

〈論 文〉

전단효과를 고려한 곡선보 요소 개발

이석순* · 구정서** · 최진민**

(1993년 4월 19일 접수)

Development of Curved Beam Element with Shear Effect

Seok Soon Lee, Jeong Seo Koo and Jin Min Choi

Key Words: Timoshenko's Beam(티모센코 보), Curved Beam Element(곡선보), Shear Correction Factor(전단 수정계수), membrane locking(막구속), shear locking(전단구속)

Abstract

Two-noded curved beam elements, CMLC(field-consistent membrane and linear curvature) and IMLC(field-inconsistent membrane and linear curvature) are developed on the basis of Timoshenko's beam theory and curvilinear coordinate. The curved beam element is developed by the separation of the radial deflection into the bending and shear deflection and the projection of the shear deflection into bending deflection. In the CMLC element, field-consistent axial strain interpolation is adapted for removing the membrane locking. The CMLC element shows the rapid and stable convergence on the wide range of curved beam radius to thickness. The field-consistent axial strain and the separation of radial deformation produces the most efficient linear element possible.

1. 서 론

곡선보(curved beam) 문제를 직선보 요소로 해석할 때는 기하학적 특성 때문에 매우 큰 오차가 유발되므로 곡선보를 효과적으로 해석하기 위하여 이에 관한 연구가 활발히 수행되어 왔다.^(1,2,3)

보의 두께가 두꺼울 경우에는 전단응력에 의한 변형을 무시할 수 없게된다. Timoshenko 보이론에서는 이 전단응력에 의한 변형을 고려하여 보의 변형을 해석하고 있다. 인장 변형률(extensional strain)과 전단변형률(shear strain)을 고려한 보의 해석에서 보의 두께가 얇을 경우에는 인장과 전단에 의한 강성이 굽힘에 의한 강성에 비하여 상대적으로 대단히 커서 변형이 작게 계산되는 막구속

(membrane locking)과 전단구속(shear locking) 현상이 나타난다.^(4,5,6,7)

Ashwell⁽⁸⁾의 해석은 얇은 셸에 성립하고 변형률과 곡률 및 변위관계의 미분방정식 해를 형상함수로 도입하는 변형률요소를 개발하였고, 최등⁽⁹⁾은 이 변형률요소에 전단 효과를 고려한 미분방정식의 해를 형상함수로 도입하여 높은 정확도를 보여 주고 있다. 알은 곡선보에 대하여 Stolaski & Belytschko⁽⁵⁾과 Prathap and Brashyam⁽⁷⁾는 막구속(membrane locking)현상에 대한 개념과 이 막구속으로 인한 해의 부정확성을 설명하고 이의 해결을 위하여 감차적분(reduced integration)을 제시하였다. Babu와 Prathap^(10,11)은 가상 부가 강성(spurious additional stiffness)에 의한 막구속과 전단구속에 의한 오차예측(error estimate)을 하였고, 이 가상강성을 제거할 수 있도록 보간함수를 취함으로 엄밀해에 수렴하는 결과를 보였다.

*정회원, 경상대학교 기계공학과

**정회원, 한국기계연구원 수송기계실

본 연구에서는 곡선 Timoshenko 보에 대하여 반경방향 변위를 굽힘변위와 전단변위로 분리하고 전단변형을 굽힘변형으로 투사시키는 방법과 Babu와 Prathap⁽¹⁰⁾이 제시한 방법에 의하여 막 강성에 대한 가성강성을 제거하는 방법을 채택하여 얇은 보에서 두꺼운 보에 이르기까지 적용할 수 있고, 높은 정확도를 보여주는 효율적인 요소를 개발하고자 하였다.

2. 선형 곡선 보

Fig. 1과같은 곡선요소보에서 요소의 길이를 $2l$ 로 놓고 총 변형률 에너지는 축변형 에너지, 굽힘 변형 에너지와 전단변형 에너지의 합으로 다음과 같이 표현한다.⁽¹⁰⁾

$$U = U_M + U_B + U_S \tag{1}$$

여기서

$$U_M = \int_{-l}^l \frac{1}{2} EA (u_{,x} + \frac{w}{R})^2 dx \tag{2}$$

$$U_B = \int_{-l}^l \frac{1}{2} EI (\theta_{,x} - \frac{u_{,x}}{R})^2 dx \tag{3}$$

$$U_S = \int_{-l}^l \frac{1}{2} kGA (\theta - w_{,x})^2 dx \tag{4}$$

이다.

