

〈論 文〉

## 동하중을 받는 복합재료 원통셸의 동적거동 해석

이영신\* · 이기두\*\*

(1992년 12월 9일 접수)

### On the Dynamic Response of Laminated Circular Cylindrical Shells under Dynamic Loads

Young-Shin Lee and Ki-Du Lee

**Key Words :** Modal Analysis Technique(모달해석기법), Dynamic Load(동하중), Shear Deformation Shell Theory(전단변형 셸이론), Natural period(고유주기)

#### Abstract

The free vibration and dynamic response of cross-ply for CFRP and GFRP laminated circular cylindrical shells under dynamic loadings are investigated by using the first-order shear deformation shell theory. The modal analysis technique is used to develop the analytical solutions of simply supported cylindrical shells under dynamic load. The analysis is based on an expansion of the loads, displacements and rotations in a double Fourier series which satisfies the end boundary conditions of simply support. Analytical solution is assumed to be separable into a function of time and a function of position. In this paper, the considered load forces are step pulse, sine pulse, triangular (1, 2, 3) pulse and exponential pulse. The solution for a given loading pulse can be found by involving the convolution integral. The results show that the dynamic response are governed primarily by the natural period of the structure.

#### 기 호 설 명

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}$	: 신장강성, 굽힘-신장연성강성, 굽힘강성 계수	$m, n$	: 축방향 및 원주방향 반파수
$E_1, E_2$	: 종탄성 계수 및 횡탄성 계수	$N_{ij}, M_{ij}$	: 합응력 및 합모멘트
$F_0$	: 최대하중의 크기	$Q_{ij}, \bar{Q}_{ij}$	: 축소강성 계수, 수정된 축소강성 계수
$g_x, g_\theta, m_x, m_\theta$	: 물체력 및 모멘트	$Q_{mn}(t), T_{mn}(t)$	: 일반화된 하중 및 좌표
$G_{12}, G_{23}, G_{13}$	: 전단강성 계수	$t_1$	: 하중 작용 지속 시간
$h$	: 원통셸의 두께	$u, v, w$	: 중앙면의 변위
$I_i$	: 관성력	$x, \theta, z$	: 원통셸의 좌표계
$J_{mn}$	: 일반화된 질량	$l_1, l_2$	: 하중 작용 면적
$k$	: 전단보정 계수	$\beta_i$	: 기준면의 회전항
$[K], [M]$	: 강성행렬, 질량행렬	$\epsilon_i^0, \gamma_{ij}^0$	: 중앙면의 변형률
$L, R$	: 원통셸의 길이 및 반경	$x_i, x_{ij}$	: 중앙면의 곡률
		$\nu_{12}$	: Poisson's ratio
		$\omega_{mn}$	: 각진동수
		$\phi$	: 적층각

\*정회원, 충남대학교 기계설계공학과

\*\*충남대학교 기계설계공학과 대학원

### 1. 서 론

최근에 섬유보강 복합재료는 중량에 비해 강도 및 강성이 매우 우수하고 특히 설계요건에 따라 적층배열을 적절히 선정할 수 있는 유용성 때문에 경량화 및 고강도가 요구되는 자동차, 항공기 및 우주 비행체의 구조물에 널리 응용되고 있는 상태이다. 그러나 이들 복합재료는 모두가 충격하중에 대해 약하다는 단점을 갖고있다. 충격은 그것이 비록 적은 충격 에너지라 할지라도 복합재료 구조물에는 상당한 손상을 유발하며, 이는 구조물의 강도를 크게 감소 시키게 된다.

많은 학자들이 저속, 고속 충격하의 복합재료 구조물 거동에 대해 해석적, 실험적인 연구를 수행하고있는데 그중 Dobyns<sup>(1)</sup>은 화약이 폭발할때 발생하는 순간적인 힘을 여러가지 충격형태 즉, 싸인곡선, 사각형 및 삼각형 펄스로 가정하여 단순지지된 직교이방성 판에 작용할때 판의 거동에 대한 해석 방법을 제시하였다. Ramkumar와 Chen<sup>(2)</sup>은 저속 충격을 받는 이방성 Graphite/Epoxy 적층판의 초기섬유파단과 층간분리등을 예측하기 위한 연구로 해석적인 해를 구하여 실험치와 비교하였다. 국내에서는 이영신, 강근희 및 박웅<sup>(3)</sup>은 유한 요소법을 이용 저속 충격을 받는 혼합적층판의 에너지 흡수율등에 관하여 연구를 수행하였다. 최익현, 홍창선 및 이인<sup>(4)</sup>등은 저속충격을 받는 복합적층판의 거동에 대해 비선형해석과 선형해석을 실시하여 비교하였다.

한편 원통셀의 충격하중에 의한 동적 거동의 연구에서 Cederbaum과 Heller<sup>(5)</sup>는 두꺼운 셀이론을 이용하여 국부 충격력을 받는 단층 직교이방성 원통셀의 동적 거동을 연구하였고 Reddy와 Khdeir<sup>(6)</sup>은 셀의 표면에서 횡전단력이 작용하지 않는다는 조건을 만족하는 고차 전단변형 셀이론을 도입하여, 싸인 및 삼각형 펄스가 작용되는 낮은셀 (shallow-shell)의 거동을 해석하였다. Christoferou와 Swanson<sup>(7)</sup>은 충격자에 의해 충격이 가해지는 직교이방성 원통셀의 거동을 회전관성 효과를 무시한 전단변형 셀이론을 적용하여 충격력, 변위 및 변형률을 구하였다.

그러나 복합재료 원통셀의 충격거동에 대한 국내의 연구는 아직 활발하지 않으며, 따라서 본 연구에서는 최근 널리 사용되는 GFRP(E-glass/epoxy)

와 CFRP(T300/N5208)로 구성된 단순지지된, Cross-ply 직교이방성 원통셀의 적층각 변화에 따른 진동수 변화 및 여러 하중형태, 즉 계단파, 싸인파, 삼각파, 지수함수파등의 충격형태에 따른 셀의 동적 거동을 모달해석기법(modal analysis technique)을 이용하여 연구하였다.

