

〈論 文〉

## 연결된 보의 랜덤진동해석

김현실\* · 강현주\*\* · 김재승\*\*

(1993년 3월 12일 접수)

### Random Vibration of Coupled Beams

Hyun Sil Kim, Hyun Joo Kang and Jae Seung Kim

**Key Words:** Random Vibration(랜덤진동해석), Coupled Beam(연결된 보), SEA(통계적에너지 해석법)

#### Abstract

Random vibration of the coupled identical beams subject to band-limited white noise is studied. The mean-square displacements average dsatially over each beam are derived analytically using two different modal analysis techniques and compared to the results by SEA (Statistical Energy Analysis). It is shown that when frequency is high and a large number of modes are included in the frequency band, the modal analysis methods and the SEA yield the same results provided that the loss factors are very small and the modal separation is much larger than the half-power bandwidth.

#### 1. 서 론

선박이나 자동차, 항공기등의 실내소음해석은 대부분의 경우 보 (beam)나 판 (plate) (또는 셸)이 연결된 구조물이 랜덤하중에 의해 가진될 때 고체음 (structure-borne noise)의 전파해석으로 모델링할 수 있다. 소음이 발생하는 주파수대역은 고주파수로 많은 모드를 포함하는 현재 널리 사용되는 해석방법으로 SEA(통계적에너지해석법)<sup>(1)</sup>가 있다. SEA는 복잡한 구조물을 세부시스템으로 나누어 각 세부시스템간의 에너지평형으로부터 구조물의 진동에너지를 구하며 특정 위치나 모드에 대한 변화보다는 세부시스템의 위치 및 주파수대역에 대해 평균한 값을 얻는다. SEA는 저주파수대의 진동해석에 적합한 유한요소법과 같이 고주파수대의 범용

진동해석방법으로 활용되고 있지만 SEA의 정확성에 대해서는 아직 연구결과가 계속 발표되고 있는 실정이다.

SEA의 이론중 가장 논란의 대상이 되는 것은 세부시스템간의 연결상태 및 파워의 전달 형태에 관한 것으로 SEA의 기본이론은 세부시스템간의 연결이 '약결합(weak coupling)'이라는 가정에 근거를 두고 있으나 모드해석 등 이론적인 해를 이용하여 SEA의 가정을 검증하는데 많은 연구결과<sup>(2-6)</sup>가 발표되었다. Remington과 Manning<sup>(2)</sup>은 막대 (rod)에 대해, Davies와 Wahab<sup>(3)</sup>은 보 (beam)에 대해, Dimitriadis와 Pierce<sup>(4)</sup>는 직사각형에 판에 대해, Keane과 Price<sup>(5)</sup>는 다중 모드를 갖는 일반적 구조물에 대해 두 요소가 '강결합(strong coupling)'으로 연결된 경우 전달되는 파워의 엄밀해를 유도하여 연결부위에서의 상태(coupling strength)가 SEA의 결과에 미치는 영향을 검토하였으며 Langley<sup>(6)</sup>는 좀더 엄밀한 SEA이론을 유도하여 기

\*정회원, 한국기계연구원 음향연구실

\*\*한국기계연구원 음향연구실

존의 SEA 이론의 가정을 연구하였다. 그러나 실제 구조물에의 응용시 필요한 것은 연결부위에서 전달되는 파워의 값보다는 각 세부시스템의 진동에너지이며 이 값은 SEA의 정확성을 판단할 수 있는 직접적인 척도가 된다.

본 연구에서는 두 개의 보가 연결된 구조물이 밴드를 갖는 백색잡음(band limited white noise)에 의해 가진된 때 각 보의 평균제곱변위(meansquare displacement)를 두가지 모드해석방법을 이용하여 구하였으며 SEA를 이용한 결과와 비교하였다. 랜덤하중에 의해 가진되는 단일 구조물의 해석은 널리 알려져 있으나<sup>(7,8)</sup> 연결된 구조물의 경우에는 L자형 판<sup>(9)</sup> 등 단순한 형상에 대해서만 연구결과가 알려져 있다. 연결된 구조물의 모드해석을 이용한 랜덤 진동해석결과는 SEA 기본이론의 검증 및 SEA에서 사용되는 중요한 변수인 결합손실계수(coupling loss factor) 등을 계산할 수 있는 방법으로 쓰이며 여기에서는 다루지 않았으나 집중 랜덤하중에 의해 가진되는 단일 구조물에 나타나는 에너지의 집중현상<sup>(7,8)</sup>을 연결된 구조물에서 연구할 수 있는 수단을 제공한다.

