大韓機械學會論文集 第17卷 第10號, pp. 2543~2554, 1993.

〈論 文〉

공간 복합기구연쇄의 기구학 및 동역학 해석에 관한 연구

김창부* · 김효식**

(1993년 4월 30일 접수)

A Study on the Kinematic and Dynamic Analyses of Spatial Complex Kinematic Chain

C. B. Kim and H. S. Kim

Key Words: Complex kinematic chain(복합기구연쇄), Branched chain(분기연쇄), Set of identification numbers(지수집합), Closed chain(폐형연쇄), Kinematic constraint(기구학적 구속), Iterative method(반복법), Pseudoinverse matrix(유사역행렬), Virtual work(가상일)

Abstract

In this paper, the kinematic and dynamic analyses of spatial complex kinematic chain are studied. Through the new method both using the set of identification numbers and applying the Denavit-Hartenberg link representation method to the spatial complex kinematic chain, the kinematic configuration of the chain is represented. Some link in the part of closed chain being fictitiously cutted, the complex kinematic chain is transformed to the branched chain. The kinematic constraint equations are derived from the constraint conditions which the cutted sections of the link have to satisfy. And the joint variables being partitioned in the independent joint variables and the dependent joint variables, the dependent variables are calculated from the independent variables by using the Newton-Raphson iterative method and the pseudoinverse matrix. The equations of motion are derived under the independent joint variables by using the principle of virtual work. Algorithms for dynamic analysis are presented and simulations are done to verify accuracy and efficiency of the algorithms.

1. 서 론

기계장치들은 서로 상대적인 운동이 가능한 다수의 링크로 구성되어 있는 기구연쇄로서, 링크들이 연결된 상태에 따라 개형 연쇄구조, 폐형 연쇄구조 또는 개형연쇄와 폐형연쇄가 혼합된 복합형 연쇄구조를 갖는다.

*정회원, 인하대학교 자동화공학과
**인하대학교 자동화공학과 대학원

기구연쇄의 기구학 및 동역학에 관한 연구는 기구연쇄를 구성하는 링크들의 연결관계와 관절의 종류를 고려해서 기구연쇄의 기구학적 구조를 정의하고, 기구연쇄가 만족해야 하는 기구학적 구속조건으로부터 기구학적 구속식을 유도하여 이에 관한 해법을 제시하는 기구학해석에 관한 연구와 링크들의 관성특성치와 작용력을 고려해서 기구연쇄의 운동방정식을 유도하여 이에 관한 해법을 제시하는 동역학 해석에 관한 연구로 구성된다.

이와같은 기구연쇄의 기구학 및 동역학 해석에

관한 연구로서 대표적인 연구들을 살펴보면 다음과 같다. 개형기구연쇄에 관한 연구로서, Bae와 Haug[1]는 그래프 이론을 이용하여 링크들의 연결관계를 규정하고 상대좌표를 사용하여 링크들의 위치와 방향을 표현하므로써 나무구조(tree structure)로 된 개형기구연쇄의 기구학적 구조를 정의하였으며, 기저링크에 부과되는 기구학적 구속조건으로부터 유도된 기구학적 구속식과 각각의 연쇄구조를 따라서 재귀정식화 과정을 수행하여 유도된 기저링크의 관절변수로 표현되는 운동방정식을 라그랑지 승수를 사용하여 미분대수방정식으로 정리하므로써 효율적으로 해석될 수 있는 개형기구연쇄의 지배방정식을 표현하였다. 또한 폐형기구연쇄 및 복합기구연쇄에 관한 연구로서, Haug[2]는 각각의 링크에 절대좌표를 할당하고 링크들이 만족해야 하는 기구학적 구속조건으로부터 유도된 기구학적 구속식과 가상일의 원리를 사용하여 유도된 운동방정식을 라그랑지 승수를 사용하여 미분대수방정식으로 정리하였으며, 이에 따른 체계적인 해법을 제시하였다. 한편, Luh와 Zheng[3]은 폐형연쇄상에 있는 임의의 관절을 가상적으로 절단하여 복합기구연쇄를 나무구조로 된 분기연쇄로 변환하고, 절단된 관절이 만족해야 하는 기구학적 구속조건으로부터 유도된 기구학적 구속식과 나무구조로 된 분기연쇄의 운동방정식을 이용하여 복합기구연쇄의 지배방정식을 표현하였다. 또한 라그랑지 승수를 사용하여 관절 작용력과 관절 작용모멘트를 표현하였으며 이에 따른 해법을 제시하였다.

본 논문에서는 복합기구연쇄의 폐형연쇄상에서 임의의 링크를 가상적으로 절단하여 기구연쇄를 나무구조로 된 분기연쇄로 변환하여, 링크들의 연결관계를 지수집합을 사용해서 표현하고, 데나비트-하텐베르그 강체 링크표기법[4]을 응용한 새로운 방법을 사용하여 링크의 좌표계를 정의하므로써, 기구연쇄가 임의의 구조를 갖는 경우에도 기구학적 구조를 용이하게 표현할 수 있는 방법을 제시한다. 또한, 절단된 링크들이 만족해야 하는 기구학적 구속조건으로부터 상대좌표 즉 관절변수로 표현되는 기구학적 구속식을 유도하는 방법과 관절변수를 독립 관절변수와 종속 관절변수로 분리하여 뉴톤-랩슨 반복법 및 유사역행렬을 사용하므로써 기구학적 구속식을 용이하게 해석할 수 있는 방법을 제시한다. 그리고 가상일의 원리를 이용하여 독립 관절변수로 표현되는 운동방정식을 유도하는 방법과 관절 작용력 및 관절 작용모멘트 그리고 관절 반력 및 관절 반모멘트를 용이하게 계산하는 방법을 제시하고, 이에 따른 정동역학 및 역동역학 해석을 위한 알고리즘을 제시한다. 제시된 알고리즘의 효율성과 정확성을 검증하기 위하여 모의실험을 수행하여 얻은 결과를 참고문헌의 결과와 비교, 검토한다.

2. 복합기구연쇄의 구조

Fig. 1의 개형연쇄와 폐형연쇄의 혼합형태를 갖는 복합기구연쇄의 폐형연쇄상에서 임의의 링크를 가상적으로 절단하면 복합기구연쇄는 Fig. 2의 나무구조로 된 분기연쇄로 변환된다. 분기연쇄에서는 두개의 인접한 링크는 1자유도를 갖는 한개의 관절로 연결되며, 링크를 기저링크 L_o에 가까운 링크인 선행링크와 연결하는 관절을 링크의 내부관절이라고 하고 기저링크에서 먼 링크인 후행링크와 연결하는 관절을 링크의 외부관절이라고 한다. 따라서 기저링크를 제외한 모든 링크는 오직 한개의 내부관절을 갖게 되므로 링크 L_i, $i=1$, NL의 번호