### 2. 횡전단 변형을 고려한 적층셀이론

#### 2.1 해석모델

본 연구에서는 Fig. 1 에서 보여주는 반경 R, 일정부두께 h인 적층 원통셀을 고려한다. 셀 중앙면에서 어떤 한점의 위치는 축방향 좌표 및 원주방향 좌표를 x 및 θ로 표시하고 반경방향의 좌표는 z로 표시한다.

또한 중앙면위의 임의의 점에서 축방향, 원주방향 그리고 반경방향의 변위 성분을 각각 u, v 및 w로 표시한다. 한편 물성의 좌표는 그림과 같이 1, 2, 3으로 정의하고 섬유 방향각은 x축과 1방향 사이의 각을 의미한다.

#### 2.2 운동 방정식

일차 전단변형이론에 근거한 셀의 운동 방정식은 다음과 같다.

$$N_{x,x} + \frac{1}{R}N_{x\theta,\theta} + g_x = I_1u_{,tt} + I_2\beta_{x,t} \tag{1a}$$

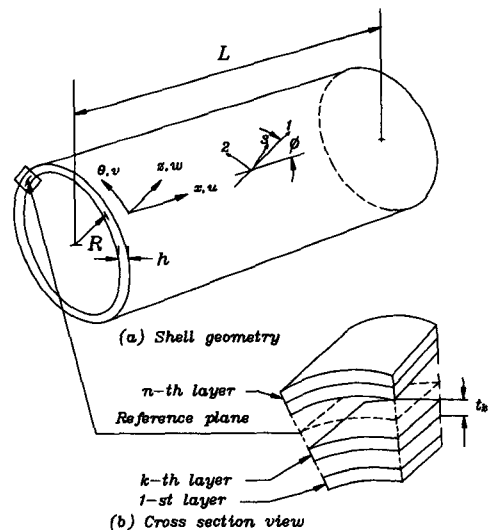


Fig. 1 Coordinate system and structure of the laminated cylindrical shell

$$N_{x\theta,x} + \frac{1}{R}N_{\theta,\theta} + \frac{1}{R}Q_\theta + g_\theta = (I_1 + \frac{2I_2}{R})v_{,tt} + (I_2 + \frac{I_3}{R})\beta_{\theta,tt} \quad (1b)$$

$$Q_{x,x} + \frac{1}{R}Q_{\theta,\theta} - N_\theta R + q(x, \theta, t) = I_1 w_{,tt} \quad (1c)$$

$$M_{x,x} + \frac{1}{R}M_{x\theta,\theta} - Q_x + m_x = I_3\beta_{x,tt} + I_2u_{,tt} \quad (1d)$$

$$M_{x\theta,x} + \frac{1}{R}M_{\theta,\theta} - Q_\theta + m_\theta = I_3\beta_{\theta,tt} + (I_2 + \frac{I_3}{R})v_{,tt} \quad (1e)$$

식(1)은 Reddy와 Khdeir<sup>(6)</sup>에 의해 주어진 일차 전단변형 쉘이론에서 관성항이 보강된 형태이다. 식에서  $t$ 는 시간이고 관성항  $I_i$ 는 다음과 같다.

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \rho_k dz \quad (2)$$

식(1)에서  $(\cdot)$ 는 시간 및 공간에대한 미분을 나타내고,  $g_x, g_\theta, m_x$  및  $m_\theta$ 는 물체력 및 모멘트 (Body force and moment)이다.

이때 복합재료 적층셸의 구성방정식은 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^o \\ k^o \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{55} & H_{45} \\ H_{45} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^o \\ \gamma_{\theta z}^o \end{Bmatrix} \quad (3)$$

여기서  $A_{ij}, B_{ij}$ 는 셸의 신장, 굽힘-신장연성강성이며,  $D_{ij}$ 는 굽힘강성이고  $H_{ij}$ 는 두께전단강성이다. 이들은 다음과 같이 정의된다.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (4)$$

$$H_{ij} = k \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j=4, 5) \quad (5)$$

여기서  $k$ 는 전단 보정계수로 Mindlin에 의해 도입되었으며 일반적으로  $\pi^2/12$ 이다.  $\bar{Q}_{ij}$ 는 수정된 축소강성계수이다.

식(3)에서  $\epsilon_i^o$ 는 중앙면의 공학변형률 이고  $\gamma_{xz}^o, \gamma_{\theta z}^o$ 는 횡전단변형률 이며  $k_i$ 는 곡률 및 회전변형률로 아래와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_\theta^o \\ \gamma_{x\theta}^o \end{Bmatrix}^T =$$

$$\begin{Bmatrix} u_{,x}, \frac{v_{,\theta}}{R} + \frac{w}{R}, \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \end{Bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\theta z}^o, \gamma_{xz}^o \end{Bmatrix}^T =$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_\theta + \frac{w_{,\theta}}{R} - \frac{v}{R}, \beta_x + w_{,x} \end{Bmatrix}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \kappa_\theta \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}^T =$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_{x,x}, \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R}, \beta_{\theta,x} + \frac{\beta_{x,\theta}}{R} \end{Bmatrix}^T \quad (6)$$

한편 식(3)에서 기준좌표계의  $x$ 축을  $0^\circ$  섬유방향과 일치하게 선택하는경우  $A_{16}=A_{26}=0, D_{16}=D_{26}=0$ 이 되며, 대칭이나 역대칭으로 적층된 Cross-ply인 경우  $B_{16}=B_{26}=H_{45}=0$ 이 된다. 식(6)과 식(3)을 운동방정식(1)에 대입하면 변위와 회전항으로 표현되는 새로운 운동방정식을 얻는다.