식(2)-식(4)에서 u, w 는 축방향과 반경방향의 변위이고 θ 는 보 단면의 회전각이다. EA, EI, GA 는 인장과 굽힘 및 전단강성이며 k 는 전단수정 계수이다. I 는 관성모멘트이고, A 는 단면적이고, R 은 곡선보의 곡률반경이다. 본 논문에서는 I, A 및 R 를 편의상 상수로 취하였다. 일반적인 적용을 위하여는 I, A 및 R 은 요소길이에 대하여 보간함수로 근사시켜서 해석할 수 있다.

식(1)에 대한 변형률-변위 관계식은 Timoshenko 보 이론을 적용하여 다음과 같이 표시된다.

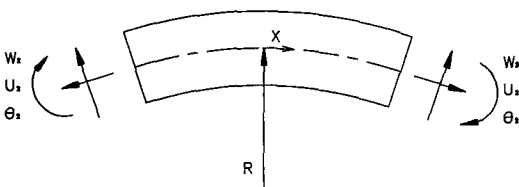


Fig. 1 Curved beam element

$$\epsilon = u_{,x} + \frac{w}{R} \tag{5}$$

$$\kappa = \theta_{,x} - \frac{u_{,x}}{R} \tag{6}$$

$$\gamma = \theta - w_{,x} \tag{7}$$

이들 식에서 ϵ 는 축 변형률(axial strain)이고 κ 는 곡률(curvature)이고, γ 는 전단 변형률(shear strain)이다.

곡선보의 자유도를 반경방향의 변위와 축방향의 변위는 서로 수직되도록 Fig. 1과 같이 정하고, 각각을 독립변수로 취한다. 이들 변위는 상호간에 간섭을 주지 않는다고 가정하고, 반경방향 변위 w 는 굽힘변위 w^b 와 전단변위 w^s 의 합으로 정의한다.

$$w = w^b + w^s \tag{8}$$

식(8)과 같이 반경방향의 변위를 굽힘변위와 전단변위로 분리함으로써 곡선보의 수식을 간단하게 정리할 수 있다. 또한 보의 평형방정식과 힘-변위 관계식을 이용하여 굽힘변위와 전단변위와의 관계식을 사용하여 전단변위의 자유도를 제거한다. 이렇게하여 전단구속을 효과적으로 제거할 수 있는 곡선보 요소를 개발하고자 한다.

식(7)의 전단 변형률 γ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma = \theta - w_{,x} = -w^s_{,x} \tag{9}$$

그러면 식(8)과 식(9)의 정의에 의하여 보의 회전각 θ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\theta = w^s_{,x} \tag{10}$$

식(9), (10)으로 부터 식(3), (4)는 다음과 같이 표현된다.

$$U_B = \int_{-l}^l \frac{1}{2} EI (w^b_{,xx} - \frac{u_{,x}}{R})^2 dx \tag{11}$$

$$U_S = \int_{-l}^l \frac{1}{2} kGA (-w^s_{,x})^2 dx \tag{12}$$

식(2)와 식(11), (12)으로 주어진 범함수를 이용하여 곡선보의 강성행렬을 구한다.

3. 곡선보 요소의 강성행렬

식(11)과 (12)에서 반경방향변위를 굽힘과 전단 변위로 분리해서 표현하였으므로 절점에서의 자유도가 1개 증가하게된다. 이 증가된 자유도는 보의

평형방정식과 힘-변위 관계식을 이용하여 유도된 전단변위와 굽힘변위와의 관계식으로 제거한다. 즉 식(11)과 식(12)에서 각 절점에서의 전단변위 w^s 와 굽힘변위 w^b 는 Timoshenko보 이론을 적용하여 전단변위 벡터를 굽힘변위 벡터로 투사시켜서 다음과 같이 표현한다.

$$w^s = Tw^b \tag{13}$$

여기서 행렬 T 는 부록에서 유도하였다.

식(8)을 행렬식으로 표현하고, 식(13)를 대입하면 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$w = (I + T)w^b \tag{14}$$

여기서 $w = [w_1, \theta_1, w_2, \theta_2]$ 이고 I 는 단위행렬(identity matrix)이다. 식(13)과 식(14)는 식(11) 및 식(12)로부터 강성행렬을 구성할 때 사용한다.

곡선보의 총 변형에너지는 식(2) 및 식(11)과 (12)의 합으로 표현되는 범함수의 합으로 표현되고, 이들 범함수를 이용하여 곡선보 요소의 강성행렬을 구한다. 본 논문에서는 두가지 방법에 의하여 곡선보요소를 개발하였다.