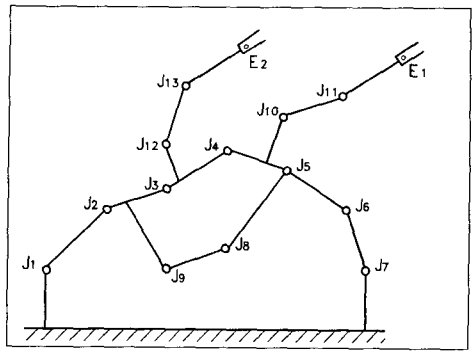

Fig. 1 Complex Kinematic diain

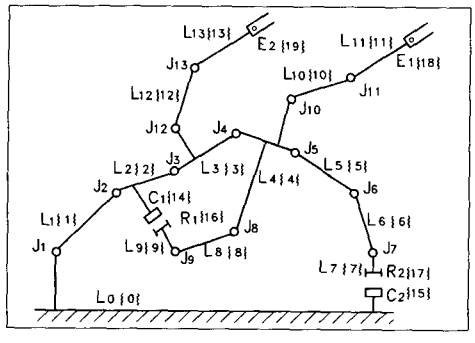

Fig. 2 Branched chain

는 내부관절 J_i, $i=1$, NJ의 번호와 일치시킨다. 그리고 가상적으로 절단된 링크의 절단부에서는 기저링크에 가까운 절단단면을 C_j, $j=1$, NR로 표시하고 먼쪽의 절단단면을 R_j, $j=1$, NR로 표시하며 엔드이펙터는 E_k, $k=1$, NE로 표시한다. 여기서 NL은 기저링크를 제외한 링크의 총갯수이며, NJ는 관절의 총갯수이고 NL과 같다. 또한, NR과 NE는 각각 절단부와 엔드이펙터의 총갯수를 나타낸다.

좌표계는 링크 좌표계, 절단단면 좌표계, 엔드이펙터 좌표계로 구분된다. 링크 좌표계 $\{i\}$, $i=0$, NL는 링크 L_i, $i=0$, NL에 순차적으로 할당되는 좌표계번호를 가지며, 절단단면 좌표계$\{i\}$, $i=NL+1$, $NL+2\times NR$는 최종 링크 좌표계의 번호에 이어서 절단단면 C_j, $j=1$, NR와 R_j, $j=1$, NR에 순차적으로 할당되는 좌표계번호를 가지고, 엔드이펙터 좌표계$\{i\}$, $i=NL+2\times NR+1$, $NL+2\times NR+NE$는 최종 절단단면 좌표계의 번호에 이어서 엔드이펙터 E_k, $k=1$, NE에 순차적으로 할당되는 좌표계번호를 갖는다.

직렬구조로 된 개형기구연쇄의 경우에는 링크의 연결관계를 용이하게 결정할 수 있다. 그러나 분기기구연쇄의 경우에는 링크의 연결관계를 직관적으로 결정하기 어려우므로 지수집합[5]을 사용하여 연결관계를 정의한다. 즉, 링크 L_i의 외부관절에 연결된 좌표계들을 정의하는 지수집합 μ_i은 다음과 같이 링크 좌표계, 절단단면 좌표계, 그리고 엔드이펙터 좌표계의 번호들의 집합으로 구성된다.

$$\mu_i=\{\bigcup_{j=1}^{NS_i+NR_iNE_i}+ij\} \tag{1}$$

상기식에서 ij는 링크 L_i의 j번째 외부관절에 연결된 좌표계의 번호이며, NS_i는 링크 L_i의 외부관절에 연결된 후행링크의 총갯수이고, NR_i와 NE_i는 각각 링크 L_i의 외부관절에 연결된 절단단면과 엔드이펙터의 총갯수를 나타낸다. 따라서 링크 L_i의 외부관절에 연결된 좌표계의 총갯수는

$$NF_i=NS_i+NR_i+NE_i \tag{2}$$

이며, Fig. 2의 분기연쇄에 대하여 링크의 지수집합은 다음과 같이 정의된다.

$\mu_0=\{1, 15\}$, $\mu_1=\{2\}$, $\mu_2=\{3, 14\}$, $\cdots$, $\mu_4=\{5, 8, 10\}$, $\cdots$, $\mu_7=\{17\}$, $\cdots$, $\mu_{13}=\{19\}$.

데나비트-하텐베르그 강체 링크표기법은 직렬구조로 된 개형기구연쇄를 구성하는 링크의 좌표계를 정의하기 위해서 가장 많이 이용되는 방법이지만 복합기구연쇄의 경우에는 직접적으로 적용되지 못하는 단점이 있다.[6] 그러나 폐형연쇄상에서 임의의 링크를 가상적으로 절단하여 복합기구연쇄를 분기연쇄로 변환한 후, 데나비트-하텐베르그 강체 링크표기법을 다음과 같이 응용하여 사용하므로써, 기구연쇄가 임의의 구조를 갖는 경우에도 링크의 좌표계를 용이하게 정의할 수 있다.

기저링크의 좌표계 $\{0\}$와 엔드이펙터의 좌표계 $\{E_k\}$는 z축이 임의의 방향을 갖도록 정의되고, 절단단면의 좌표계 $\{C_j\}$와 $\{R_j\}$는 절단단면이 연결되었을 때에 서로 일치하도록 정의된다. 또한, 링크의 좌표계는 연쇄구조를 따라서 순차적으로 Fig. 3에서 보는 바와 같이 정의되며 각각의 좌표계의 상대적인 위치와 방향은 Table 1에 주어진 링크매개변수를 사용하여 정의된다.

즉, 좌표계 $\{i\}=\{O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i\}$는

① $\vec{x}_i$를 $\vec{z}_i$와 $\vec{z}_{ij}$의 공통법선과 일치시키는 과정
: $Screw(z, \Psi_{ij}, c_{ij})$

② $\vec{z}_i$를 $\vec{z}_{ij}$와 일치시키는 과정 (3)
: $Screw(x, a_{ij}, \alpha_{ij})$

③ $\vec{x}_i$를 $\vec{x}_{ij}$와 일치시키는 과정
: $Screw(z, \theta_{ij}, d_{ij})$

을 통하여 좌표계 $\{ij\}=\{O_{ij}, \vec{x}_{ij}, \vec{y}_{ij}, \vec{z}_{ij}\}$로 변환되며 직렬구조로 된 개형기구연쇄의 경우에는 Ψ_{ij}, c_{ij}가 영의 값을 가지므로 ②와 ③의 과정만이 수행되어지나, 링크가 다수의 외부관절을 갖는 나무구조의 분기기구연쇄의 경우에는 ①의 과정이 추가적으로 사용되어 좌표계가 정의된다.

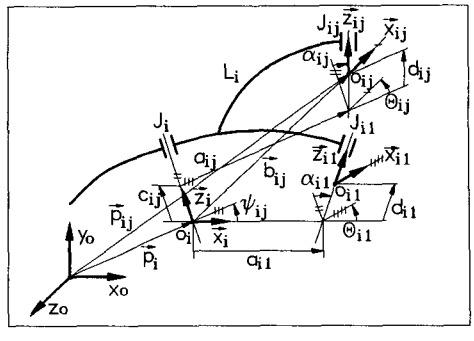

Fig. 3 Link coordinates systems and its parameters

Table 1 Link parameters

Parameter	Definition
Ψ_{ij}	Angle from the axis x_i to the common normal of axis z_i with axis z_{ij} measured along axis z_i ($\Psi_{i1}=0$)
c_{ij}	Distance from the axis x_i to the common normal of axis z_i with axis z_{ij} measured along axis z_i ($c_{i1}=0$)
a_{ij}	Distance from the axis z_i to the axis z_{ij} measured along axis x_i rotated with Ψ_{ij}
α_{ij}	Angle from the axis z_i to the axis z_{ij} measured along axis x_i rotated with Ψ_{ij}
θ_{ij}	Angle from the common normal of axis z_i with axis z_{ij} to the axis x_{ij} measured along axis z_{ij}
d_{ij}	Distance from the common normal of axis z_i with axis z_{ij} to the axis x_{ij} measured along axis z_{ij}
s_{ij}	Joint indicator with 0 in case of revolute joint, while 1 in case of prismatic joint ($\overline{s_{ij}}=1-s_{ij}$)

각각의 관절은 1자유도를 갖는 회전관절 또는 직진관절로 정의되며 1자유도 이상의 저차대우(구관절, 원통관절 등)는 회전관절과 직진관절로 분해된다. 회전관절에서는 θ_{ij}가 변수이고 직진관절에서는 d_{ij}가 변수이므로 관절변수 q_{ij}는 다음과 같이 표현된다.

$$q_{ij}=\overline{s_{ij}}\theta_{ij}+s_{ij}d_{ij} \tag{4}$$

여기서 $\overline{s_{ij}}$는 s_{ij}의 1에 대한 보수, 즉 $1-s_{ij}$이다.