연결된 구조물의 모드해석방법으로 글로벌모드<sup>(9,10)</sup>와 분리모드<sup>(3,4)</sup> 두 가지가 있다. 글로벌모드 해석방법은 중간에 경계조건이 있는 시스템의 전체 특성방정식(characteristic equation)을 유도하여 고유파수 및 모드를 구하는 방법으로 연결된 요소수가 많아지면 적용하기가 매우 어렵다. 반면 분리모드 해석방법은 결합된 요소를 분리된 독립구조로 간주하고 연결부위에서의 모멘트를 외력으로 가정하는 방법으로 여러 개의 요소가 결합된 경우에도 쉽게 적용할 수 있다. 두가지 모드해석방법은 같은 함수를 일정구간에서 다른 종류의 모드를 사용하여 전개하는 것이며 단지 수렴속도의 차이를 보일뿐 결과는 동일하다. 본 논문에서는 분리모드방법을 사용하여 연결된 보가 랜덤 집중하중에 의해 가진될 때 공간과 주파수대역에 대해 평균된 변위를 유도하였다. 본 연구에서 제시된 해석방법은 길이 및 재질이 다른 보가 연결된 경우에도 적용이 가능하나 결과는 동일보의 경우에만 국한하였다.

2. 모드해석

Fig. 1과 같이 두 개의 보가 연결된 구조물에 크기가 1인 조화집중하중  $\exp(i\omega t)$ 이 보 1에 작용할

때 보 1과 2의 진동변위는 다음식에 의해 지배된다.

$$D_1 u_1^{(4)}(x_1) - \rho_1 \omega^2 u_1(x_1) \delta(x_1 - x_0) \tag{1a}$$

$$D_2 u_2^{(4)}(x_2) - \rho_2 \omega^2 u_2(x_2) = 0 \tag{1b}$$

단  $u_i$ 는 보  $i(i=1,2)$ 의 그린함수(Green function)이며  $D_i, \rho_i$ 는 굽힘강도(flexural rigidity)와 단위길이당 밀도를 나타낸다. 두 보의 연결은 양 끝단의 면과 면이 접촉된 상태이며 연결부위는 핀으로 지지되어 기울기 및 모멘트가 같으며 변위는 없다. 양 끝단에서의 경계조건은 여러가지 경우를 고려할 수 있으나 여기에서는 단순지지되어 있다고 가정하였다. 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$u_1'(L_1) = u_2'(0), \quad D_1 u_1''(L_1) = D_2 u_2''(0) \tag{2a}$$

$$u_1(0) = u_1''(0) = 0, \quad u_2(L_2) = u_2''(L_2) = 0 \tag{2b}$$

2.1 모드 해석 I

첫 번째 모드해석방법은 단일보의 경우처럼 연결된 보의 고유진동수 및 모드를 구해 변위를 고유모드(global mode)의 무한급수로 전개하는 것<sup>(9,10)</sup>으로 다음과 같이 주어진다.

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_0) \phi_n(x_1)}{M_1 I_n (\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta\omega^2)} \tag{3}$$

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x_0) \phi_n(x_2)}{M_1 I_n (\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta\omega^2)} \tag{4}$$

$\phi_n$ 과  $\psi_n$ 은 보 1과 2의 n번째 자유진동모드이며  $\omega_n$ 은 고유진동수,  $M_1$ 은 보 1의 질량을 나타낸다 ( $M_1 = \rho_1 L_1$ ).  $I_n$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$I_n = \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \phi_n^2 dx_1 + \frac{1}{L_2} \frac{M_2}{M_1} \int_0^{L_2} \psi_n^2 dx_2 \tag{5}$$

동일보의 경우( $L_1 = L_2 = L, M_1 = M_2$ ) 모드는 대칭과 비대칭 모드로 구분되며  $n$ 이 짝수라면 이들 변수와 고유 파수(characteristic wavenumber)  $k_n$ 은