$$\left. \begin{aligned} & A_{11}u_{,xx} + \frac{A_{66}}{R^2}u_{,\theta\theta} + \left(\frac{A_{12}+A_{66}}{R}\right)v_{,x\theta} \\ & + \frac{A_{12}}{R}w_{,x} + B_{11}\beta_{x,xx} + \frac{B_{66}}{R^2}\beta_{x,\theta\theta} \\ & + \left(\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)\beta_{\theta,x\theta} \\ & + g_x = I_1u_{,tt} + I_2\beta_{x,tt} \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{A_{12}+A_{66}}{R^2}u_{,x\theta} - \frac{H_{44}}{R^2}v + A_{66}v_{,xx} \\ & + \frac{A_{22}}{R^2}v_{,\theta\theta} + \frac{A_{22}}{R^2}w_{,\theta} + \frac{H_{44}}{R^2}w_{,\theta} + \frac{B_{22}}{R^2}\beta_{\theta,\theta\theta} \\ & + B_{66}\beta_{\theta,xx} + \left(\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)\beta_{x,x\theta} \\ & + \frac{H_{44}}{R}\beta_\theta + g_\theta = (I_1 + \frac{2I_2}{R})u_{,tt} \\ & + (I_2 + \frac{I_3}{R})\beta_{\theta,tt} \end{aligned} \right\} \quad (7b)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{A_{12}}{R}u_{,x} - \left(\frac{H_{44}}{R^2} + \frac{A_{22}}{R^2}\right)v_{,\theta} + H_{55}w_{,xx} \\ & + \frac{H_{44}}{R^2}w_{,\theta\theta} - \frac{A_{22}}{R^2}w + (H_{55} + \frac{B_{12}}{R})\beta_{x,x} \\ & + \left(\frac{H_{44}}{R} - \frac{B_{22}}{R^2}\right)\beta_{\theta,\theta} + q(x, \theta, t) = I_1w_{,tt} \end{aligned} \right\} \quad (7c)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{B_{66}}{R^2}u_{,\theta\theta} + B_{11}u_{,xx} + \left(\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)v_{,x\theta} \\ & + \left(\frac{B_{12}}{R} - H_{55}\right)w_{,x} + \frac{D_{66}}{R^2}\beta_{x,\theta\theta} \\ & + H_{55}\beta_x + D_{11}\beta_{x,\theta\theta} + \left(\frac{D_{12}+D_{66}}{R}\right)\beta_{\theta,x\theta} \\ & + m_x = I_3\beta_{x,tt} + I_2u_{,tt} \end{aligned} \right\} \quad (7d)$$

$$\left. \begin{aligned} & -\left(\frac{B_{12}+B_{66}}{R}\right)u_{,x\theta}+B_{66}v_{,xx}+\frac{B_{22}}{R^2}v_{,\theta\theta} \\ & -\frac{H_{44}}{R^2}v+\left(\frac{B_{22}}{R^2}-\frac{H_{44}}{R}\right)w_{,\theta} \\ & +\left(\frac{D_{66}+D_{12}}{R}\right)\beta_{x,x\theta}-H_{44}\beta_{\theta} \\ & +D_{66}\beta_{\theta,xx}+\frac{D_{22}}{R^2}\beta_{\theta,\theta\theta}+m_{\theta} \\ & =I_3\beta_{x,tt}+\left(I_2+\frac{I_3}{R}\right)u_{,tt} \end{aligned} \right\} \quad (7e)$$

### 3. 해석과정

#### 3.1 경계조건

원통셀의 양단이 단순지지된 경우 경계조건은 아래와 같다.

$$\left. \begin{aligned} N_x(0, \theta, t) &= N_x(L, \theta, t) = 0 \\ M_x(0, \theta, t) &= M_x(L, \theta, t) = 0 \\ w(0, \theta, t) &= w(L, \theta, t) = 0 \\ v(0, \theta, t) &= v(L, \theta, t) = 0 \\ \beta_{\theta}(0, \theta, t) &= \beta_{\theta}(L, \theta, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

#### 3.2 자유진동 해석

$n$  자유도를 갖는 계의 경우  $n$ 개로 연성된 이차 상미분 연립 지배방정식으로 표현된다. 이러한 경우 유용하게 사용되는 방법으로 모달해석기법 (Modal analysis technique)을 들 수 있다. 이 방법에서 질량의 변위는 계의 Normal Mode들의 일차결합으로 표현된다. 따라서 충격거동 해석을 수행하기 위해서는 먼저 자유진동 해석을 수행하여야 한다.<sup>(8)</sup>

본 연구에서 고려한 단순지지 경계조건을 만족하는 식(7)의 해를 다음과 같이 가정한다.<sup>(9)</sup>

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n \bar{U}_{mn} \cos \alpha x \cos n \theta T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n U_{mn} T_{mn}(t) \\ v &= \sum_m \sum_n \bar{V}_{mn} \sin \alpha x \sin n \theta T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n V_{mn} T_{mn}(t) \\ w &= \sum_m \sum_n \bar{W}_{mn} \sin \alpha x \cos n \theta T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n W_{mn} T_{mn}(t) \\ \beta_x &= \sum_m \sum_n \bar{X}_{mn} \cos \alpha x \cos n \theta T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n X_{mn} T_{mn}(t) \\ \beta_{\theta} &= \sum_m \sum_n \bar{Y}_{mn} \sin \alpha x \sin n \theta T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n Y_{mn} T_{mn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

한편 하중은

$$q(x, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_{mn} \sin \alpha x \cos n \theta F_{mn}(t) \quad (9b)$$

여기서,  $\alpha = \frac{m\pi}{L}$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$

$n=0, 1, 2, 3, \dots$

식(9a)과 식(9b)는 변위, 회전 및 하중에 관한 이중 Fourier 급수 전개식을 나타낸다.

자유진동의 경우 작용하중  $F(t)=0$ 이며 시간에 관계된 일반화된 좌표  $T_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t}$  ( $i = \sqrt{-1}$ )로 놓고, 물체력을 영(zero)으로 할때, 식(9)을 운동방정식(7)에 대입하면 다음과 같은 자유진동에 관한 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\left[ [k]_{mn} - \omega_{mn}^2 [M]_{mn} \right] \left\{ \bar{\Delta} \right\}_{mn} = \{0\} \quad (10)$$

여기서  $\left\{ \bar{\Delta} \right\}_{mn}^T = \left\{ \bar{U}_{mn}, \bar{V}_{mn}, \bar{W}_{mn}, \bar{X}_{mn}, \bar{Y}_{mn} \right\}$ 으로 자유진동시 고유모드 형태에 관련된다. 행렬 $[k]$ ,  $[M]$ 은  $5 \times 5$ 의 행렬이다. 한편 식(10)의 직교성을 이용하면 정규화된 질량(Normalized mass)은

$$\begin{aligned} J_{mn} &= \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ I_1 (U_{mn}^2 + V_{mn}^2 + W_{mn}^2) \right. \\ & + I_2 (2X_{mn}U_{mn} + 2Y_{mn}V_{mn} + \frac{2}{R}V_{mn}^2) \\ & \left. + I_3 (X_{mn}^2 + Y_{mn}^2 + \frac{2}{R}V_{mn}Y_{mn}) \right\} dx d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

이다.