3. 복합기구연쇄의 기구학

좌표계 $\{i\}$에 대한 좌표계 $\{ij\}$의 위치와 방향은 링크매개변수를 사용하여 4×4 동차변환행렬

$$^iT_{ij}=Screw(z,\ \Psi_{ij},\ c_{ij})\,Screw(x,\ a_{ij},\ \alpha_{ij})\,Screw(z,\ \theta_{ij},\ d_{ij}) \tag{5}$$

로 표현되며, 기저좌표계 $\{0\}$에 대한 좌표계 $\{ij\}$의 위치와 방향을 나타내는 동차변환행렬은 각각의 분기된 연쇄구조를 따라서 정의되는 동차변환행렬의 수차적인 곱

$$^oT_{ij}=^oT_i{}^iT_{ij} \tag{6}$$

으로 표현된다.

좌표계 $\{ij\}$의 속도 및 각속도와 가속도 및 각가속도는 다음과 같은 벡터식으로 표현되며

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{ij}&=\vec{v}_i+\vec{w}_i\times\vec{p}_{ij}+s_{ij}\dot{q}_{ij}\vec{z}_{ij}\\
\vec{w}_{ij}&=\vec{w}_i+s_{ij}\dot{q}_{ij}\vec{z}_{ij}\\
\dot{\vec{v}}_{ij}&=\dot{\vec{v}}_i+\dot{\vec{w}}_i\times\vec{p}_{ij}+\vec{w}_i\times(\vec{w}_i\times\vec{p}_{ij})\\
&\quad+2\vec{w}_i\times s_{ij}\dot{q}_{ij}\vec{z}_{ij}+s_{ij}\ddot{q}_{ij}\vec{z}_{ij}\\
\dot{\vec{w}}_{ij}&=\dot{\vec{w}}_i+\vec{w}_i\times\overline{s_{ij}}\,\dot{q}_{ij}\vec{z}_{ij}+\overline{s_{ij}}\,\ddot{q}_{ij}\vec{z}_{ij}
\end{aligned} \tag{7}$$

각각의 좌표계 $\{ij\}$에 대하여 속도행렬과 가속도행렬로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
^{ij}v&=^{ij}S^iv+{}^{ij}h\dot{q}_{ij}\\
^{ij}\dot{v}&=^{ij}S^i\dot{v}+{}^{ij}hq_{ij}+{}^{ij}\gamma
\end{aligned} \tag{8}$$

기저링크의 속도 및 각속도와 가속도 및 각가속도가 시간의 함수로 주어질 때, 좌표계 $\{i\}$의 속도행렬 및 가속도행렬과 관절변수행렬 $q=(q_1,\cdots,q_{NJ})^T$의 관계를 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned}
^iv&=^iD\ \dot{q}+{}^ib\\
^i\dot{v}&=^iD\ \ddot{q}+{}^ic
\end{aligned} \tag{9}$$

좌표계 $\{ij\}$의 속도행렬 및 가속도행렬과 관절변수 행렬의 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
^{ij}v&=^{ij}D\ \dot{q}+{}^{ij}b\\
^{ij}\dot{v}&=^{ij}D\ \ddot{q}+{}^{ij}c
\end{aligned} \tag{10}$$

폐형연쇄상에서 임의의 링크를 가상적으로 절단하여 분기연쇄로 변환하였을 때, 절단된 링크들은 실제로 연결되어 있는 단일링크이므로 서로 상대적인 운동이 없다. 따라서 절단단면 좌표계 $\{C_j\}$와 $\{R_j\}$는 기저좌표계에 대한 위치 및 방향, 속도 및 각속도와 가속도 및 각가속도가 일치해야 하므로 다음과 같은 기구학적 구속조건을 만족해야 한다.

$$^oT_{R_j}-{}^oT_{C_j}=0 \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
^ov_{R_j}-{}^ov_{C_j}&=0\\
^ow_{R_j}-{}^ow_{C_j}&=0
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
^o\dot{v}_{R_j}-{}^o\dot{v}_{C_j}&=0\\
^o\dot{w}_{R_j}-{}^o\dot{w}_{C_j}&=0
\end{aligned} \tag{13}$$

식(11)로부터 좌표계 $\{C_j\}$에 대한 좌표계 $\{R_j\}$의 위치와 방향은 다음과 같으므로

$$^{C_j}T_{R_j}=I_4 \tag{14}$$

위치 구속조건과 방향 구속조건은 각각 다음과 같이 표현된다.

$$^{j}p=\ ^{C_j}p_{R_j}=0$$
$$^{j}R=\ ^{C_j}R_{R_j}=I_3 \tag{15}$$

또한, 좌표계 $\{C_j\}$와 좌표계 $\{R_j\}$가 위치 및 방향 구속조건을 만족하면 식(12)의 속도 및 각속도 구속조건은 다음과 같이 표현되며

$$^{R_j}v-\ ^{C_j}v=0 \tag{16}$$

위치 및 방향 구속조건과 속도 및 각속도 구속조건을 만족하면 식(13)의 가속도 및 각가속도 구속조건은 다음과 같이 표현된다.

$$^{R_i}\dot{v}-\ ^{C_i}\dot{v}=0 \tag{17}$$

식(15)의 방향 구속조건은 9개의 구속조건으로 구성되나 좌표계 $\{C_j\}$에 대한 좌표계 $\{R_j\}$의 방향을 오일러 매개변수 중에서 3개의 매개변수 $e=(e_1, e_2, e_3)^T$를 사용하여 표현하면 3개의 독립된 구속조건으로 변환되므로 위치 및 방향 구속조건은 다음과 같은 6개의 구속식으로 표현된다.

$$^{j}\Phi(q)=\begin{Bmatrix}^{j}p(q)\\ ^{j}e(q)\end{Bmatrix}=0 \tag{18}$$

여기서 제 4의 매개변수 e_0로는 매개변수 구속조건을 만족하는 양의 값을 취한다.

또한, 식(14)의 속도 및 가속도행렬을 각각 식(16), 식(17)에 치환하여 속도 및 각속도 구속식과 가속도 및 각가속도 구속식을 표현하면 각각 다음과 같다.

$$^{j}J(q)\ \dot{q}=0 \tag{19}$$
$$^{j}J(q)\ \ddot{q}+\ ^{j}\gamma(q,\ \dot{q})=0 \tag{20}$$

4. 복합기구연쇄의 운동방정식

복합기구연쇄는 기저링크와 NL개의 링크로 구성되며 링크는 복합기구연쇄를 구성하는 최소단위이므로 링크의 운동방정식은 복합기구연쇄의 운동방정식의 기본식이 된다. 또한 복합기구연쇄는 링크를 가상적으로 절단하여 분기연쇄로 변환되므로, 복합기구연쇄의 미분 대수방정식은 각각의 링크의 운동방정식을 결합하여 구한 분기연쇄의 운동방정식과 가상적인 절단에 의한 기구학적 구속식으로 구성된다. 그리고 기구학적 구속식에서 관절변수는 독립 관절변수와 종속 관절변수로 분리되므로, 복합기구연쇄의 미분 대수방정식은 독립 관절변수에 관한 축소운동방정식으로 표현된다.