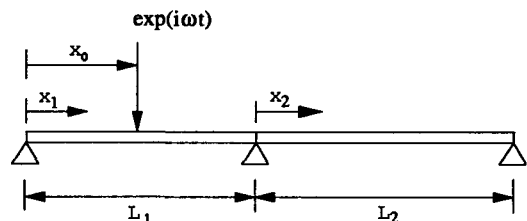


Fig. 1 Coupled beams

$$\begin{aligned} \phi_n(x_1) &= \sin k_n x_1 - \sigma_n \sin k_n x_1 \\ \phi_n(x_2) &= -\sin k_n(x_2 - L) + \sigma_n \sin k_n(x_2 - L) \quad (6) \\ n \gg 1, \quad k_n L &\approx n\pi + \pi/4, \quad I_n \approx 1 \end{aligned}$$

$n$ 이 홀수인 경우는

$$\begin{aligned} \phi_n(x_1) &= \sin k_n x_1 \\ \phi_n(x_2) &= \sin k_n(x_2 - L) \quad (7) \\ k_n L &= n\pi, \quad I_n = 1 \end{aligned}$$

로 주어지며 여기서  $\sigma_n = \sin(k_n L) / \sinh(k_n L)$ . 랜덤하중이 밴드폭 (bandwidth)  $\Delta\omega$ 인 주파수대역에서 정의되며 power spectral density가  $S_0$ 인 경우 시간에 대한 평균제곱변위 (mean square displacement)  $\langle w_1^2 \rangle$ ,  $\langle w_2^2 \rangle$ 는 그린함수  $u_1, u_2$ 를 이용하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \langle w_1^2 \rangle &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 |u_1(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_n \sum_m \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_0 \phi_n(x_0) \phi_m(x_0) \phi_n(x_1) \phi_m(x_1)}{M_1^2 H_n H_m^*} d\omega \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle w_2^2 \rangle &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 |u_2(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_n \sum_m \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_0 \phi_n(x_0) \phi_m(x_0) \phi_n(x_2) \phi_m(x_2)}{M_1^2 H_n H_m^*} d\omega \quad (9) \end{aligned}$$

단  $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ ,  $H_n^*$ 은  $H_m$ 의 켈레복소수이며

$$H_n = \omega_n^2 - \omega^2 + i\eta\omega^2$$

복소수 주파수  $\omega(1 - i\eta/2)$ 를 사용하여 댐핑을 고려하였고  $\eta$ 는 손실계수 (loss factor)이다. 손실계수  $\eta$ 가 대단히 작아

$$\eta\omega \ll \Delta\omega \quad (10)$$

을 만족한다고 가정하면 식 (8), (9)의 적분에서 고유주파수  $\omega_n$  또는  $\omega_m$ 부근에서의 성분만 고려하고 나머지 비공진 영역의 성분은 무시할 수 있으며<sup>8)</sup> 식 (8)과 (9)에서  $n, m$ 에 대한 급수의 합은  $\omega_1 < \omega_n, \omega_m < \omega_2$ 인 경우만 포함한다. 공진모드만 고려한 적분결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle w_1^2 \rangle &= \sum_n \frac{\langle F_0^2 \rangle \pi}{2M_1^2 \eta \omega_n^3 \Delta\omega} \phi_n^2(x_0) \phi_n^2(x_1) \\ &+ \sum_n \sum_{m(m \neq n)} \frac{\langle F_0^2 \rangle \pi \eta (\omega_n + \omega_m)}{M_1^2 (\omega_n^2 - \omega_m^2)^2 \Delta\omega} \phi_n(x_0) \\ &\quad \phi_m(x_0) \phi_n(x_1) \phi_m(x_1) \quad (11) \end{aligned}$$

단 
$$\langle F_0^2 \rangle = \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 d\omega$$

