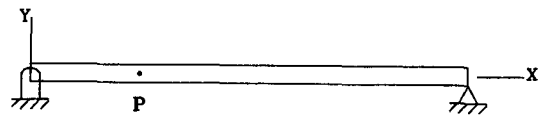


Fig. 3 A simply supported beam

Table 1 Material properties and dimensions of a beam

Mass density (g/cm ²)	2.699
Young's Modulus (dyne/cm ²)	6.895 × 10 ¹¹
Inner radius (cm)	4.0
Outer radius (cm)	5.0
Length (cm)	400.0

여기서 $A = \frac{m_o g L^4}{24 E I_z}$, $\delta_s(X)$ 는 보의 정적변형량으로서 다음과 같으며 m_o 는 보의 단위 길이당 질량이다.

$$\delta_s(X) = A \left(\frac{X}{L} - 2 \frac{X^3}{L^3} + \frac{X^4}{L^4} \right) \quad (48)$$

$$w_n = [(2n+1)\pi]^2 \sqrt{\frac{E I_z}{m_o L^4}} \quad (49)$$

식(47)에서 2차 이상의 모드가 보의 변형량에 미치는 영향은 아주 미미함을 알 수 있다. 따라서 보

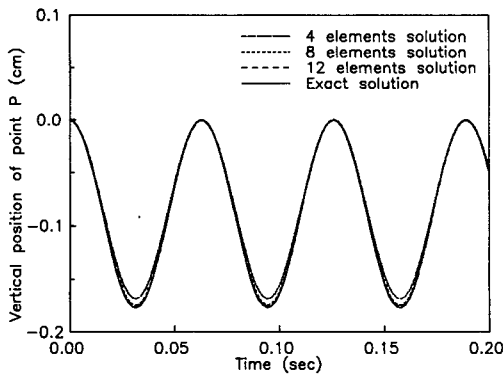


Fig. 4 Vertical position of point P on a simply supported beam

의 변형은 보의 요소수를 4개, 8개 및 12개로 등분한 3가지의 모델에 대하여, 유한요소법을 이용하여 구한 1차 단순지지 굽힘 모드로서 표현하였다.

점 P의 변위에 대하여 엄밀해와 시뮬레이션 결과를 Fig. 4에서 비교하였다. 그 결과 요소를 미세화함에 따라 엄밀해에 접근하고 있으며, 최대 변형 상태에서의 엄밀해와의 변위오차는 4요소의 경우 5.3%, 8요소의 경우 1.4%, 12요소의 경우에는 0.6%로 나타나 보를 8요소로 등분한 모델에 대하여도 상당히 정확한 결과를 얻을 수 있으며, 본 연구의 수치결과들이 타당함을 알 수 있다.

3.2 다관절 매니플레이터

네개의 아암이 회전 조인트로 연결되어 있고 각 조인트에 구동조건이 주어지는 매니플레이터의 운동을 해석하였다. Fig. 5에서 물체 2와 3은 각각 내경 4.0 cm, 외경 5.0 cm인 관형보이며 탄성계수는 6.895×10^{10} N/m²이다. 그리고 물체 1과 4는 강체로 취급하였다. 각 물체의 칫수와 변형전 물성치는 Table 2에 있다. 보의 변형모드를 해석하기 위하여 물체 2와 3의 유한요소 모델은 각각 8개와 10개로 등분한 보요소 (beam element)로 구성하였으며, 경계조건으로는 두 물체 모두 왼쪽 끝 절점에서는 z축 주위의 회전을 제외한 나머지 변위 및

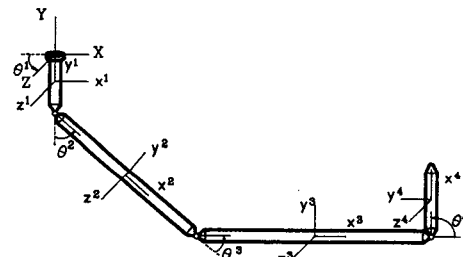


Fig. 5 A flexible manipulator with angle drivers

Table 2 Inertia properties and dimensions of manipulator arms

Body no.	Mass(kg)	Length(m)	Principal moment of inertia(kg·m ²)		
			I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
1	50.00	0.3	0.0195	0.0047	
2	30.525	4.0	0.0625	40.73	40.73
3	38.156	5.0	0.0782	79.53	79.53
4	200.0	0.5	0.0078	0.0834	0.0834

회전을 0으로 하고 오른쪽 끝 절점에서는 y방향의 변위만을 0으로 하였다. 보의 변형은 각각 처음 두 모드, 즉 xz면에서의 외팔보 모드와 xy면에서의 단순지지 굽힘 모드를 취하여 표현하였다. 중력의 영향은 무시하고 각 조인트에 다음과 같은 구동 구속조건(driving constraints)을 주어 25초 동안 시뮬레이션하였다.

$$\theta^2 = \theta^4 = \begin{cases} \frac{\pi}{2T_s} \left[t - \frac{T_s}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \right], & 0 \leq t < T_s \\ T_s \\ \frac{\pi}{2}, & t \geq T_s \end{cases} \quad (50)$$

$$\theta^3 = \begin{cases} \frac{\pi}{4T_s} \left[t - \frac{T_s}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) \right], & 0 \leq t < T_s \\ T_s \\ \frac{\pi}{4}, & t \geq T_s \end{cases} \quad (51)$$

위의 두 식에서 T_s 는 15초로 하였다.