(1) IMLC(field-inconsistent membrane and linear curvature) 요소

식(2)와 식(11), (12)로부터 유한요소 강성행렬을 구하는 데 필요한 범함수의 수학적인 요구조건⁽¹²⁾를 만족시키기 위하여 u 와 w 및 w^s 는 선형 보간함수로 근사시키고, w^b 는 Hermite보간함수로 근사시킨다.

$$u = a_0 + a_1(x/l) \tag{15a}$$

$$w = b_0 + b_1(x/l) \tag{15b}$$

$$w^b = c_0 + c_1(x/l) + c_2(x/l)^2 + c_3(x/l)^3 \tag{15c}$$

$$w^s = d_0 + d_1(x/l) \tag{15d}$$

식(15a)~(15b)를 이용하면 (5)-(7)은 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon(a_1/l + b_0/R) + (b_1/R)(x/l) \tag{16}$$

$$x = 2c_2/l^2 + 6c_3(x/l)/l^2 - a_1/RI \tag{17}$$

$$y = -d_1/l \tag{18}$$

식(16)와 식(17)에 의하여 축 변형률과 곡률은 x 에 대하여 선형으로 표시되고, 식(18)에 의하여 전단변형률은 일정한 상수로 표현된다. 식(16)-(18)을 이용하면 각 변형률 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U_M = \frac{1}{2}(EA)(2l)[(a_1/l + b_0/R)^2 + \frac{1}{3}(b_1/R)^2] \tag{19}$$

$$U_B = \frac{1}{2}(EI)(2l)[(c_2/l^2 - a_1/RI)^2 + \frac{1}{3}(6c_3/l^2)^2] \tag{20}$$

$$U_S = \frac{1}{2}(kGA)(2l)(-d_1/l)^2 \tag{21}$$

Babu와 Prathap⁽¹⁰⁾의 용어를 따라서, 식(16)에서 축변형률 ϵ 이 $(a_1/l + b_0/R)$ 항만의 상수값을 갖을 때 장-일치(field-consistent)라 하고, $(b_1/R)(x/l)$ 항이 추가될 경우에는 장-불일치(fieldinconsistent)라 한다. 식(16)에서 $(b_1/R)(x/l)$ 항에 의해서 식(19)의 $1/3(b_1/R)^2$ 항에 의한 막구속(membrane locking)에 대하여는 참고문헌⁽¹⁰⁾에서 잘 보이고 있다. 식(13), (14)와 식(19)-(21)을 이용하여 곡선보의 강성행렬을 구한다.

(2) CMLC(field-consistent membrane and linear curvature) 요소

식(19)에서 $1/3(b_1/R)^2$ 항에 의한 막구속을 제거하기 위하여 축 변형률 ϵ 이 일정한 상수 값이 되도록 보간함수를 다음과 같이 취한다.⁽¹⁰⁾

$$w = b_0 \tag{22}$$

여기서 $b_0 = (w_1 + w_2)/2$ 로 주어진다.

식(22)로부터 축 변형률 ϵ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\epsilon = (a_1/l + b_0/R) \tag{23}$$

따라서, 축 변형률 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$U_M = \frac{1}{2}(EA)(2l)[(a_1/l + b_0/R)^2] \tag{24}$$

식(24)은 식(19)에서 식(22)과 같이 w 를 취함으로써 요소의 중앙에서만 적분을 행하는 감차적분과 같은 효과를 얻게된다.⁽¹⁰⁾ 식(13), (14)와 식(24) 및 식(20), (21)을 이용하여 곡선보에 대한 강성행렬을 구한다.

4. 결과 및 토의

본 논문에서 개발한 곡선보의 해석을 위하여 탄성계수와 포아송 비는 각각 $E=10E8$ 과 $\nu=0.3$ 으

로 취하였다. 단면은 직사각형으로 단면 폭 $b=1$ 로 취하였고, 직사각형의 전단수정계수 $k=5/6$ 이다. 곡선보에서 $R=\infty$ 로 취하면 직선보가 된다. 본 논문에서 개발한 요소에 $R=\infty$ 로 취해 외팔보를 해석하여 전단구속에 대하여 조사한다. 또한, 본 논문에서 개발한 곡선보 요소(CMLC, IMLC)로 원형링을 해석하고, Babu와 Prathap⁽¹⁰⁾이 제시한 2절점요소로 전단과 막구속이 존재하는 요소(IMIS)와 전단과 막구속을 제거한 요소(CMCS)를 사용하여 동일한 모델을 해석하고 그 결과를 비교하고자 한다. 수렴특성은 Catigliano정리에 의한 엄밀해⁽¹³⁾의하여 조사하였다.