4.1 링크의 운동방정식

링크에 작용하는 외력은 체력과 표면력으로 구성된다. 체력으로는 중력만을 고려하며, 표면력은 인접한 링크의 관절에 작용하는 관절력, 절단단면에 작용하는 반력 및 엔드이펙터에 작용하는 외력으로 구성된다. Fig. 4에서 $\vec{g}$는 중력가속도이며, $\vec{f}_{ij}$와 $\vec{m}_{ij}$는 링크 L_i가 관절 J_{ij}에서 링크 L_{ij}에 작용하는 힘의 합력과 O_{ij}점에 대한 합모멘트를 나타내고, 링크 L_{ij}가 절단단면 또는 엔드이펙터일 경우에는 링크 L_i가 절단단면 또는 엔드이펙터에서 분기연쇄의 외부로 작용하는 힘의 합력과 O_{ij}점에 대한 합모멘트를 나타낸다. 따라서 관절 J_i에 작용하는 힘의 합력과 합모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{f}_i=s_i\tau_i\vec{z}_i+\vec{f}_i^R$$
$$\vec{m}_i=\bar{s}_i\tau_i\vec{z}_i+\vec{m}_i^R \tag{21}$$

여기서 τ_i는 관절 J_i에 작용하는 관절 작용력 또는 관절 작용모멘트이고 $\vec{f}_i^R$과 $\vec{m}_i^R$은 각각 관절 J_i에 작용하는 관절 반력과 관절 반모멘트이다.

링크 L_i의 가상변위 $\delta^i u$에 대한 링크의 변분식은 다음과 같이 표현되며

$$\delta A^i=\delta W_G^i+\delta W_S^i,\ \forall\delta^i u \tag{22}$$

δA^i, δW_G^i, δW_S^i는 각각 링크 L_i에 작용하는 관성력, 중력 그리고 표면력에 의한 가상일이다. 각각의 가상일은 힘과 가상변위의 곱으로 정의되므로 가상변위를 소거하여 링크의 운동 방정식을 구하면

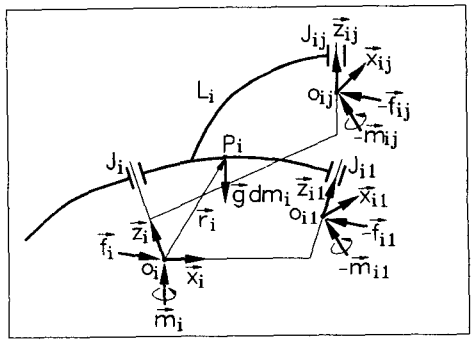

Fig. 4 Forces and moments on link Li

다음과 같다.

$$ {}^{i}M^{i}\dot{v}+{}^{i}f_{C}={}^{i}f_{G}+{}^{i}f_{J}-\sum_{j=1}^{NF_i}{}^{ij}S^{Tij}f_{J} \tag{23}$$

상기식으로부터 관절 J_i에 작용하는 관절력 ${}^{i}f_{J}$은 다음과 같이 계산되며

$$ {}^{i}f_{J}=\sum_{j=1}^{NF_i}{}^{ij}S^{Tij}f_{J}-{}^{i}f_{C}+{}^{i}M^{i}\dot{v}+{}^{i}f_{C} \tag{24}$$

식(21)을 사용하여 관절 J_i에 작용하는 관절 반력 ${}^{i}ff^{R}$을 표현하면 다음과 같다.

$$ {}^{i}ff^{R}={}^{i}f_{J}-{}^{i}h\tau_{i} \tag{25}$$

4.2 분기연쇄의 운동방정식

분기연쇄에 작용하는 힘을 외력과 내력으로 구분하면, 외력은 중력과 가상적으로 절단된 링크의 절단단면 C_j에 작용하는 외력의 합력 및 C_j점에 대한 합모멘트와 이에 대응하는 절단단면 R_j에 작용하는 외력의 합력 및 R_j점에 대한 합모멘트, 그리고 엔드이펙터에 작용하는 외력의 합력 및 E_k점에 대한 합모멘트들로 구성되며, 내력은 식(21)로 표현되는 각각의 관절에 작용하는 합력과 합모멘트로서, 관절 반력 및 관절 반모멘트는 다음의 식을 만족한다.

$$ \begin{matrix} {}^{s_i}\vec{z}_i \cdot \vec{f}_i^{\,R}=0 \\ {}^{s_i}\vec{z}_i \cdot \vec{m}_i^{\,R}=0 \end{matrix}, \quad i=1,\ NL \tag{26}$$

분기연쇄에서는 가상변위 $\delta^{i}u$는 자코비안 ${}^{i}D$을 이용하여 관절변수의 가상변위 δq에 대한 선형식으로 표현될 수 있으므로 분기연쇄의 변분식은 δq에 대하여 다음과 같이 표현된다.

$$ \delta A=\delta W_G+\delta W_S,\ \forall \delta q \tag{27}$$

여기서 $\delta A=\sum_{i=0}^{NL}\delta A^{i}$

$\delta W_G=\sum_{i=0}^{NL}\delta W^{i}{}_{G}$

$\delta W_S=\sum_{i=0}^{NL}\delta W^{i}{}_{S}$

상기식에서 표면력에 의한 가상일 δW_S을 관절력에 의한 가상일 δW_J, 링크의 가상적인 절단으로 인한 절단단면에서의 반력에 의한 가상일 δW_R, 그리고 엔드이펙터에 작용하는 외력에 의한 가상일 δW_E로 분해하면 식(27)의 변분식은 다음과 같으며

$$ \delta A=\delta W_G+\delta W_J+\delta W_R+\delta W_E,\ \forall \delta q \tag{28}$$

각각의 가상일로부터 δq를 소거하여 분기연쇄의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$ M\ddot{q}+f_C=f_G+\tau+\sum_{j=1}^{NE}\{{}^{Cj}D^{T}\ {}^{Cj}f_J+{}^{Rj}D^{T}\ {}^{Rj}f_J\}+\sum_{k=1}^{NE}{}^{Ek}D^{T}\ {}^{Ek}f_J \tag{29}$$

4.3 미분 대수방정식

복합기구연쇄는 가상적으로 절단된 링크로 인해서 3장에서 기술한 기구학적 구속조건을 만족해야 하며, 이에 대응되는 반력의 구속조건은 가상적으로 절단된 링크의 절단단면 C_j와 R_j가 절단부에서 서로 같은 크기의 작용과 반작용의 힘을 주고 받으므로 다음과 같이 표현된다.

$$ {}^{Cj}f_J=-{}^{Rj}f_J \tag{30}$$

상기식을 식(29)의 운동방정식에 대입하고, 식(18), 식(19), 식(20)의 기구학적 구속식을 고려하면 다음과 같은 복합기구연쇄의 미분 대수방정식이 구해지며

$$ \begin{aligned} M\ddot{q}+f_C&=f_G+\tau+\sum_{j=1}^{NE}\{{}^{Cj}D^{T}\ {}^{Cj}f_J+{}^{Rj}D^{T}\ {}^{Rj}f_J\}+\sum_{k=1}^{NE}{}^{Ek}D^{T}\ {}^{Ek}f_J \\ {}^{j}\Phi &=0 \\ {}^{j}J\dot{q} &=0,\quad j=1,\ NR \\ {}^{j}J\ddot{q}+{}^{j}\gamma &=0 \end{aligned} \tag{31}$$