#### 3.3 충격하중에 의한 동적거동

식(9)을 운동방정식(7)에 대입하고 식(10)를 이용하면<sup>(9)</sup>

$$\left. \begin{aligned} & -\omega_{mn}^2 (I_1 U_{mn} + I_2 X_{mn}) T_{mn}(t) + g_x \\ & = (I_1 U_{mn} + I_2 X_{mn}) \dot{T}_{mn}(t) \\ & -\omega_{mn}^2 \left\{ \left( I_1 + \frac{2}{R} \right) V_{mn} + \left( I_2 + \frac{I_3}{R} \right) Y_{mn} \right\} T_{mn}(t) + g_{\theta} \\ & = \left\{ \left( I_1 + \frac{2}{R} \right) V_{mn} + \left( I_2 + \frac{I_3}{R} \right) Y_{mn} \right\} \dot{T}_{mn}(t) \\ & -\omega_{mn}^2 (I_1 W_{mn}) T_{mn}(t) + q(x, \theta, t) = (L_1 W_{mn}) \dot{T}_{mn}(t) \\ & -\omega_{mn}^2 (I_2 X_{mn} + I_2 U_{mn}) T_{mn}(t) + m_x \\ & = (I_2 X_{mn} + I_2 U_{mn}) \dot{T}_{mn}(t) \\ & -\omega_{mn}^2 \left\{ I_3 Y_{mn} + \left( I_2 + \frac{I_3}{R} \right) V_{mn} \right\} T_{mn}(t) + m_{\theta} \\ & = \left\{ I_3 Y_{mn} + \left( I_2 + \frac{I_3}{R} \right) V_{mn} \right\} \dot{T}_{mn}(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

물체력 및 모멘트  $g_x, g_{\theta}, m_x, m_{\theta}$ 를 일반화된 하중  $Q_{mn}(t)$ 로 표현하면 아래와 같다.

$$Q_{mn}(t) = \frac{\int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} (g_x U_{mn} + g_{\theta} V_{mn} + q W_{mn} + m_x X_{mn} + m_{\theta} Y_{mn}) dx d\theta}{J_{mn}} \quad (13)$$

이 된다.

식(13)을 식(12)에 대입하면 비 연성된 일반화된 좌표  $T_{mn}(t)$ 로 표현되는 상미분 방정식으로 유도할 수 있다.

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \quad (14)$$

한편 식(9a)에서  $p_{mn}$ 은 Fourier 계수로 아래와 같이 표현된다.<sup>(5)</sup>

$$\begin{aligned} n=0, p_{mn} &= \frac{1}{\pi L} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q(x, \theta) \sin \frac{m\pi x}{L} dx d\theta \\ n>0, p_{mn} &= \frac{2}{\pi L} \int_0^L \int_{-\pi}^{\pi} q(x, \theta) \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta dx d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

Fig. 2와 같이 원통셀의 축방향으로  $L/2$  만큼 떨어진 곳을 중심으로 축방향길이  $2l_2$  원주방향 길이,  $2l_1$ 에 균일하중  $q$ 가 작용되는 경우 식(15)의 값은

$$\begin{aligned} p_{m0} &= \frac{4l_1}{\pi^2 mR} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi l_2}{L} \\ p_{mn} &= \frac{8}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi l_2}{L} \sin \frac{n l_1}{R} \end{aligned} \quad (16)$$

물체력 및 모멘트를 영 (zero)이라 하고, 식(13)과 식(16)을 식(14)에 대입하면

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{p_{mn} \bar{W}_{mn} F(t)}{N_{mn}} \quad (17a)$$

여기서

$$\begin{aligned} N_{mn} &= I_1 (\bar{U}_{mn}^2 + \bar{V}_{mn}^2 + \bar{W}_{mn}^2) \\ &+ I_2 (2\bar{x}_{mn} \bar{U}_{mn} + 2\bar{Y}_{mn} \bar{V}_{mn} + \frac{2}{R} \bar{V}_{mn}^2) \\ &+ I_3 (\bar{X}_{mn}^2 + \bar{Y}_{mn}^2 + \frac{2}{R} \bar{Y}_{mn} \bar{V}_{mn}) \end{aligned} \quad (17b)$$

한편 식(17)의 해는

$$T_{mn}(t) = \frac{p_{mn} \bar{W}_{mn}}{N_{mn} \omega_{mn}} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (18)$$

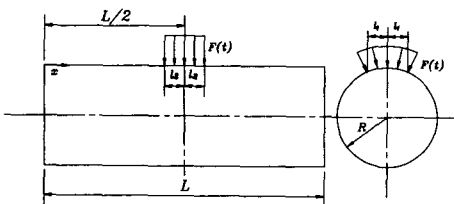


Fig. 2 Distributed load over rectangular area

이 된다.

식(18)를 식(9)에 대입하는 경우 반경방향 변위  $w$  는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} w &= \sum_m \sum_n \frac{p_{mn} \bar{W}_{mn}^2}{N_{mn} \omega_{mn}} \sin \alpha x \cos n\theta \\ &* \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

### 3.4 충격하중의 표현

본 연구에서는 Fig. 3과 같은 계단형파, 싸인형파, 삼각형파, 지수함수형파와 같은 하중 형태를 고려하였다. 식(19)에 나타난 합성 적분항은 작용 하중의 형태에 따라서 해석적으로 구할 수 있다. 각 하중함수에 대한 합성 적분을 실시하면 아래와 같다.