보 2의 평균제곱변위도 같은 방법으로 구할 수 있다. 손실계수  $\eta$ 는 일반적으로 주파수가 커지면 감

소하는데 one-octave band 또는 one-third octave band를 고려할 때 자주 쓰이는 강판<sup>(11)</sup> 또는 알루미늄판<sup>(8)</sup>의 경우  $\eta\omega \ll \Delta\omega$ 의 조건은 충분히 만족된다. 또한, 각 고유주파수는 충분히 분리되어 있어서 인접한 모드의 주파수 간격과 half-power bandwidth  $\eta\omega_n$ 가 다음 조건을 만족한다고 가정하면<sup>(8)</sup>

$$|\omega_n - \omega_m| \gg \eta\omega_n, \quad \eta\omega_m \quad (12)$$

식(11)에서 두번째 항( $n \neq m$ 인 경우)은 첫 번째 항에 비해 작으므로 무시할 수 있다. (위 가정은 SEA항에서 다시 검토하기로 한다). 식(11)에서 집중 랜덤하중에 의해 가진될 때 위치의 변화에 따른 변위의 분포를 구할 수 있는데 많은 실제 구조물의 경우 세부시스템내에서 관측위치와 특정가진점에 대한 변화보다는 공간에 대한 평균량이 중요하게 쓰이게 된다. 위치에 대한 평균은 다음공식을 이용하여 수행할 수 있으며

$$\frac{1}{L} \int_0^L \phi_n^2(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \phi_n^2(x) dx = 1/2 \quad (13)$$

관측위치  $x_1, x_2$  및 가진위치  $x_0$ 에 대해 평균한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle w_1^2 \rangle_{avg} &= \frac{1}{L_1^2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_1} \langle w_1^2 \rangle dx_0 dx_1 \\ &= \sum_n \frac{\langle F_0^2 \rangle \pi}{8M_1^2 \eta \omega_n^3 \Delta\omega} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle w_2^2 \rangle_{avg} &= \frac{1}{L_1 L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \langle w_2^2 \rangle dx_0 dx_2 \\ &= \sum_n \frac{\langle F_0^2 \rangle \pi}{8M_1^2 \eta \omega_n^3 \Delta\omega} \quad (15) \end{aligned}$$

단일보의 경우에는 식 (12)의 가정과 무관하게 위치에 대한 평균을 취하면 고유모드의 직교성때문에 식(11)에서  $n \neq m$ 인 경우에는 제거되나 연결된 보의 고유모드는 각각의 보에 대해서는 직교성이 성립하지 않으므로<sup>(9)</sup>  $n \neq m$ 인 항은 그대로 남게된다.

이제  $\omega_n, \eta$ 를 중심주파수 (center frequency)에서의 값  $\omega, \eta$ 로 대체하고  $\Delta\omega$ 사이의 모드수를  $N$ 이라 하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \langle w_2^2 \rangle_{avg} = \frac{\langle F_0^2 \rangle}{16M_1^2 \eta \omega^3} \frac{N}{\Delta f} \quad (16)$$

연결된 보의 모드밀도  $N/\Delta f$ 는 인접한 고유주파수의 간격이  $3\pi/4L$  및  $\pi/4L$ 로 반복되므로 평균을 취해  $\pi/2L$ 로 잡으면 단일 보의 모드밀도의 두 배

가 된다. 따라서

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \langle w_2^2 \rangle_{avg} = \frac{\langle F_0^2 \rangle}{8M_1^2 \eta \omega^3} n(f) \quad (17)$$

단,  $n(f)$ 는 길이  $L$ 인 단일보의 모드밀도이다.

2.2 모드해석 II

두 번째 모드해석 방법은 연결점에서 발생하는 모멘트를 외력으로 간주하고 각각의 보를 독립된 시스템으로 보는 것으로<sup>(3)</sup> 여러개의 보가 연결된 경우의 진동해석에 쉽게 확장하여 적용할 수 있는 장점이 있다. 연결점에서의 모멘트  $M$ (크기 1인 외력에 대한)을 도입해서 식(1), (2)를 다시쓰면

$$D_1 u_1^{(4)}(x_1) - \rho_1 \omega^2 u_1(x_1) = \delta(x_1 - x_0) + M \delta'(x_1 - L_1) \quad (18)$$

$$D_2 u_2^{(4)}(x_2) - \rho_1 \omega^2 u_2(x_2) = -M \delta'(x_2) \quad (19)$$

각각의 보의 Green function은 단순지지된 단일보의 모드  $\Phi_n, \Psi_n$ 을 사용하여 전개할 수 있으며 참고문헌[3]으로부터 다음과 같이 주어진다.