가상적으로 절단된 링크의 총갯수와 엔드이펙터의 총갯수를 고려하여 상기식을 정리하여 표현하면 다음과 같다.

$$ \begin{aligned} M\ddot{q}+f_C &=f_G+\tau+J_R^{T}f_R+D_E^{T}f_E \\ \Phi_R &=0 \\ J_R\dot{q} &=0 \\ J_R\ddot{q}+\gamma_R &=0 \end{aligned} \tag{32}$$

또한, 관절변수 q를 독립 관절변수 q_v와 종속 관절변수 q_w로 분리하여, 선형변환행렬 L_v, L_w를 이용해서 표현하면 다음과 같으며

$$ q=L_vq_v+L_wq_w \tag{33}$$

상기식을 이용하면 식(31)로부터 다음과 같은 복합기구연쇄의 변수분리된 미분 대수방정식이 얻어진다.

$$ M_{vv}\ddot{q}_v+M_{vw}\ddot{q}_w+f_{Cv}=f_{Gv}+\tau_v+J_v^{T}f_R+D_v^{T}f_E \tag{34}$$

$$M_{wv}\ddot{q}_v+M_{ww}\ddot{q}_w+f_{Cw}$$
$$=f_{Gw}+\tau_w+J_w^T f_R+D_w^T f_E \quad (35)$$
$$\Phi_R(q_v, q_w)=0 \quad (36)$$
$$J_v\dot{q}_v+J_w\dot{q}_w=0 \quad (37)$$
$$J_v\ddot{q}_v+J_w\ddot{q}_w+\gamma_R=0 \quad (38)$$

4.4 축소운동방정식

복합기구연쇄의 독립 관절변수의 궤적 q_v, $\dot{q}_v$, $\ddot{q}_v$가 주어질 때, 뉴톤-랩슨 반복 수치해법을 사용하여 식(36)를 만족하는 q_w를 계산한 후, 식(37), 식(38)로부터 $\dot{q}_w$, $\ddot{q}_w$를 계산하면 식(36), 식(37), 식(38)은 다음과 같이 표현된다.

$$q_w : \Phi_R(q_v, q_w)=0 \quad (39)$$
$$\dot{q}_w=-J_w^+ J_v\dot{q}_v \quad (40)$$
$$\ddot{q}_w=-J_w^+(J_v\ddot{q}_v+\gamma_R) \quad (41)$$

여기서, J_w^+는 J_w의 유사 역행렬[7]로서 다음과 같이 정의되며

$$J_w^+=[J_w^T J_w]^{-1}J_w^T \quad (42)$$

$[J_w^T J_w]^{-1}$은 특이위치 근처에서도 정의될 수 있도록 하기 위해서 특이치분해방법[7]을 사용하여 계산된다.

식(39), 식(40), 식(41)을 이용하면 독립 관절변수의 가상변위 δq_v에 대한 다음과 같은 독립 관절변수로 표현되는 변분식이 구해지며

$$\delta A=\delta W_G+\delta W_I+\delta W_R+\delta W_E, \ \forall \delta q_v \quad (43)$$

각각의 가상일로부터 δq_v를 소거하여, 복합기구연쇄의 축소운동방정식을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{M}\ddot{q}_v+\hat{f}_C=\hat{f}_G+\tau_v+\hat{\tau}_w+\hat{D}_E f_E \quad (44)$$

또한, 가상적으로 절단된 링크의 절단단면에 작용하는 반력 f_R은 식(35)로부터 다음과 같이 표현되며

$$f_R=J_w^{+T}(M_{wv}\ddot{q}_v+M_{ww}\ddot{q}_w+f_{Cw}$$
$$-f_{Gw}-\tau_w-D_w^T f_E) \quad (45)$$

각각의 관절에 작용하는 관절 반력 ${}^i f_i^R$은 분기연쇄구조에 따라서 식(25)를 후향반복하여 계산된다.

5. 동역학 해석 알고리즘

동역학 해석은 정동역학 해석과 역동역학 해석으로 구분된다. 정동역학 해석은 복합기구 연쇄에 외력 및 관절력이 작용했을 때의 결과적인 운동을 구하는 문제로서, 촉소운동방정식(44)에서 얻어진 미분방정식(46)을 주어진 시간구간에 대하여 수치적분하는 과정중에 식(47)를 계산하는 기구학 해석과정을 반복적으로 수행함으로써 관절변수의 변위, 속도 및 가속도를 계산한다.

$$\ddot{q}_v=F(t, q_v, \dot{q}_v,$$
$$\tau_v, \tau_w, f_E, T_o, v_o, \dot{v}_o) \quad (46)$$
$$q_w : \Phi_R(q_v, q_w)=0$$
$$\dot{q}_w=-J_w^{+T}J_v\dot{q}_v \quad (47)$$

역동역학 해석은 복합기구연쇄가 특정한 운동을 하기 위해서 작용해야 할 관절력을 계산하는 문제로서, 시간의 함수로 주어진 독립 관절변수에 대하여 식(49)를 만족하는 종속 관절변수를 계산하는 기구학 해석과정을 수행하여 축소운동방정식(44)에서 얻어진 식(48)으로부터 독립관절 작용력 τ_v를 계산한다.

$$\tau_v=G(t, q_v, \dot{q}_v, \ddot{q}_v,$$
$$\tau_w, f_E, T_o, v_o, \dot{v}_o) \quad (48)$$
$$q_w : \Phi_R(q_v, q_w)=0$$
$$\dot{q}_w=-J_w^{+T}J_v\dot{q}_v$$
$$\ddot{q}_w=-J_w^{+T}(J_v\ddot{q}_v+\gamma_R) \quad (49)$$

상기식에서 T_o, v_o, $\dot{v}_o$는 관성좌표계에 대한 기저링크의 동차변환행렬, 속도행렬, 가속도행렬을 나타낸다.