(1) 외팔보

Fig. 2와 같은 외팔보의 끝에 $P=50$ 의 하중을 적용시켰다. 외팔보는 그 특성상 전단구속만이 존재하고 막 구속이 존재하지 않는다. 따라서 본 논문

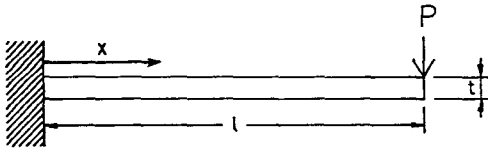


Fig. 2 A cantilever beam subjected to a concentrated force at the free end

에서 제시한 CMLC요소와 IMLC요소는 같은 결과를 얻게되고, 이들 요소의 전단구속에 대한 특성을 조사하고자 한다.

Fig. 3에서 세장비 l/t 를 5로 취하여 하중점에서의 변위를 구하고 요소의 갯수에 따른 수렴성을 각각의 요소종류에 대하여 보였다. 본 논문에 제시한 요소(CMLC, IMLC)는 요소의 갯수가 한개인 경우에도 엄밀해와 일치함을 보이고, 전단구속이 제거된 CMCS요소의 경우는 전단구속이 제거되지 않은 IMIS요소보다 엄밀해에 빨리 수렴하나 요소의 갯수가 작은 경우에는 상당한 오차가 있음을 보인다. Euler 보 요소인 Cubic Element는 전단변위를 포함하고 있지 않아서 엄밀해와는 일정한 간극을 이루고 있어서 Fig. 3에 참고로 보였다. Fig. 4에서 분할된 요소의 갯수를 3개로 취하고 세장비 l/t 를 변화시키면서 각요소의 수렴성을 보였다. Fig. 4에서 본 논문이 제시한 요소들은 세장비에 관계없이 엄밀해와 일치함을 보이고, 세장비가 커짐에 따라 전단구속이 제거되지 않은 IMIS요소는 발산하고 전단구속이 제거된 CMCS요소는 엄밀해에 근접함을 보인다. Cubic Element는 세장비가 커짐에 따라 전단변형의 크기가 작아져서 엄밀해에 접근하게 된다. Fig. 3과 4으로부터 본 논문에서 개발한 CMLC와 IMLC요소는 세장비와 요소의 갯수에 관

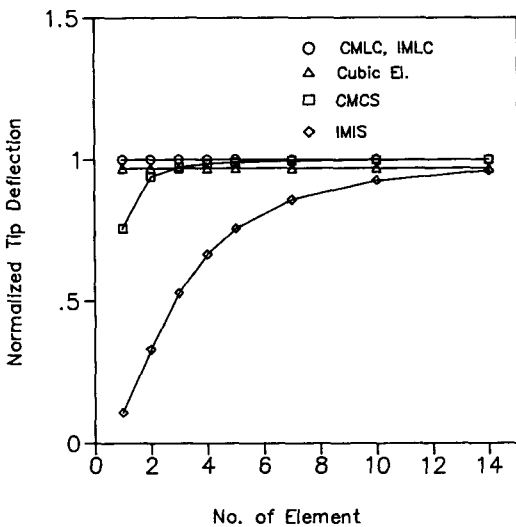


Fig. 3 Convergency of normalized tip deflection of a cantilever beam under a concentrated load with $l/t=5$

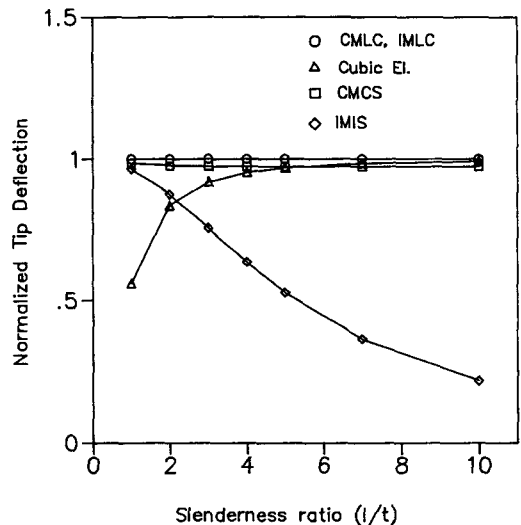


Fig. 4 Normaliwed tip deflection of a cantilever beam with three element idealization according to slenderness ratio