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x_1), \quad u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Psi_n(x_2) \quad (20)$$

$$a_n = \frac{2}{M_1} \left[ \frac{\Phi_n(x_0)}{H_n} - \frac{M \Phi_n'(L_1)}{H_n} \right] \quad (21)$$

$$b_n = \frac{2}{M_2} \frac{M \Psi_n'(0)}{G_n} \quad (22)$$

$$\Phi_n(x_1) = \sin(\pi n x_1 / L_1), \quad \Psi_n(x_2) = \sin(\pi n x_2 / L_2) \quad (23)$$

$$H_n = \omega_{1n}^2 - \omega^2 + i\eta\omega^2, \quad G_n = \omega_{2n}^2 - \omega^2 + i\eta\omega^2 \quad (24, 25)$$

동일보의 경우 보 1과 2의 고유진동수는 같으며 다음과 같이 주어진다.

$$\omega_{1n}^2 = \omega_{2n}^2 = \omega_n^2 = \frac{D_1}{\rho_1} \left( \frac{\pi n}{L} \right)^4 \quad (26)$$

연결점에서 기울기는 같다는 조건에서 모멘트는 다음과 같이 주어진다.

$$M = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_0) \Phi_n'(L) / H_n}{\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(L)^2 / H_n + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n'(0)^2 / H_n} \quad (27)$$

단순지지인 경우 모멘트는 단일화된 공식(closed form)으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M = \frac{1}{2k} \frac{[-\sin kx_0 / \sin \alpha + \sinh kx_0 / \sinh \alpha]}{[\cosh \alpha / \sinh \alpha - \cos \alpha / \sin \alpha]} \quad (28)$$

단,  $\alpha = (\omega^2 \rho_1 / D_1)^{1/4} L = kL$ . 고주파수인 경우 ( $\alpha \gg 1$ )  $x_0$ 가  $L$ 에 가깝지 않으면 모멘트는 경계부근에서의 국부효과(near field effect)를 무시하고 다음과 같이 단순화할 수 있으며

$$M = -\frac{\sin kx_0}{2\sqrt{2}k \sin(\alpha - \pi/4)} \quad (29)$$

상수  $a_n, b_n$ 은 다음과 같이 된다.

$$a_n = \frac{1}{M_1 H_n} [2\Phi_n(x_0) + (-1)^n Q_n] \quad (30)$$

$$b_n = -\frac{1}{M_1 H_n} Q_n \quad (31)$$

단 
$$Q_n = \frac{(n\pi/L) \sin kx_0}{\sqrt{2}k \sin(\alpha - \pi/4)} \quad (32)$$

이제 밴드폭  $\Delta\omega$ 인 주파수대역에서 power spectral density  $S_0$ 를 갖는 랜덤하중이 작용할 때 평균 제곱변위(mean square displacement)  $\langle w_1^2 \rangle, \langle w_2^2 \rangle$ 는 그린함수  $u_1, u_2$ 를 이용하여 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \langle w_1^2 \rangle &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 |u_1(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_n \sum_m \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 a_n a_m^* \Psi_n(x_1) \Phi_m(x_1) d\omega \end{aligned} \quad (33a)$$

$$\begin{aligned} \langle w_2^2 \rangle &= \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 |u_2(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sum_n \sum_m \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_0 b_n b_m^* \Psi_n(x_2) \Psi_m(x_2) d\omega \end{aligned} \quad (33b)$$

단일 보의 모드  $\Phi_n, \Psi_n$ 는 각각의 보에 대해 직교성이 성립하므로 먼저  $x_1$ 과  $x_2$ 에 대해 평균을 취하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} \int_0^{L_1} \langle w_1^2 \rangle dx_1 &= \sum_n \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_0}{2M_1^2 |H_n|^2} [4\Phi_n^2(x_0) \\ &+ 2(-1)^n \Phi_n(x_0)(Q_n + Q_n^*) + |Q_n|^2] d\omega \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} \langle w_2^2 \rangle dx_2 = \sum_n \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_0}{2M_1^2 |H_n|^2} |Q_n|^2 d\omega \quad (35)$$

가진점  $x_0$ 에 대한 평균치를 취하면 식(34), (35)는 다음과 같이 된다.