6. 모의실험

모의실험 1에서는 Fig. 5와 같은 평면운동을 하는 신속귀환기구(quick-return mechanism)의 기구

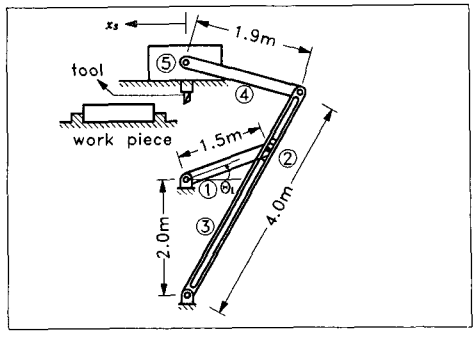

Fig. 5 Planar quick-return mechanism

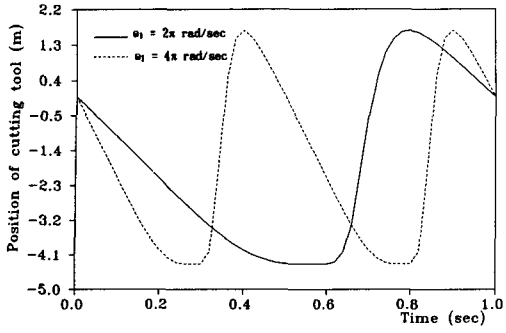

Fig. 6 Position of slider

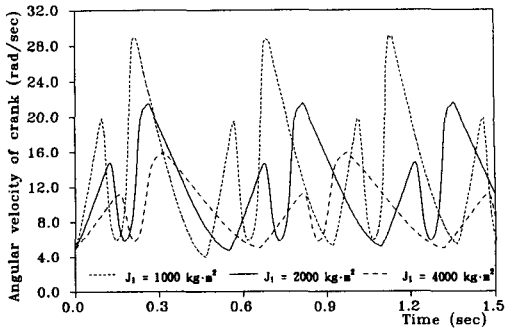

Fig. 7 Angular velocity of crank

학 및 정동역학 해석을 수행하였다. 기구의 행정은 슬라이더에 부착된 절삭공구가 우측에서 좌측으로 이동하면서 공작물을 절삭하는 절삭행정과 좌측에서 우측으로 보다 신속히 이동하는 귀환행정으로 구성된다. 로커암 ③과 기저링크를 연결하는 회전관절의 기저링크측과 슬라이더 ⑤와 기저링크를 연결하는 직진관절의 기저링크측을 각각 절단하여 신속귀환기구를 분기연쇄로 변환하고, 시간에 따른 크랭크의 회전각 $\theta_1=0.44+w_1t$이고 각속도 w_1가 각각 2π rad/sec, 4π rad/sec일 때, 슬라이더의 위치 x_S를 계산한 기구학 해석결과가 Fig. 6에 주어졌다. 또한, 절삭행정동안 공작물이 절삭공구에 작용하는 절삭력 P_S이 슬라이더의 위치 x_S에 따라 다음과 같이 주어지고

$$P_S=\begin{cases}0 & N,\ x_S<-4.0\,\text{m 또는 } x_S>1.2\,\text{m}\\ 200{,}000N, & -4.0\,\text{m}\le x_S\le 1.2\,\text{m}\end{cases} \tag{50}$$

크랭크의 극관성모멘트 J_1가 각각 1000 kgm², 2000 kgm², 3000 kgm²일 때, Table 2에 주어진 관성특성치를 사용하고 외력으로는 중력과 크랭크에 작용하는 구동토크 $\tau_1=165{,}521$ Nm만을 고려하여 크랭크의 각속도를 계산한 정동역학 해석결과가 Fig. 7에 주어졌다. 모의실험의 수행결과는 참고문헌[2]의 결과와 일치하며, 특히 크랭크의 극관성 모멘트가 커짐에 따라서 크랭크의 각속도의 변화량이 작아진다는 사실을 Fig. 7에 주어진 각속도 해석결과로부터 확인할 수 있었다.

모의실험 2에서는 Fig. 8에 주어진 수평 오프셋 길이가 0.1 m, 수직 오프셋길이가 0.12 m인 공간 오프셋 슬라이더 크랭크 기구의 기구학 및 역동역학 해석을 수행하였다. Fig. 5에서 기저링크와 크

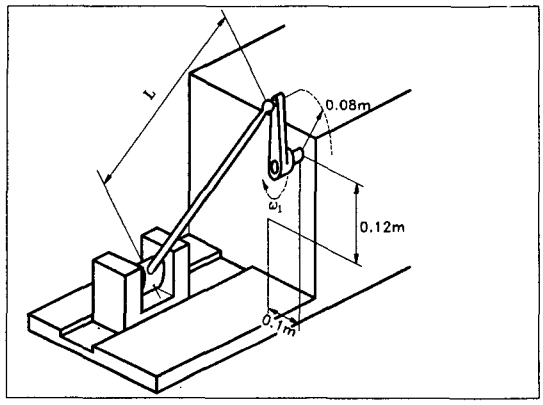

Fig. 8 Spatial slider-crank mechanism

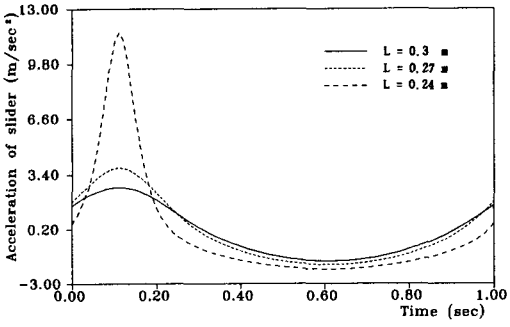

Fig. 9 Acceleration of slider

랭크를 연결하는 관절은 1자유도의 회전관절(R)이며 크랭크와 커넥팅로드를 연결하는 관절은 3자유도의 구관절(S)이다. 또한 커넥팅로드와 슬라이더를 연결하는 관절은 2개의 회전관절(R)로 구성되며 슬라이더와 기저링크는 1자유도의 직진관절(P)로 구성되므로 슬라이더 크랭크 기구는 RRRRRR-P 기구로 모델링된다. 슬라이더와 기저링크를 연

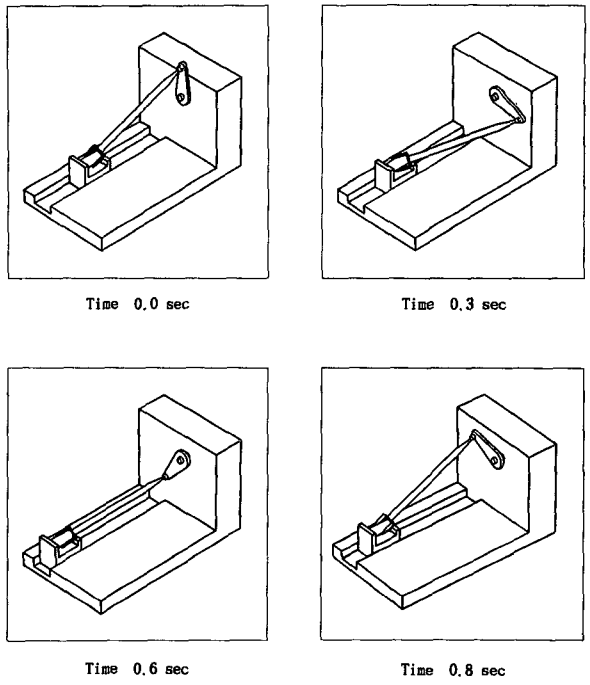

Fig. 10 Pictures during animation

결하는 직진관절의 기저링크측을 절단하여 슬라이더 크랭크 기구를 분기연쇄로 변환하고, 크랭크의 각속도 w_1를 2π rad/sec로 하고 커넥팅로드의 길이 L가 각각 0.24 m, 0.27 m, 0.3 m일때, 슬라이더의 가속도를 계산한 기구학 해석결과가 Fig. 9에 주어졌다. 그리고 길이가 0.3 m인 경우에 대하여 현재 개발중인 애니메이션 프로그램을 사용하여 그린 그림중에서 시간이 0.0초, 0.3초, 0.6초, 0.8초일 때의 그림이 Fig. 10에 주어졌다. 또한, Table 3에 주어진 관성특성치를 사용하고 외력으로는 중력만을 고려하여 구동토크를 계산한 역동역학 해석결과가 Fig. 11에 주어졌다. 모의실험의 수행결과는 참고문헌[2]의 결과와 일치하며, 특히 커넥팅로드의 길이가 0.24 m일 경우 Fig. 9에 주어진 가속도 해석결과로부터 가속도가 0.11초에서 매우 높은 피크를 형성하며 따라서 특이구조에 가까움을 알 수 있다.