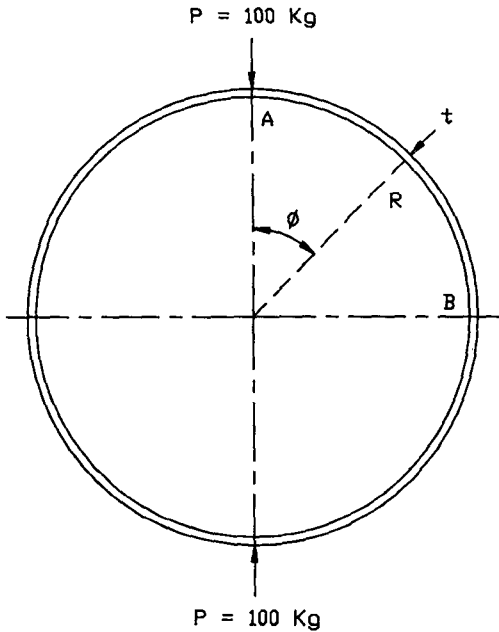


Fig. 5 Pinched ring

계없이 엄밀해와 일치함으로부터, 본 논문에서 제시한 방법은 전단구속을 효과적으로 제거할 수 있음을 알 수 있다. 또한 전단구속이 제거된 CMCS 요소는 분할된 요소의 갯수가 적을 경우에는 계산 오차가 발생함을 알 수 있다.

(2) 원형링

Fig. 5와 같은 원형링을 곡선보의 모델로 택하였고, 하중은 점 A와 C에 집중하중 $P=100$ 을 작용시켰고, $R=5$ 로 취하였다. 링의 반경대 두께비 R/t 와 요소의 갯수의 변화에 따른 수치해를 구하고 엄밀해에 의하여 수렴특성을 조사하였다. 그림 5에서 유한요소는 대칭성을 고려하여 점 A와 B까지의 링의 1/4에 대하여만 요소분할하여 수치해를 구하였다.

가중점에서의 변위를 본 논문에서 제시한 요소를 사용하여 구하고, Fig. 6에서 요소의 갯수에 따른 곡선보(CMLC, IMLC)의 수렴성을 엄밀해로 무차원 시켜서 보였다. Fig. 6에서 CMLC 요소와 CMCS 요소는 요소수가 적어도 엄밀해에 수렴함을 보이고 IMLC와 IMIS 요소는 요소수가 많아야 엄밀해에 수렴하는 경향을 보인다. CMLC 요소는 요소수가 특히 적을 경우에도 CMCS 요소보다 수렴성이 우수함을 알 수 있다.

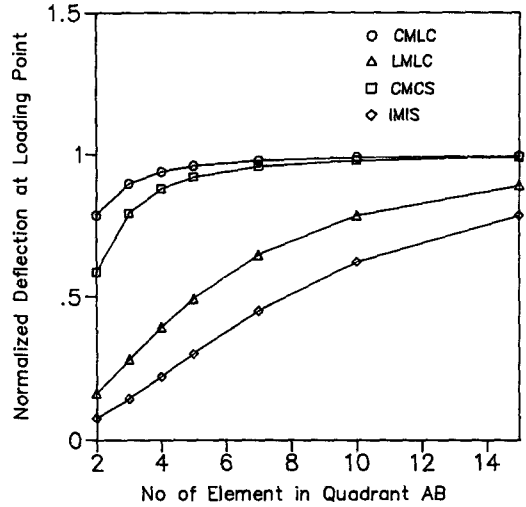


Fig. 6 Convergence of radial deflection at loading point for a pinched ring

Table 1 Accuracy of various curved beam elements according to the ratios of R/t

R/T	Number of Element	Normalized Deflection at Loading Point			
		CMLC	IMLC	CMCS	IMIS
1	3	0.9141	0.7847	0.8751	0.7146
	5	0.9671	0.9066	0.9524	0.8683
	10	0.9914	0.9743	0.9878	0.9627
2	3	0.9036	0.6352	0.8276	0.4798
	5	0.9627	0.8187	0.9338	0.7046
	10	0.9907	0.9458	0.9829	0.9019
5	3	0.8958	0.2819	0.7928	0.1445
	5	0.9599	0.4944	0.9206	0.3023
	10	0.9894	0.7865	0.9799	0.6232
10	3	0.8941	0.1005	0.7857	0.0413
	5	0.9588	0.2139	0.9157	0.0998
	10	0.9894	0.4960	0.9788	0.2975
20	3	0.8937	0.0296	0.7838	0.0107
	5	0.9586	0.0707	0.9168	0.0272
	10	0.9893	0.2097	0.9786	0.0970
40	3	0.8936	0.0078	0.7833	0.0027
	5	0.9586	0.0204	0.9165	0.0070
	10	0.9892	0.0683	0.9786	0.0263
100	3	0.8936	0.0013	0.7765	0.0004
	5	0.9585	0.0035	0.9165	0.0011
	10	0.9893	0.0130	0.9786	0.0044