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \sum_n \frac{\langle F_0^2 \rangle}{M_1^2 \Delta\omega} (A_n + B_n + C_n) \quad (36)$$

$$\langle w_2^2 \rangle_{avg} = \sum_n \frac{\langle F_0^2 \rangle}{M_1^2 \Delta\omega} C_n \quad (37)$$

단

$$A_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{d\omega}{|H_n|^2} \quad (38)$$

$$B_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{n\pi (\omega_n / \omega)^{1/2}}{\sqrt{2} |H_n|^2}$$

$$\left[ \frac{\sin \bar{\alpha}}{\sin(\bar{\alpha} - \pi/4)(\bar{\alpha} - (n\pi)^2)} + \frac{\sin \bar{\alpha}^*}{\sin(\bar{\alpha}^* - \pi/4)((\bar{\alpha}^*)^2 - (n\pi)^2)} \right] d\omega \quad (39)$$

$$C_n = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{(\omega_n/\omega)}{8|H_n|^2} \frac{d\omega}{|\sin(\bar{\alpha} - \pi/4)|^2} \quad (40)$$

댐핑은 복소수 파수  $\bar{\alpha} = \alpha(1 - i\eta/4)$ 를 이용하여 고려하였다.  $A_n$ 은  $\alpha_n = n\pi$ 에서의 모드만 포함하나  $B_n$ 과  $C_n$ 은  $\alpha_n$ 외에  $\sin(\alpha_j - \pi/4) = 0$ 을 만족하는  $\alpha_j$ 에서의 모드를 포함한다.  $B_n$ 에서  $\alpha_j$ 에 대해 적분한 값은 0이 되나  $C_n$ 에서는 적분구간에 포함되는 모든  $\alpha_j$ 를 고려해야 되며 적분결과는 다음과 같다.

$$A_n = \frac{\pi}{2} \eta \omega_n^3 \quad (41)$$

$$B_n = -\frac{\pi}{2} \eta \omega_n^3 \quad (42)$$

$$C_n = \frac{\pi}{8} \eta \omega_n^3 + \sum_j \frac{\pi}{\eta \omega_n^3 \alpha_j^2 |1 - \alpha_j^4 / \alpha_n^4|^2} \quad (43)$$

단,

$$\alpha_n = n\pi$$

$$\alpha_j = j\pi + \pi/4, \quad j = \dots, n-1, n, n+1, \dots$$

평균제곱변위는 다음과 같이 된다.

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \langle w_2^2 \rangle_{avg} = \sum_n \frac{\pi \langle F_0^2 \rangle}{8M_1^2 \eta \omega_n^3 \Delta\omega} \left[ 1 + \sum_j \frac{8}{\alpha_j^2 |1 - \alpha_j^4 / \alpha_n^4|^2} \right] \quad (44)$$

식 (44)에서  $n, j$ 에 대한 급수의 합은  $\omega_1 < \omega_n, \omega_j < \omega_2$ 이 경우만 포함한다. 만일 주파수 대역이 고주파수에 속하고 ( $n \gg 1, j \gg 1$ ) 밴드폭  $\Delta\omega$ 에 포함된 고유주파수가 많으면  $j$ 에 대한 급수의 합은 다음과 같이 무한 급수의 합으로 대체할 수 있으며 수렴값은 1이 된다.

$$\sum_j \frac{8}{\alpha_j^2 |1 - \alpha_j^4 / \alpha_n^4|^2} \approx \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = 1 \quad (45)$$

밴드폭  $\Delta\omega$ 에 포함된 모드의 수는 실제로 무한대가 아니지만  $\alpha_n$ 을 전후하여 5개의  $\alpha_j$ 만 고려해도 합은 0.96이 된다. SEA의 적용시 필요한 조건의 하나로 해당 주파수밴드에 포함된 모드 수가 충분히 많아야 하는데<sup>(12)</sup> 식 (44)와 (45)는 모드 수에 따른 영향을 검토할 수 있는 수단을 제공한다. 만일 밴드의 중심주파수가 크지않고  $\Delta\omega$ 에 포함되는 모드의 수가 적다면 식 (44)를 사용하여 계산할 수 있다.