(a) Step Force (Fig. 3a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} F(t) = F_0 & , 0 \leq t \leq t_1 \\ F(t) = 0 & , t > t_1 \end{cases} \\ \int_0^t F(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \\ = F_0 / \omega_{mn} (1 - \cos \omega_{mn} t) & , 0 \leq t \leq t_1 \\ = F_0 / \omega_{mn} [\cos \omega_{mn}(t-t_1) - \cos \omega_{mn} t] & , t > t_1 \end{aligned} \quad (20a)$$

(b) Sine Force (Fig. 3b)

$$\begin{cases} F(t) = F_0 \sin(\pi t / t_1) & , 0 \leq t \leq t_1 \\ F(t) = 0 & , t > t_1 \end{cases}$$

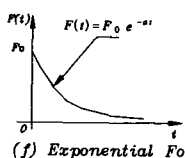
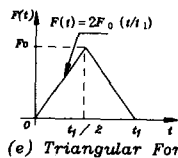
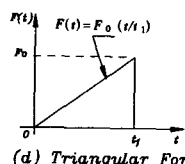
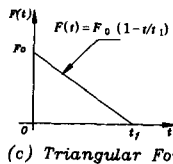
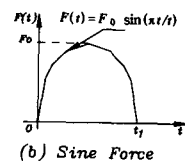
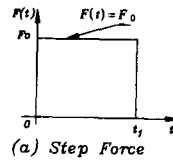


Fig. 3 Force pulse shape

$$\frac{F_0 t_1 [\pi \sin(\omega_{mn} t) - \omega_{mn} t_1 \sin(\pi t / t_1)]}{(\pi^2 - t_1^2 \omega_{mn}^2)}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (20b)$$

$$\frac{F_0 t_1 \pi [\sin(\omega_{mn} t) + \sin \omega_{mn} (t - t_1)]}{(\pi^2 - t_1^2 \omega_{mn}^2)}, \quad t > t_1$$

(c) Triangular Force-1 (Fig. 3c)

$$\begin{cases} F(t) = F_0(1 - t/t_1), & 0 \leq t \leq t_1 \\ F(t) = 0, & t > t_1 \end{cases}$$

$$= F_0 / \omega_{mn} [1 - \cos(\omega_{mn} t) + 1 / (\omega_{mn} t_1) \sin(\omega_{mn} t) - t / t_1], \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$= F_0 [-1 / \omega_{mn} \cos(\omega_{mn} t) + 2 / (\omega_{mn}^2 t_1) \cos \omega_{mn} (t - t_1 / 2) \sin \omega_{mn} (t_1 / 2)], \quad t > t_1 \quad (20c)$$

(d) Triangular Force -2 (Fig. 3d)

$$\begin{cases} F(t) = F_0, & 0 \leq t \leq t_1 \\ F(t) = 0, & t > t_1 \end{cases}$$

$$= F_0 / (\omega_{mn} t_1) [t - 1 / \omega_{mn} \sin(\omega_{mn} t)], \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$= F_0 / (\omega_{mn} t_1) [1 / \omega_{mn} \sin \omega_{mn} (t - t_1) + t_1 \cos \omega_{mn} (t - t_1) - 1 / \omega_{mn} \sin(\omega_{mn} t)], \quad t > t_1 \quad (20d)$$

(e) Triangular Force 3 (Fig. 3e)

$$\begin{cases} F(t) = 2F_0(t/t_1), & t > 0 \\ F(t) = -4F_0(t - t_1/2)/t_1, & t > t_1/2 \\ F(t) = 2F_0(t - t_1)/t_1, & t > t_1 \end{cases}$$

$$= 2F_0 / \omega_{mn} [t/t_1 - \sin(\omega_{mn} t) / (\omega_{mn} t_1)], \quad 0 \leq t \leq t_1/2$$

$$= 2F_0 / \omega_{mn} [1 - t/t_1 - \sin(\omega_{mn} t) / (\omega_{mn} t_1) + 2 \sin \omega_{mn} (t - t_1/2) / (\omega_{mn} t_1)],$$

$$t_1/2 < t \leq t_1 \leq t \leq t_1/2$$

$$= 2F_0 / \omega_{mn} [-\sin(\omega_{mn} t) / (\omega_{mn} t_1) + 2 \sin \omega_{mn} (t - t_1/2) / (\omega_{mn} t_1) - \sin \omega_{mn} (t - t_1) / (\omega_{mn} t_1)], \quad t > t_1 \quad (20e)$$

(f) Exponential Forec (Fig. 3f)

$$F(t) = F_0 e^{-at}, \quad 0 \leq t$$

$$= \frac{F_0 [\omega_{mn} e^{-at} + a \sin(\omega_{mn} t) - \omega_{mn} \cos(\omega_{mn} t)]}{(a^2 + \omega_{mn}^2)}, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad (20f)$$

하중 형태에 따른 합성적분식(20a~f) 를 식 (9) 에 대입 함으로써 각 방향의 변위를 구할 수 있다.

### 4. 수치계산 및 고찰

#### 4.1 자유진동 해석

자유진동 및 충격거동을 고찰하기 위해 사용된 재료는 GFRP(E-glass/Epoxy) 및 CFRP(T300/N5208)로 이들의 물성은 Table 1 에 주어졌다.

고려된 적층의 두께는 각각 0.02 cm이고 총 적층수는 6-적층으로 총 두께는 0.12 cm이다. 고려된 적층각은 역대칭인 경우로 [0/90/0/90/0/90]와 [90/0/0/90/90/0]를 고려 하였으며, 대칭인 경우로는 [90/0/0/90/0/0]를 고려하였다.

자유진동 해석시 해석해와의 비교를 위해서 널리 사용되고있는 유한요소 프로그램인 ABAQUS<sup>(12)</sup>를 사용하여 수치해석이 실시되었다.

Table 2와 Table 3은 본 연구에서 고려하고 있는 CFRP와 GFRP 물성에 대한 셀의 크기, 적층

Table 1 Material properties of using in calculations

Property	Symbol	Units	CFRP <sup>(10)</sup>	GFRP <sup>(11)</sup>
Longitudinal Modulus	E <sub>1</sub>	Gpa	181.0	14.3
Transverse Modulus	E <sub>2</sub>	Gpa	10.3	5.10
Longitudinal Shear Modulus	G <sub>12</sub>	Gpa	7.12	1.86
Transverse Shear Modulus	G <sub>13</sub>	Gpa	7.12	1.86
Transverse Shear Modulus	G <sub>23</sub>	Gpa	2.50	0.69
Longitudinal Poisson's Ratio	ν <sub>12</sub>	-	0.28	0.35
Density	ρ	10 <sup>3</sup> $\frac{kg}{m^3}$	1.60	1.39