곡선보 요소의 적용성을 보기 위하여 반경대 두께비(R/t)와 분할된 요소수를 변화시켜서 가중점에서의 변위를 계산하고 그 결과를 엄밀해로 무차원

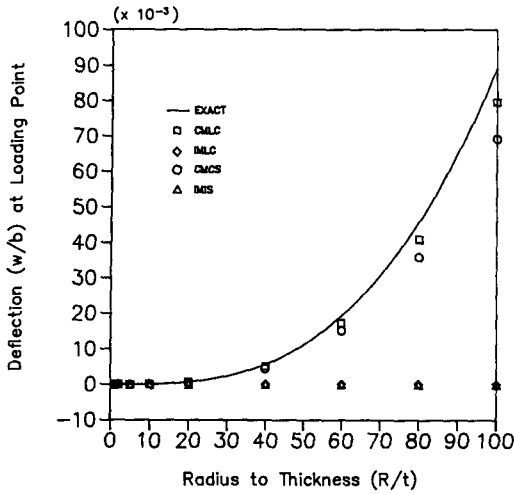


Fig. 7 Deflection(w/b) at loading point according to the ratios of R/t with three element idealization.

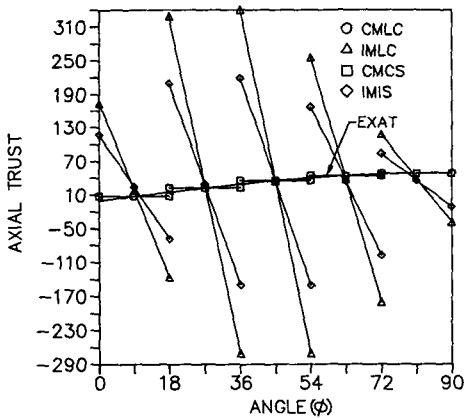


Fig. 8 Membrane force in a quadrant of a pinched ring

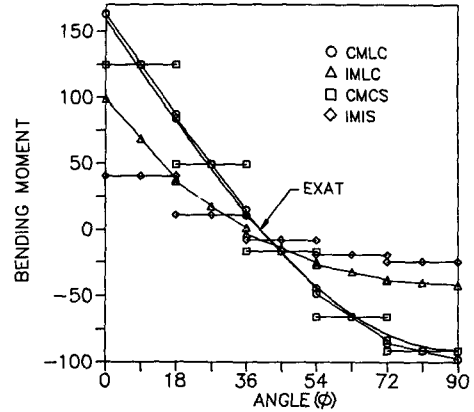


Fig. 9 Bending moment in a quadrant of a pinched ring

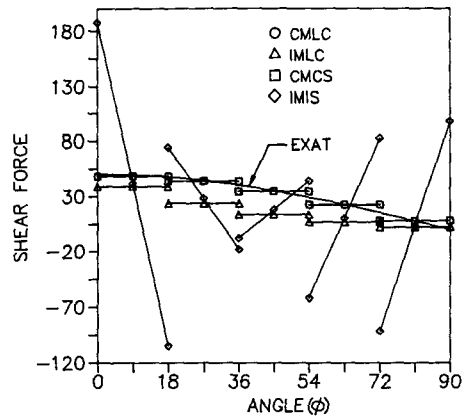


Fig. 10 Shear force in a quadrant of a pinched ring

화시켜서 Table 1에 보였다. Table 1에서 CMLC와 CMCS요소는 R/t의 넓은 범위에서 안정된 수렴 특성을 보이고 IMLC와 IMIS는 R/t값이 클수록 엄밀해와 멀어지고 있음을 보여주고 있다. 전 요소의 종류에서 요소수가 적을 경우에는 R/t의 값이 커짐에 따라 오차가 증가함을 보이고 있다. 이 현상을 Fig. 7에서 요소의 분할을 3개로 하여 R/T의 값이 커짐에 따른 점 A에서의 반경방향 변위를 구해서 엄밀해와 비교하여 보였다. Fig. 7에서 모든종류의 요소들은 R/t가 작을경우—전단 변형이 클경우—에는 엄밀해에 근접한 결과를 얻