Table 2와 Table 3에 주어진 관성특성치는 링크의 질량중심에 대하여 계산된 값이며, 질량중심의 위치는 링크의 중간에 위치하나 크랭크의 질량중심

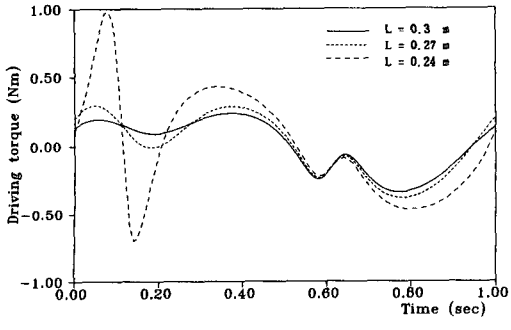

Fig. 11 Driving torque

Table 2 Characteristic values of inertia

Link		Mass[kg]	Moment of inertia[kg · m²]
Crank	①	1000.0	2000.0
Coupler	②	5.0	0.5
Rocker-arm	③	100.0	100.0
Coupler	④	30.0	10.0
Slider	⑤	50.0	1.5

Table 3 Characteristic values of inertia

Link	Mass	$I_{x'x'}$	$I_{y'y'}$	$I_{z'z'}$
Crank	0.12	0.0001	0.00001	0.0001
Connecting rod	0.5	0.004	0.0004	0.004
Slider	2.0	0.0001	0.0001	0.0001

Unit : Mass[kg], Moment of inertia[kg · m²]

의 위치는 크랭크의 회전축상에 위치한다.

7. 결 론

본 연구를 통하여 얻어진 결론은 다음과 같다.

(1) 임의의 연결구조를 갖는 기구연쇄의 기구학적 구조를 표현하기 위하여 지수집합과 데나비트-하텐베르그 강체 링크표기법을 응용한 새로운 방법을 개발하므로써, 링크가 다수의 외부관절을 갖는 나무구조의 분기기구연쇄의 경우 및 폐형연쇄를 갖는 복합기구연쇄의 경우에도 좌표계를 체계적으로 용이하게 정의할 수 있었다.

(2) 복합기구연쇄의 폐형연쇄상에서 가상적으로 절단된 링크들이 만족해야 하는 구속조건으로부터 기구학적 구속식을 유도하였으며, 관절변수를 독립관절변수와 종속 관절변수로 분리하여 뉴톤-랩슨 반복법 및 유사역행렬을 사용하므로써 구속식을 용이하게 해석할 수 있었고, 가상일의 원리를 이용하여 복합기구연쇄의 운동방정식을 유도하고 독립 관절변수에 관한 축소운동방정식으로 표현하였다. 또한 Table 4에서 보는 바와 같이 상대좌표, 즉 관절변수를 사용하므로써 절대좌표를 사용하는 경우에 비하여 기구학 해석시에 계산해야할 구속식의 수를 상당히 줄일 수 있었으며, 동역학 해석시에는 축소운동방정식을 사용하여 자유도수와 같은 갯수의 식을 계산하므로써 동역학 해석을 효율적으로 수행할 수 있었다.

(3) 모의실험의 결과를 참고문헌의 결과와 비교하므로써 알고리즘의 정확성을 확인할 수 있었으며, 후처리부로서 애니메이션 프로그램을 사용하여 영상처리하므로써 복합기구연쇄의 운동궤적을 보다 용이하게 파악할 수 있었다.

Table 4 Comparison between absolute coordinates and relative coordinates

Coordinates	Planar quick-return mechanism		Spatial slider-crank mechanism	
	NC	NE	NC	NE
Absolute[2]	18	17	28	27
Relative	7	6	7	6

NC : Number of generalized coordinates
NE : Number of constraint equations

후 기

본 연구는 1992년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

부 록

Screw : 나사변환행렬

$$Screw(z,\theta,d)=\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Screw(x,\alpha,a)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{a}_i$: 벡터 $\vec{a}=[a_x, a_y, a_z]^T$의 교대대칭행렬

$$\tilde{a}_i=\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

${}^iv$: 좌표계 $\{i\}$의 속도행렬

$${}_iv=\begin{Bmatrix} {}^iv_i \\ {}^iw_i \end{Bmatrix}$$

${}^i\dot{v}$: 좌표계 $\{i\}$의 가속도행렬

$${}^i\dot{v}=\begin{Bmatrix} {}^i\dot{v}_i \\ {}^i\dot{w}_i \end{Bmatrix}$$

${}^iT_{ij}$: 좌표계 $\{ij\}$의 좌표계 $\{i\}$에 대한 동차변환행렬

$${}^iT_{ij}=\begin{bmatrix} {}^iR_{ij} & {}^ip_{ij} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

${}^{ij}S$: 좌표계 $\{ij\}$의 좌표계 $\{i\}$에 대한 운동변환행렬

$${}^{ij}S=\begin{bmatrix} {}^{i}R_{ij}^{T} & -{}^{i}R_{ij}^{T}\,{}^{i}\tilde{p}_{ij} \\ 0 & {}^{i}R_{ij}^{T} \end{bmatrix}$$

${}^{ij}h$: 관절 J_{ij}의 관절축행렬

$${}^{ij}h=\begin{Bmatrix} s_{ij} & {}^{ij}z_{ij} \\ s_{ij}\,{}^{ij}z_{ij} \end{Bmatrix}$$

${}^{ij}\gamma$: 좌표계 $\{ij\}$의 바이어스 가속도행렬

$${}^{ij}\gamma=\begin{Bmatrix} {}^{i}R_{ij}^{T}(-{}^{i}\tilde{w}_{i}\,{}^{i}\tilde{p}_{ij}\,{}^{i}w_{i}+2\,{}^{i}\tilde{w}_{i}\,s_{ij}\,\dot{q}_{ij}\,{}^{i}z_{ij}) \\ {}^{i}R_{ij}^{T}\,{}^{i}\tilde{w}_{i}\,\widetilde{s_{ij}}\,\dot{q}_{ij}\,{}^{i}z_{ij} \end{Bmatrix}$$

${}^{i}D$: 좌표계 $\{i\}$의 자코비안행렬

$${}^{i}D=[{}^{1}d_{i},\ \cdots,\ {}^{i}d_{i},\ 0,\ \cdots,\ 0]$$

$${}^{ij}D=[{}^{ij}S\ {}^{1}d_{i},\ \cdots,\ {}^{ij}S\ {}^{i}d_{i},\ 0,\ \cdots,\ {}^{ij}h,\ 0,\ \cdots] \quad \text{if } j\leq NS_{i}$$

$${}^{ij}D=[{}^{ij}S\ {}^{1}d_{i},\ \cdots,\ {}^{ij}S\ {}^{i}d_{i},\ 0,\ \cdots,\ 0] \quad \text{if } j>NS_{i}$$

${}^{i}b$: 좌표계 $\{i\}$로 전파된 기저좌표계의 속도행렬

$${}^{i}b=[{}^{i}B]\{{}^{o}v\}$$

여기서 ${}^{o}b=\{{}^{o}v\}$, ${}^{i}B=\begin{bmatrix} {}^{o}R_{i}^{T} & -{}^{o}R_{i}^{T}\,{}^{o}\tilde{p}_{i} \\ 0 & {}^{o}R_{i}^{T} \end{bmatrix}$

$${}^{ij}b=[{}^{ij}S][{}^{i}B]\{{}^{o}v\}=[{}^{ij}B]\{{}^{o}v\}$$

${}^{i}c$: 좌표계 $\{i\}$로 전파된 전이 바이어스 가속도행렬

$${}^{i}c=[{}^{i}C]\{{}^{o}\dot{v}\}+\{{}^{i}a\}$$

여기서 ${}^{o}c=\{{}^{o}\dot{v}\}$, ${}^{o}C=I_{6}$, ${}^{o}a=0$

$${}^{ij}c=[{}^{ij}C]\{{}^{o}\dot{v}\}+\{{}^{ij}a\}$$

여기서 ${}^{ij}C=[{}^{ij}S][{}^{i}C]$, ${}^{ij}a=[{}^{ij}S]\{{}^{i}a\}+\{{}^{ij}\gamma\}$