식 (45)의 근사값을 사용한 평균제곱변위는 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \langle w_1^2 \rangle_{avg} &= \langle w_2^2 \rangle_{avg} = \sum_n \frac{\pi \langle F_0^2 \rangle}{4M_1^2 \eta \omega_n^3 \Delta\omega} \\ &= \frac{\langle F_0^2 \rangle}{8M_1^2 \eta \omega^3} n(f) \end{aligned} \quad (46)$$

단  $n(f)$ 는 단일 보의 모드밀도이며 식(46)은 모드해석 I의 결과인 식 (17)과 동일함을 알 수 있다. 모드해석 II의 결과는 모드분리가 half-power bandwidth보다 크다는 식(12)의 가정을 사용하지 않았다는 점에 주목할 필요가 있다.

### 3. SEA

SEA를 이용한 평균제곱변위는 다음과 같이 주어진다<sup>(1)</sup>.

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \frac{P}{M_1 \omega^2} \frac{\eta_2 + \eta_{21}}{\eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_{12} + \eta_1 \eta_{21}} \quad (47)$$

$$\langle w_2^2 \rangle_{avg} = \frac{P}{M_2 \omega^2} \frac{\eta_{12}}{\eta_1 \eta_2 + \eta_2 \eta_{12} + \eta_1 \eta_{21}} \quad (48)$$

단  $P$ 는 보 1에 주어진 파워이며

$$P = \frac{\langle F_0^2 \rangle n(f)}{4M_1} \quad (49)$$

동일 보이므로  $\eta_1 = \eta_2 = \eta, \eta_{12} = \eta_{21}$ 을 이용하면 식 (47), (48)은 다음과 같이 된다.

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \frac{\langle F_0^2 \rangle n(f)}{4M_1^2 \eta \omega^3} \frac{\eta + \eta_{12}}{\eta + 2\eta_{12}} \quad (50)$$

$$\langle w_2^2 \rangle_{avg} = \frac{\langle F_0^2 \rangle n(f)}{4M_1^2 \eta \omega^3} \frac{\eta_{12}}{\eta + 2\eta_{12}} \quad (51)$$

결합손실계수(coupling loss factor)  $\eta_{12}$ 는 보의 경우

$$\eta_{12} = \frac{C_g \pi}{2\omega L}$$

로 주어지며 여기서  $C_g$ 는 그룹전파속도(group vecocity),  $\tau = 1/2$ 이다. 길이  $L$ 인 보의 모드밀도는  $n(f) = 2L/C_g$ 이며 연결감쇠계수  $\eta_{12}$ 는 모드밀도로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\eta_{12} = \frac{1}{2\omega n(f)} \quad (52)$$

여기서  $1/n(f)$ 는 인접한 고유진동수의 간격을 나타낸다. 따라서 식(12)의 가정은

$$\eta_{12} \gg \eta \quad (53)$$

으로 표현할 수 있으며 결국 인접한 모드의 주파수 간격이 half-power bandwidth보다 크다는 식 (12)의 가정은 결합손실계수가 각각의 보의 내부손실계수보다는 크다는 가정과 동일하다. 두 개의 동일보가 연결된 경우  $n$ 번째 모드의 고유 주파수와 가장 인접한 모드의 고유주파수의 간격은  $n$ 에 비례하므로 고주파수로 갈수록 모드분리가 뚜렷하다. 그러나 실제 구조물의 경우 각 모드의 half-power bandwidth는 주파수 증가에 따라 일정하거나 완만한 증거를 보이며 식 (12) 또는 식 (53)의 가정을 충분히 만족한다. 예로 길이가 2 m, 폭 5 cm, 두께 5 cm인 정사각형 단면을 갖는 강철로 된 두 개의 보가 연결된 경우 1000 Hz에서 결합손실계수와 내부손실계수는 각각  $\eta_{12}=0.013$ ,  $\eta=0.00035^{(11)}$ 이며  $\eta_{12}/\eta=37$ 로 식 (53)의 가정을 만족함을 알 수 있다. 식 (53)의 가정을 이용하면 평균제곱변위는 다음과 같이 되며

$$\langle w_1^2 \rangle_{avg} = \langle w_2^2 \rangle_{avg} = \frac{\langle F_0^2 \rangle n(f)}{8M_1^2 \eta \omega^3} \quad (54)$$

이는 모드해석 I, II로 구한 결과와 동일함을 알 수 있다.