만약 각 물체를 모두 강체로 모델링하면 구속조건에 의하여 이 시스템의 운동은 기구학적으로 해석할 수 있다. 그러나 물체 2와 물체 3을 탄성체로 모델링할 경우 탄성변형에 따른 자유도가 존재하므로 각 물체의 운동은 동역학적 해석을 통하여 구해진다. Fig. 6은 매니플레이터 끝점의 위치에 있어서 강체모델에 대한 탄성체모델의 X, Y 및 Z방향의 편차를 나타내며 이 결과는 반복법⁽⁴⁾에 의하여 해석한 결과와 비교하여 잘 일치하였다. 여기서 외팔보 모드는 XZ평면에서의 편차를 가져오며 Y방

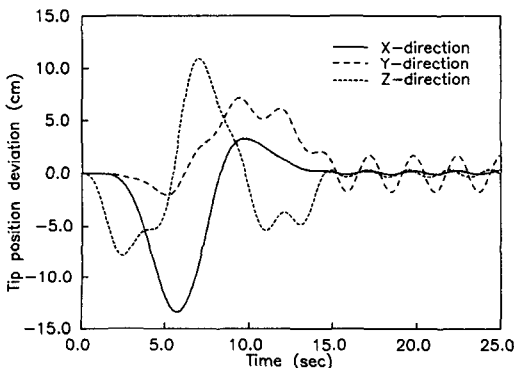


Fig. 6 Tip position deviation of flexible manipulator system

향의 편차는 단순지지보 모드에 의하여 생기게 된다.

이 문제에 있어서 본 해석법에서 4개의 구속조건 및 4개의 상대좌표 및 4개의 모드좌표가 일반좌표로 사용된 반면, 직교좌표를 사용한 해석법에서는 28개의 구속조건과 32개의 좌표가 필요하게 되므로 수치적분시 본 방법이 효율적임을 알 수 있다.

5. 결 론

탄성체를 포함하는 일반적인 다물체계의 동역학적 해석을 위한 체계적인 알고리즘을 속도변환기법을 이용하여 개발하였다. 기구학적 해석을 통하여 직교좌표를 상대좌표로 표현하는 위치변환식을 유도하였으며, 시스템의 경로행렬 및 각 물체를 연결하는 기구학적 조인트에 따라 직교속도 벡터와 상대속도 벡터의 선형관계를 나타내는 속도변환행렬을 체계적으로 유도하였다. 라그랑지 방정식 및 속도변환을 이용하여 시스템의 운동방정식을 상대좌표로 기술하였다. 이 결과 최소의 미분 및 대수방정식이 얻어지며 수치적분시 효율성이 증대된다. 물체의 자세를 나타내는 회전좌표로 오일러 매개변수를 사용하였고 탄성변형은 물체의 진동모드로서 나타내었다. 이 알고리즘에 따라 탄성체를 포함하는 시스템의 3차원 운동을 해석할 수 있는 전산 프로그램을 개발하여, 단순지지보의 동적거동을 해석한 결과 엄밀해와 잘 일치하여 본 연구의 해석방법이 타당함을 알 수 있었으며 구속조건이 주어지는 다관절 매니플레이터의 해석에도 적용하였다. 직교좌표를 사용하여 운동방정식을 유도한 경우에 비하여 본 해석방법에서는 각 물체의 운동이 상대운동으로 구해진다. 따라서, 제어량이 흔히 상대좌표로 주어지는 로봇과 같은 기계시스템의 동역학적 해석 및 역동역학적 해석에 본 해석방법은 유용하게 응용될 수 있으리라 사료된다.

후 기

이 논문은 1991년도 교육부 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- (1) Orlandea, N., Chace, M.A. and Calahan, D.A.,

- 1977, "A Sparsity-Oriented Approach to the Dynamic Analysis and Design of Mechanical Systems-Part I & II," Trans. of ASME Journal of Engineering for Industry. pp. 773~784.
- (2) Nikravesh, P.E. and Chung, I.S., 1982, "Application of Euler Parameters to the Dynamic Analysis of Three Dimensional Constrained Mechanical Systems," Journal of Mechanical Design, Vol. 104, pp. 785~791.
- (3) Yoo, W.S., 1985, "Dynamic Analysis of Flexible Mechanical Systems using Finite Element Lumped Mass Approximation and Static Correction Modes," Ph. D. Thesis, The Univ. of Iowa, Iowa.
- (4) Kim, S.S. and Haug, E.J., 1988, "A Recursive Formulation for Flexible Multibody Dynamics, Part I : Open-loop Systems," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 293~314.
- (5) Jerkovsky, W., 1978, "The Structure of Multibody Dynamics Equations," Journal of Guidance and Control, Vol. 1, No. 3, pp. 173~182.
- (6) Kim, S.S. and Vanderploeg, M.J., 1986, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 108, pp. 176~182.
- (7) Chang, C. W. and Shabana, A. A., 1990, "Spatial Dynamics of Deformable Multibody Systems with Variable Kinematic Structure: Part 1-Dynamic Model, Part 2-Velocity Transformation," Trans. of ASME, Journal of Mechanical Design, Vol. 112, pp. 160~167.
- (8) Nikravesh, P., 1988, Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems, Prentice-Hall, Inc..
- (9) Wehage, R.A., 1983, "Quaternions and Euler Parameters-A Brief Exposition," The Advanced Institute of NATO Conference on Dynamic Analysis and Dynamic Optimization of Mechanical Systems, Iowa City, IA.
- (10) Meirovitch, L., 1971, Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Co.