**Table 2** Fundamental frequency (Hz) of CFRP cylindrical shells (total thickness=0.12 cm)

Stacking Sequence		[0/90/0/90//90]		[90/0/0/90/90/0]		[90/0/0/0/0/90]		[90/0/0/90/0/0]	
Material		CFRP		CFRP		CFRP		CFRP	
Analysis Method		Analytic	ABAQUS	Analytic	ABAQUS	Analytic	ABAQUS	Analytic	ABAQUS
R=20 cm	L=20 cm	825.3	826.7	837.9	839.9	906.1	899.9	781.7	761.0
	L=50 cm	378.9	376.9	385.9	381.0	430.1	426.3	364.5	361.6
	L=100 cm	204.7	198.7	209.6	201.5	239.6	230.7	191.9	184.1
R=10 cm	L=50 cm	537.8	516.8	547.9	520.4	613.5	582.4	526.1	506.0

**Table 3** Fundamental frequency (Hz) of CFRP cylindrical shells (total thickness=0.12 cm)

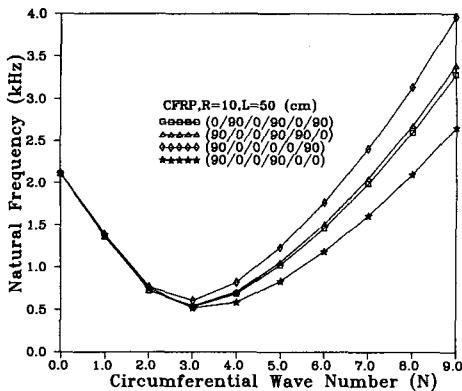
Stacking Sequence		[0/90/0/90/0/90]		[90/0/0/90/90/0]		[90/0/0/0/0/90]		[90/0/0/90/0/0]	
Material		CFRP		CFRP		CFRP		CFRP	
Analysis Method		Analytic	ABAQUS	Analytic	ABAQUS	Analytic	ABAQUS	Analytic	ABAQUS
R=20 cm	L=20 cm	349.3	339.0	354.9	333.9	375.0	356.8	351.3	321.3
	L=50 cm	146.0	146.4	148.7	145.1	158.3	155.7	150.8	144.1
	L=100 cm	74.2	73.2	75.8	72.4	81.6	78.6	75.4	70.1
R=10 cm	L=50 cm	202.4	197.8	206.3	195.6	220.4	210.0	210.0	195.9

각에 따른 기본진동수에 대한 해석해와 수치해를 나타내고있다. 결과에서 CFRP의 경우 대칭으로 적층된 경우 가장 높은 진동수를 나타내며, 역대칭 적층 그리고 비대칭 적층 순서로 나타난다. 유사하

게 Table 3의 GFRP 결과에서도 대칭으로 적층된 경우 진동수가 가장 높게 나타나고있다. 한편 해석해와 수치해의 비교에서는 CFRP의 경우 R=20 cm인 모든 적층에서 해석해와 수치해가 잘 일치하고 있으나, 반면 GFRP의 경우 R=20, L=20 cm인 경우 해석해와 수치해 사이의 불일치가 나타남을 알 수 있다.

Fig. 4은 CFRP 물성으로 R=10, L=50 cm인 원통셸의 적층각 변화에 따른 진동수를 보여준다. 대칭으로 적층된 경우 높은 진동수를 나타내고 있으며, 고유진동수 차이는 원주방향 Wave Number (N)가 작을때 서로 유사하고 N=3이상에서는 진동수 차가 발생한다.

Fig. 5은 GFRP 물성으로 [0/90/0/90/0/90] 적층된 원통셸의 길이에 따른 진동수 변화를 보여주고있다. 고유진동수는 원주방향의 Wave Number (N)가 작을수록 크게 영향을 받으며 N이 증가함에 따라서 서로 일치하는 경향을 보인다.



**Fig. 4** Natural frequencies of CFRP composite cylindrical shell with various circumferential wave number (N) and stacking sequence (Longitudinal wave number M=1 and L=50 cm, R=10 cm)

**4.2 충격하중 하의 동적응답**

구해진 진동수를 이용하는 모달해석기법(modal

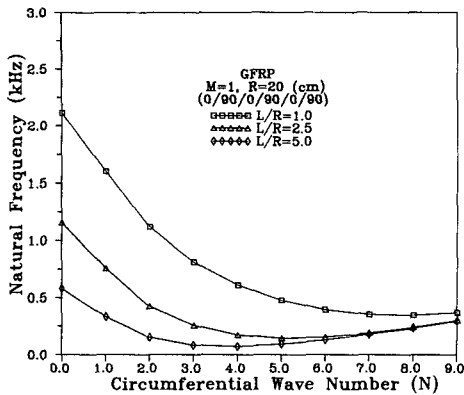


Fig. 5 Natural frequencies of [0/90/0/90/0/90] laminated GFRP composite cylindrical shell with various circumferential wave number (N) (Longitudinal wave number M=1 and L=20, 50, 100 cm, R=20 cm)

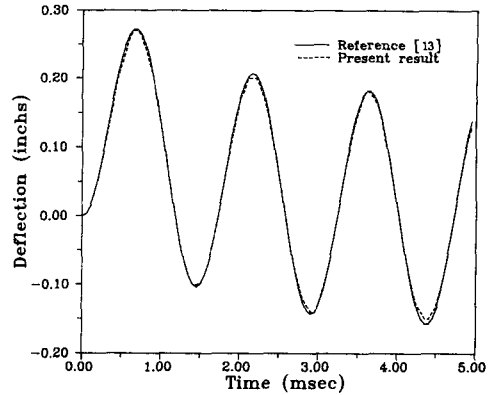


Fig. 6 A comparison of center deflection of cylindrical shell on Reference<sup>(13)</sup> ( $E_1=19.0$  Ms,  $E_2=1.58$  Ms,  $G_{12}=G_{13}=0.82$  Ms,  $G_{23}=0.523$  Ms,  $\nu=0.24$ ,  $\rho=0.00012$  lb s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup>, L=40 in, L/R=4, R/h=10,  $F_0=750$  psi,  $Q(t)=F_0 F(t)$ , Exponential Pulse(660), [0/90])

analysis technique)을 이용하여 극부적인 충격력이 작용할때 여러 형상비(L/R), 적층각 및 물성의 변화를 고려하여 복합재료 원통셸의 동적거동을 연구하였다. 해석에서는 급수들의 충분한 충분한 수렴성을 고려하여  $m \times n=20 \times 30$ 을 고려하였다.