을 수 있으나 R/t가 증가할 경우에는 전단 및 막 구속이 발생하여 CMLC와 CMCS는 전영역에서 매우 안정된 수렴 특성을 보이고 있으나 구속이 제거되지 않은 IMLC와 IMIS는 발산함을 보인다. R/t의 비가 클경우에는 CMLC요소와 CMCS요소는 엄밀해와 차이를 보이고 있는 것은 분할된 요소의 갯수가 작음으로 인하여 발생하는 계산오차로 사료된다. 이 경향은 Table 1에서 보인 바와 같고, 오차를 5%이내 줄이기 위해서는 적어도 5개이상의 요소분할이 필요함을 알 수 있다.

요소의 분할을 5개로 하고 각요소의 절점과 중앙

에서 축력(axial trust), 굽힘모멘트(bending moment), 전단력(shear force)의 크기를 Fig. 8, Fig. 9와 Fig. 10에 보였다. Fig. 8, Fig. 9에서 CMLC와 CMCS요소는 엄밀해와 거의 일치하는 결과를 보이고 IMLC요소와 IMIS요소는 상당한 오차를 보이고 있다.

5. 결론

곡선보를 보다 효율적으로 해석하기 위하여 Timoshenko보 이론에 근거한 새로운 곡선보 요소를 개발하였다. 본 논문에서는 개발된 곡선보 요소를 이용한 수치해석결과로부터, 반경방향의 변위를 굽힘변위와 전단 변위로 분리하고, Timochenko보 이론을 적용하여 전단변위를 굽힘변위로 투사시켜서 전단구속을 효과적으로 제거시킬 수 있음을 보였다. 또한 Babu와 Prathap^(10,11)이 제시한 방법인 축 변형률이 일정한 상수가 되도록 보간함수를 취하는 방법은 막강성에 대한 가성강성을 제거하기 위한 효과적인 방법이나 분할된 요소수가 적을 경우에는 계산오차 발생함을 확인하였다. 1/4원형링의 해석에서 엄밀해와의 오차를 5%이내로 줄이기 위해서는 적어도 5개 이상의 요소분할이 필요함을 제시할 수 있었다.

본 논문에서 제시한 굽힘변위와 전단변위의 분리에 의한 곡선보 요소는 전단응력에 대한 영향을 매우 효과적으로 다룰 수 있어서 적층 복합재료의 곡선보 해석에 매우 유용하게 이용될 수 있다.

부록

길이 L 인 곡선보에 대하여 Timoshenko 보이론을 적용하여 굽힘변위와 전단변위의 관계 행렬식을

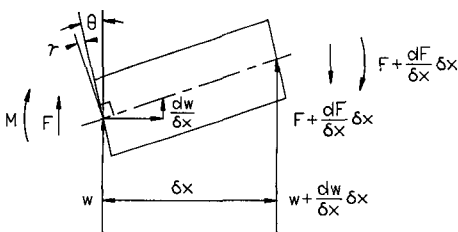


Fig. A Forces and displacements of infinitesimal element of beam

구한다. Fig. A와 같은 미소길이가 δx 인 보에서 전단각 γ 은 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma = \theta - w_{,x} \tag{A1}$$

그림 A로부터 정적 평형식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} dM/dx &= F ; \\ dF/dx &= q. \end{aligned} \tag{A2}$$

여기서 M 은 굽힘모멘트이고 F 는 전단력이며 q 는 분포력이다. 유한요소 수식의 전개를 위하여 분포력 q 는 영으로 가정한다.

식(6)과 식(7)로부터 곡선보에 대한 힘과 변위의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F &= kGA\gamma = kGA(\theta - w_{,x}) ; \\ M &= -EIx = -EI(\theta_{,x} - u_{,x}/R) \end{aligned} \tag{A3}$$

식(8)-(10)에 의하여 식(A3)은 굽힘변위 w^b 와 전단변위 w^s 로 표현한다.