${}^{j}e$: j번째 구속에 관한 오일러 매개변수행렬

$${}^{j}e=({}^{j}e_{1},\ {}^{j}e_{2},\ {}^{j}e_{3})^{T}$$

여기서 $${}^{j}e_{1}=\frac{1}{4e_{o}}(r_{32}-r_{23})$$

$${}^{j}e_{2}=\frac{1}{4e_{o}}(r_{13}-r_{31})$$

$${}^{j}e_{3}=\frac{1}{4e_{o}}(r_{21}-r_{12})$$

$${}^{j}e_{o}=\frac{1}{2}\sqrt{1+Tr({}^{j}R)}$$

${}^{j}J$: j번째 구속에 관한 자코비안행렬

$${}^{j}J=[{}^{Rj}D-{}^{Cj}D]$$

${}^{j}\gamma$: j번째 구속에 관한 전이가속도행렬

$${}^{j}\gamma=\{{}^{Rj}C-{}^{Cj}C\}$$

${}^{i}M$: 링크 L_{i}의 관성행렬

$${}^{i}M=\begin{bmatrix} m_{i}I_{3} & -m_{i}^{i}\tilde{r}_{i} \\ m_{i}{}^{i}\tilde{r}_{i} & {}^{i}I_{i} \end{bmatrix}$$

${}^{i}f_{C}$: 링크 L_{i}에 작용하는 코리오리스력과 원심력행렬

$${}^{i}f_{C}=\begin{Bmatrix} -{}^{i}\tilde{w}_{i}\ m_{i}\ {}^{i}\tilde{\tilde{r}}_{i}\ {}^{i}w_{i} \\ {}^{i}\tilde{w}_{i}\ {}^{i}I_{i}\ {}^{i}w_{i} \end{Bmatrix}$$

${}^{i}f_{G}$: 링크 L_{i}에 작용하는 증력행렬

$${}^{i}f_{G}=\begin{Bmatrix} m_{i}\,{}^{o}R_{i}^{T}\,{}^{o}g \\ m_{i}\,{}^{i}\tilde{\tilde{r}}_{i}\,{}^{o}R_{i}^{T}\,{}^{o}g \end{Bmatrix}$$

${}^{i}f_{J}$: 관절 J_{i}에 작용하는 관절력행렬

$${}^{i}f_{J}=\begin{Bmatrix} {}^{i}f_{i} \\ {}^{i}m_{i} \end{Bmatrix}$$

M : 복합기구연쇄의 관성행렬

$$M=[\sum_{i=1}^{NL}{}^{i}D^{Ti}M^{i}D]$$

f_{C} : 복합기구연쇄에 작용하는 코리오리스력과 원심력행렬

$$f_{C}=\sum_{i=1}^{NL}\{{}^{i}D^{Ti}M_{C}^{i}+{}^{i}D^{Ti}f_{C}\}$$

f_{G} : 복합기구연쇄에 작용하는 중력행렬

$$f_{G}=\sum_{i=1}^{NL}\{{}^{i}D^{Ti}f_{G}\}$$

τ : 복합기구연쇄의 관절 작용력행렬

$$\tau=(\tau_{1},\ \cdots,\ \tau_{k},\ \cdots,\ \tau_{NJ})^{T}$$

$$=\sum_{i=1}^{NJ}[0,\ \cdots,\ {}^{k}h,\ \cdots 0]^{T}\{{}^{k}f_{J}\}$$

Φ_{R} : 위치 및 방향 구속행렬

$$\Phi_{R}=({}^{1}\Phi^{T},\ \cdots,\ {}^{NR}\Phi^{T})^{T}$$

J_{R} : 구속 자코비안행렬

$$J_{R}=[{}^{1}J^{T},\ \cdots,\ {}^{NR}J^{T}]^{T}$$

γ_{R} : 구속 전이가속도행렬

$$\gamma_{R}=({}^{1}\gamma^{T},\ \cdots,\ {}^{NR}\gamma^{T})^{T}$$

f_{R} : 절단단면에 작용하는 반력행렬

$$f_{R}=({}^{R1}f_{J}^{T},\ \cdots,\ {}^{RNR}f_{J}^{T})^{T}$$

f_{E} : 엔드이펙터에 작용하는 외력행렬

$$f_{E}=({}^{E1}f_{J}^{T},\ \cdots,\ {}^{ENE}f_{J}^{T})^{T}$$

D_{E} : 엔드이펙터 좌표계의 자코비안행렬

$$D_{E}=[{}^{E1}D^{T},\ \cdots,\ {}^{EN}{}_{E}D^{T}]^{T}$$

$\hat{M}$: 축소 질량행렬

$$\hat{M}=[M_{vv}-M_{vw}J_{w}^{+}J_{v}-J_{v}^{T}J_{w}^{+T}M_{wv}+J_{v}^{T}J_{w}^{+T}M_{ww}J_{w}^{+}J_{v}]$$

$\hat{f}_{C}$: 축소 코리오리스력과 원심력행렬

$$\hat{f}_{C}=\{f_{Cv}-J_{v}^{T}J_{w}^{+T}f_{Cw}-M_{vw}J_{w}^{+}\gamma_{R}+J_{v}^{T}J_{w}^{+T}M_{ww}J_{w}^{+}\gamma_{R}\}$$

$\hat{f}_{G}$: 축소 중력행렬

$$\hat{f}_{G}=\{f_{Gv}-J_{v}^{T}J_{w}^{+T}f_{Gw}\}$$

$\hat{\tau}_{w}$: 축소 종속관절 작용력행렬

$$\hat{\tau}_{w}=\{-J_{v}^{T}J_{w}^{+T}\tau_{w}\}$$

τ_{v} : 독립관절 작용력행렬

$\hat{D}_E$: 엔드이펙터 좌표계의 축소자코비안행렬
$\hat{D}_E=[D_v^T-J_v^TJ_w^{+T}D_w^T]$

참고문헌

(1) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I. Open Loop Systems," Mech. Struct. & Mach., 15(3), pp. 359~382.

(2) Haug, E. J., 1989, "Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume I: Basic Methods," Allyn and Bacon.

(3) Luh, J. Y. S. and Zheng, Y. F., 1985, "Computation of Input Generalized Forces for Robots with Closed Kinematic Chain Mechanisms," J. Robotics and Automation, Vol. 1, No. 2, pp. 95~103.

(4) Denavit, J. and Hartenberg, R. S., 1955, "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices," J. Appl. Mech., Vol. 22, pp. 215~221.

(5) Featherstone, R., 1987, "Robot Dynamics Algorithms," Kluwer Academic Publishers.

(6) Khalil, W. and Kleinfinger, J. F., 1986, "A New Geometric Notation for Open and Closed-Loop Robots," Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation, San francisco, pp. 1174~1180.

(7) Golub, G. H. and Loan, C. F. V., 1989, "Matrix Computations," 2nd. edition, Johns Hopkins University Press.