일반적으로 싸인파, 삼각파, 지수함수와 형태의 하중이 작용할때 보다 계단파 형태의 하중이 작용할때 변위가 가장 크게 발생하며, 하중 작용시간이 기본진동수의 고유주기와 같을때 정적하중으로 작용할때의 두배정도로 알려져있다.<sup>(1)</sup> 따라서 본연구에서는 하중지속시간을 기본진동수의 고유주기로 택하여 수행하였다. 하중 작용면적은 원주방향 및 축방향에 대하여 10%의 길이를 선택하여 계산을 수행하였다.

Fig. 6에서는 본 연구의 결과와 공간변수기법(State variable technique)을 이용한 Khdeir등<sup>(13)</sup>의 결과를 비교하였다. 이때의 하중 형태는 지수함수파로 지수의 차수(a)는 660을 사용하고 있으며 하중은 셸의 전면적에  $F_0=750$  psi가 작용한다. 적층각은 [0/90]이며 모달해석기법의 결과와 공간변수기법의 결과가 잘 일치함을 보여주었다.

Fig. 7은 [0/90/0/90/0/90]로 적층된 CFRP 원통셸의 각 하중형태에 따른 동적 변위거동을 나타내고 있다. 셸의 크기는 R=20, L=20 cm 이고 작용하중 면적은 축방향 길이와 원주방향 길이의 10%인  $6.2 \times 2$  cm 이며, 하중크기는 -300 kN이다. 일반적으로 예상되듯이 계단파 형태의 하중을 받을때

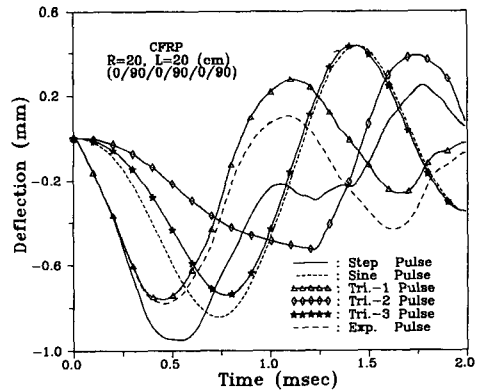


Fig. 7 Time response of center point deflection w of CFRP cylindrical shell for various pulses( $l_1 \times l_2=3.1 \times 1.0$  cm, R=20 cm, L=20 cm,  $F_0=-300$  kN)

가장큰 변위가 발생하며, 싸인파 순으로 변위가 크게 나타난다. 그림에서 보이고 있는것과 같이 싸인파와 삼각형-3 하중의 경우 유사한 변위거동을 보이며, 또한 삼각형-1파와 지수함수파 형태 하중의 경우에도 유사한 변위거동을 보여주었다. 삼각형-2 형태의 하중이 작용되는 경우 하중이 작용되는 시간동안은 계속적으로 변위가 증가함을 보이고있다.

Fig. 8, 9은 [0/90/0/90/0/90]로 적층된 CFRP 원통셸의 각 하중형태에 따른 동적 변형( $\epsilon_x, \epsilon_\theta$ )거동



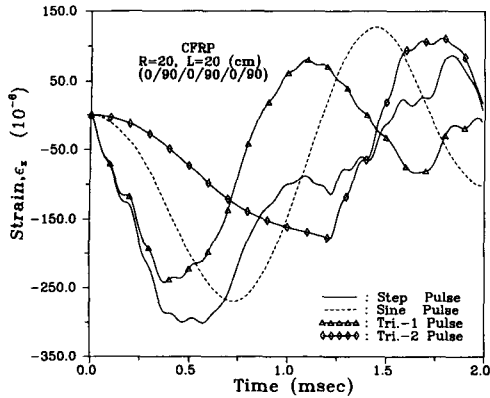


Fig. 8 Time response of center point strain  $\epsilon_x$  of CFRP cylindrical shell for various pulses ( $l_1 \times l_2 = 3.1 \times 1.0$  cm,  $R = 20$  cm,  $L = 20$  cm,  $F_0 = -300$  kN)

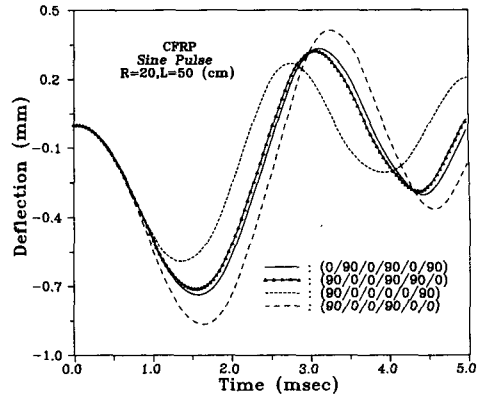


Fig. 10 Time response of center point deflection  $w$  under sine pulse for various angle ply composite cylindrical shell (CFRP,  $l_1 \times l_2 = 3.1 \times 2.5$  cm,  $R = 20$  cm,  $L = 50$  cm,  $F_0 = -70$  kN)

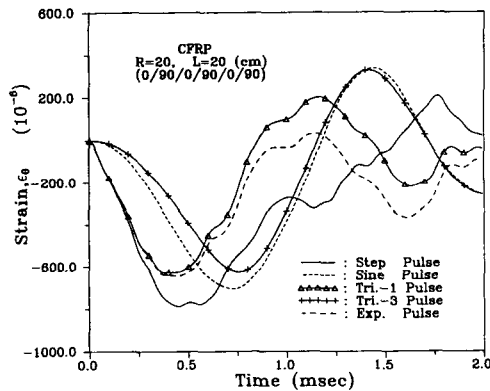


Fig. 9 Time response of center point strain  $\epsilon_0$  of CFRP cylindrical shell for various pulses ( $l_1 \times l_2 = 3.1 \times 1.0$  cm,  $R = 20$  cm,  $L = 20$  cm,  $F_0 = -300$  kN)