#### 4. 결론 및 검토

본 연구에서는 두 개의 보가 연결된 구조물이 벤드 폭을 갖는 백색잡음에 의해 가진될 때 두 가지 모드해석을 이용하여 평균제곱변위를 구하는 법을 제시하였으며 결과를 SEA를 이용하여 얻은 결과와 비교하였다. 모드해석방법 I은 II에 비해 비교적 해석과정이 단순하나 세 개 이상의 보가 다중연결된 형상에 대해서는 모드를 구하는 과정의 복잡성때문에 적용하기가 대단히 어렵다. 모드해석방법 II는 분리된 보의 모드를 이용하므로 많은 보가 연결된 경우에도 쉽게 적용할 수 있으나 주파수에 대한 적분과정은 모드해석방법 I보다 매우 복잡하다. 주파수대역이 고주파수이며 많은 모드를 포함할 때 각 보의 손실계수가 대단히 작아 식 (10) 및 (12)의 가정을 만족하면 두 가지 모드해석방법과 SEA는 동일한 결과를 얻음을 보였다.

본 연구에서 고려한 연결은 SEA의 입장에서 보면 강결합(strong coupling)'이며 SEA를 이용하여 소음해석을 하는 선박 등 실제 구조물에서도 보와

판 등이 용접된 '강결합'이 대부분이다. 그러나 SEA는 세부시스템의 연결상태의 정도와 무관하게 실제 문제에 적용되어 비교적 좋은 결과(계측치와 비교하여)를 보이며 본 연구에서 고려된 예제는 이를 확인하여 준다. 본 연구에서는 보의 경우만 다루었으나 판과 판이 연결된 구조물에 대한 연구가 필요하며 실제 구조물은 많은 경우 보강재 및 내부 마감재의 부착으로 인해 손실계수는 강판보다는 대단히 큰 값을 보이므로 손실계수의 영향 등에 관해서도 앞으로 계속 연구가 필요하다.

#### 후기

본 연구는 과학기술처에서 시행한 1992년도 첨단 연구과제로 수행된 연구결과의 일부임을 밝혀둔다.

#### 참고문헌

- (1) Lyon. R.H., 1975, "Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems, Theory and Application," MIT Press, Cambridge.
- (2) Remington, P.J. and Manning, J.E., 1984, "Comparison of Statistical Energy Analysis Power Flow Prediction with an Exact Calculation," J. Acoust. Soc. Am., Vol. 57, pp. 374~379.
- (3) Davies, H. G. and Wahab M. A., 1981, "Analytical Solution for the Power Exchanges between Strongly Coupled Plates under Random Excitation: A test of Statistical Energy Analysis Concepts," J. Sound and Vibration, Vol. 123, pp. 397~412.
- (4) Keane, A.J. and Price, W.G., 1987, "Statistical Energy Analysis of Strongly Coupled Systems," J. Sound and Vibration, Vol. 117, pp. 363~386.
- (5) Langley, R.S., 1989, "A General Derivation of the Statistical Energy Analysis Equations for Coupled Dynamic Systems", J. Sound and Vibration, Vol. 135, pp. 499~508.
- (6) Crandall, S.H. and Wittig, L.E., 1972, "Chladni's Pattern for Random Vibration of a Plate" in Dynamic Responses of Structures, edited by G. Herrmann and N. Perroue, New York, Pergamon press, pp. 51~71.
- (7) Ito, K. and Crandall, S.H., 1978, "Wide-Band

- Random Vibration of Circular Plates”, J. Mechanical Design, Vol. 100. pp. 690~695.
- (9) Guyader, J.L., Boisson C. and Lesueur, C., 1982, “Energy Transmission in Finite Coupled Plates, Part I: Theory”, J. Sound and Vibration, Vol. 81, pp. 81~92.
- (10) Blevins, R.D., 1979, “Formulas for Natural Frequencies and Mode Shape”, Von Nostrand, New York.
- (11) 船内騒音に関する 調査研究 Vol I, 日本造船研究協會, 昭和53年, 82-83, 1978.
- (12) Cremer, L. and Heckl, M., 1973, “Structure-Borne Sound,” Springer-Verlag, New York, pp. 329-330.