굽힘변위 w^b 는 Hermite보간함수로 근사시킨다.

$$\begin{aligned} w^b(x) &= h_1^b(x) w_1^b \\ &+ h_2^b(x) \theta_1 + h_3^b(x) w_2^b + h_4^b(x) \theta_2 \end{aligned} \tag{A4}$$

여기서 보간함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1^b(x) &= (2x^3 - 3Lx^2 + L^3)/L^3 \\ h_2^b(x) &= (x^3 - 2Lx^2 + L^2x)/L^2 \\ h_3^b(x) &= -(2x^3 - 3Lx^2)/L^3 \\ h_4^b(x) &= (x^3 - Lx^2)/L^2 \end{aligned}$$

전단변위 w^s 는 다음과 선형 보간함수로 근사시킨다.

$$w^s(x) = h_1^s(x) w_1^s + h_2^s(x) w_2^s \tag{A5}$$

여기서 보간함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_1^s(x) &= (L-x)/L \\ h_2^s(x) &= x/L \end{aligned}$$

식(A3)에서 u 를 선형 보간함수로 근사시키면 $u_{,x}/R$ 항은 x 에 대하여 일정한 상수값으로 다음과 같이 표현된다.

$$u_{,x}/R = (u_2 - u_1)/LR \tag{A6}$$

식(A4)와 식(A5) 및 식(A6)를 식(A3)에 대입하고 식(A2)의 관계식으로 부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & -EI(12w_1^b + 6L\theta_1 - 12w_2^b + 6L\theta_2)/L^3 \\ & = kGA(-w_1^s + w_2^s)/L = F \end{aligned} \quad (A7)$$

식(A7)의 전단력 F 는 상수이므로, 요소 양단에서 전단 변위의 차는 일정한 상수값을 갖게된다. 이 전단변위를 요소의 중앙에서 0인 값을 갖도록 다음과 같이 취한다.

$$|w_1^s| = |w_2^s| \text{ and } w_1^s + w_2^s = 0 \quad (A8)$$

그러면 식(A7)은 다음과 같은 관계식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} w_1^s \\ w_2^s \end{bmatrix} = \frac{3EI}{kGAL^2} \begin{bmatrix} 2L & -2L \\ -2 & -L & 2 & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^b \\ \theta_1 \\ w_2^b \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (A9)$$

수식표현의 편리를 위하여 다음과 같은 T 행렬을 도입한다.

$$T = \frac{3EI}{kGAL^2} \begin{bmatrix} 2 & L & -2 & L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -L & 2 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A10)$$

절점에서의 굽힘 변위벡터 w^b 와 전단 변위 벡터 w^s 는 다음과 같이 정리한다.

$$w^b = [w_1^b, \theta_1, w_2^b, \theta_2] \quad (A11)$$

$$w^s = [w_1^s, 0, w_2^s, 0] \quad (A12)$$

그러면 w^s 와 w^b 는 다음과 같은 관계식으로 표현된다.

$$w^s = Tw^b \quad (A13)$$

참고문헌

- (1) Murray, K. H., 1966, "Comments on the Convergence of Finite Element Solution," *AIAA Journal*, Vol. 4, pp. 815~816.
- (2) Kikuchi, F. 1982, "Accuracy of Some Finite Element Models for arch Problems," *Computer Methods in Applied Mechanical Engineering*, Vol. 35, pp. 315~345.
- (3) Cantin, G. and Clough, R. W., 1986, "A Curved Cylindrical Shell, Finite Element," *AIAA Journal*, Vol. 6, pp. 1057~1062.
- (4) Pugh, E. O., Hinton, Z. and Zienkiewicz, O. C., 1978, "A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with 'Reduced Integration'," *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 12, pp. 1059~1079.
- (5) Stolarski, H. and Belytschko, T., 1981, "Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, pp. 172~178.
- (6) Noor, A. K. and Peters J. M., 1981, "Mixed Models and Reduced/Selective integration for curved elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 615~631.
- (7) Prathap, G. and Bhashyam, G. R., 1982, "Reduced Integration and Shear Flexible Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 195~210.
- (8) Ashwell, D. G. Sabir, A. B. and Roberts, T. M., 1971, "Further studies in the application of curved finite elements to circular arches," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 13, pp. 507~517.
- (9) 최종근, 임창근, 1991, 전단효과를 고려한 새로운 곡선보 요소, 대한기계학회논문집 제 15권, 제 5호, pp. 751~756.
- (10) Babu, C. R. and Prathap, G., 1986, "A Linear Thick Curved Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1313~1328.
- (11) Prathap, G. and Babu, C. R., 1986, "An isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1583~1600.
- (12) Huebner, K. H., 1975, *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons, New York, pp. 123~124.
- (13) Yang, T. Y., 1986, *Finite Element Structural Analysis*, pp. 115~116, pp. 191~192, Prentice-Hall.