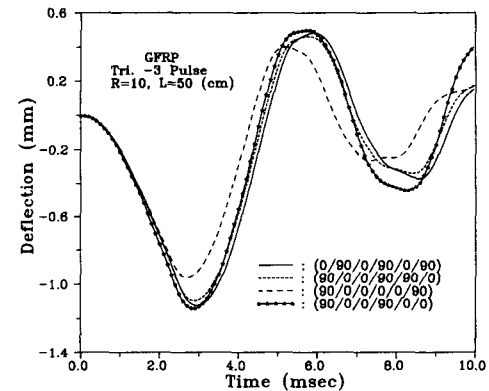


Fig. 11 Time response of center point deflection  $w$  under triangular-3 pulse for various angle ply composite cylindrical shell (GFRP,  $l_1 \times l_2 = 1.5 \times 2.5$  cm,  $R = 20$  cm,  $L = 50$  cm,  $F_0 = -50$  kN)

을 나타내고있다. 셸의 크기는  $R = 20$ ,  $L = 20$  cm 이고 작용하중 면적은 축방향 길이와 원주방향 길이의 10%인  $6.2 \times 2$  cm이며, 하중의 크기는  $-300$  kN이다. 변위 거동과 유사하게 가장 큰 변형률은 계단과 형태의 하중을 받을때, 싸인파 순으로 나타난다.

Fig. 10은  $R = 20$ ,  $L = 50$  cm인 CFRP 원통셸이 싸인 형태의 하중을 받을때 이의 동적 변위거동을 여러적층 방법에 따른 변화를 도시하고있다. 하중의 작용면적은  $6.2 \times 5$  cm이고 하중크기는  $-70$  kN이다. 고유진동수가 가장높은  $[90/0/0/0/0/90]$  적층셸에서 가장 작은 변위거동을 보이며 고유진동수가

가장 작은  $[90/0/0/90/0/0]$  적층셸의 변위가 가장 크게 발생하고있다.

Fig. 11은  $R = 10$ ,  $L = 50$  cm인 GFRP 원통셸이 삼각형-3 형태의 하중을 받을때 이의 동적 변위거동을 여러적층 방법에 따라서 도시하고있다. 하중의 작용면적은  $3.2 \times 5$  cm이고 하중크기는  $-50$  kN이다. 고유진동수가 가장높은  $[90/0/0/0/0/90]$  적층셸에서 가장 작은 변위거동을 보이며, 고유진동수가 가장 작은  $[0/90/0/90/0/90]$  적층셸에서 변위가 가장크게 발생하고 있다. 한편 이러한 변위거동은 시간이 경과함에 따라 변화함을 보이고 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서 CFRP(T300/N5208)와 GFRP(E-glass/Epoxy)의 복합재료 원통셀의 자유진동해석 및 충격하중하의 동적거동을 일차진단변형 셀이론을 이용한 이론해석과 ABAQUS를 이용한 수치해석을 수행하여 얻은 결론은 다음과 같다.

### (1) 자유진동 해석

CFRP와 GFRP모두 대칭적으로 적층된 [90/0/0/0/90]의 경우 가장 높은 진동수를 나타내었고 형상비가 다른경우 고유진동수는 원주방향 Wave Number(N)가 작을때 큰 차이가 나타나며 N이 증가함에 따라 유사한 값을 갖는다. 이론해석의 결과와 ABAQUS를 이용한 FEM 해석의 결과를 비교하였으며 그 유용성을 확인하였다.

### (2) 충격하중하의 동적응답

계단파, 싸인파, 삼각파, 지수함수파 형태의 하중이 작용할 경우 같은 하중 지속시간에서는 계단파 하중이 가장큰 변위를 발생하고, 동일 강도의 하중이 원통셀 전체 표면에 대해 동일한 작용면적비를 갖는 경우 고유주기가 클수록, 즉 기본진동수가 낮을수록 최대변위가 크게 발생 함을 알수있다. 또한 고유주기가 클수록 변위거동의 주기도 길어짐을 알 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Dobyns, A. L., 1981. "Analysis of Simply Supported Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Load," AIAA J., vol. 19. no. 5. pp. 642~650.
- (2) Ramkumar, R. L. and Chen, P. C., 1983. "Low Velocity Impact Response of Laminated Plates," AIAA. J., vol. 21. no. 10. pp. 1448~1452.
- (3) 이영신, 강근희, 박 웅, 1991, "혼합적층된 복합재료 평판의 저속충격응답," 대한기계학회논문집, 제15권, 제3호, pp. 713~722.
- (4) 최익현, 홍창선, 이 인, 1991. "복합재료판의 저속충격 거동에 대한 비선형 해석," 대한기계학회논문집, 제15권, 제3호, pp. 757~770.
- (5) Cederbaum, G. and Heller, R. A., 1989. "Dynamic Deformation of Orthotropic Cylinders," Trans. of ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, vol. 111. no. 2. pp. 97~101.
- (6) Reddy, J. N. and Khdeir, A. A., 1989. "Dynamic Response of Cross-ply Laminated Shallow Shells According to a Refined Shear Deformation Theory," Journal Acoustical Society of America, vol. 85. no. 6. pp. 2423~2431.
- (8) Christoforou, A. P. and Swanson, S. R., 1990, "Analysis of Simply Supported Orthotropic Cylindrical Shells Subject to Lateral Impact Loads," Trans. of ASME, Journal of Applied Mechanics. vol. 57. no. 2. pp. 376~382.
- (8) Rao, S. S., 1990. "Mechanical Vibration-2nd ed," Addison-Wesley Publishing Company.
- (9) Khdeir, A. A. and Reddy, J. N., 1989, "Exact Solution for the Transient Response of Symmetric Cross-Ply Laminates Using a Higher-Order Plate Theory," Composites Science and Technology, vol. 34. pp. 205~224.
- (10) Tsai S. W., 1988, "Composite Design," 4th ed. Think Composites, Dayton.
- (11) Bicos, A. S., 1987. "Free Damped Vibration of Composite Plates and Shells," Ph. D. Dissertation, Stanford University.
- (12) Hibbit, H. D., and Karlsson, B. I., 1991. "ABAQUS: User's Manual," Hibbit, Karlsson, and Sorenson. Inc.
- (13) Khdeir, A. A., Reddy, J. N. and Frederick, D., 1990. "On The Transient Response of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells," International Journal of Impact Engineering, vol. 9. no. 4. pp. 475~484.