

〈論 文〉

벽온도분포가 정현파인 원관에서 왕복유동에 의한 열전달 해석

이대영* · 박상진* · 노승탁**

(1993년 7월 10일 접수)

Heat Transfer by an Oscillating Flow in a Circular Pipe with Sinusoidal Wall Temperature Distributions

Dae-Young Lee, Sang-Jin Park and Sung Tack Ro

Key Words : Oscillating Flow(왕복유동), Sinusoidal Wall Temperature Distribution(정현파 벽온도분포), Oscillating Frequency(왕복유동 주파수), Swept Distance Ratio(왕복거리 비), Nusselt Number(Nusselt수)

Abstract

Heat transfer characteristics of the laminar oscillating flow in a circular pipe have been studied under the condition that the wall temperature of the pipe is distributed sinusoidally with the axial direction. The axial velocity was assumed to be uniform in radial direction and the temperature field was analyzed by means of the perturbation method. The results show that the difference between wall and section-time-averaged fluid temperature increases as the oscillating frequency increases and eventually converges to a constant value which is determined by the ratio of swept distance to the characteristic length of wall temperature distribution. Also it is shown that the dominant variable in the heat transfer process when swept distance ratio is greater than 1 is not thermal Womersley number (F) but thermal Womersley number multiplied by the square root of swept distance ratio. The variation of the time-averaged Nusselt number is obtained as a function of F . The results indicate that Nusselt number is proportional to $F\epsilon^{1/2}$ when both of F and ϵ are much greater than 1.

———— 기 호 설 명 ————

$a_{m,n,k}$: 상수
 $C_{n,k}$: ϵ 의 함수, $C_{m,k}(\epsilon) = (-1)^{k-1} 2J_{n-k}(2\epsilon)J_k(2\epsilon)$
 F : 무차원화된 왕복유동 주파수, $F = R\sqrt{\omega/\alpha}$
 g_k : 경계조건을 만족하는 r 의 함수,

$$g_k(r) = 1 - \frac{I_0(F\sqrt{ik}r)}{I_0(F\sqrt{ik})}$$

 I_n : Modified Bessel function of the first kind

of order n

i : $\sqrt{-1}$
 J_n : Bessel function of the first kind of order n
 l : 유체의 진동거리 [m]
 l_w : 벽온도의 길이방향 변화주기 [m]
 m, n, k : 정수
 Nu : 원관반경을 특성길어로 한 Nusselt수
 Pr : Prandtl수

*정회원, 서울대학교 기계공학과 대학원
 **정회원, 서울대학교 기계공학과

q_w : 무차원 벽면 열유속, $q_w = \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=1}$

- R : 원관의 반지름[m]
- r : 무차원 반경방향 좌표, $r=r^+/R$
- r^+ : 반경방향 좌표[m]
- T : 무차원온도, $T=T^+/T_a^+$
- T_m : m 차 섭동방정식의 해
- T^+ : 온도[°C]
- T_a^+ : 벽온도의 길이방향 변화진폭[°C]
- t : 시간[s]
- u : 유속[m/s]
- x : 무차원 길이방향 좌표, $x=2\pi x^+/l_w$
- x^+ : 원관의 길이방향 좌표[m]
- α : 열확산계수[m²/s]
- ϵ : 벽온도분포의 특성길이에 대한 왕복거리의 비, $\epsilon=\pi l/2l_w$
- ξ : Lagrangian 관점에서 본 유체입자의 상대 위치, $\xi=x-2\epsilon\sin\tau$
- $\theta_{m,n}$: T_m 의 n 번째 주파수 성분
- τ : 무차원시간, $\tau=\omega t$
- ω : 왕복유동 각속도[rad/s]
- $\text{Re}[z]$: 복소수 z 의 실수부
- z^* : 복소수 z 의 켈레복소수 (complex conjugate)
- $\langle \rangle$: 단면평균, $\langle g \rangle = 2 \int_0^1 g r dr$
- $\bar{}$: 시간평균, $\bar{g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g d\tau$

1. 서 론

관내의 맥동유동이나 순수 왕복유동에 의하여 축방향으로의 물질전달이 향상된다는 것이 Chawin,⁽¹⁾ Jaeger⁽²⁾등에 의하여 알려졌으며 이러한 연구 결과는 인체공학의 분야에서 호흡 및 순환계에서의 물질전달 현상을 이해하는데 많은 도움이 되고 있다. 이후 Kurzweg^(3,4,5)은 물질전달과 열전달의 상사성에 착안, 채널의 벽면 온도구배가 축방향으로 일정한 경우에 대한 해석을 통하여, 왕복유동에 의하여 축방향으로의 열전달 역시 물질전달과 마찬가지로 크게 향상된다는 연구결과를 발표하였다. 이 연구에서 Kurzweg은 왕복유동이 있을 때의 열전달과정에 있어서, 물질전달을 향상시키는 원인인 2차원적인 속도분포의 영향뿐만 아니라, 벽면의 주기적인 열흡수/방출효과가 축방향 열전달 향상에 큰 역할을 하는 것을 보였다. Gedeon⁽⁶⁾은 Kurzweg의 결과를 이용하여 마찰계수와 Nusselt수를 구하였

고, Peattie⁽⁷⁾등은 단면적이 변하는 원관내에서 축방향으로의 유효 열전도율을 측정하였으며 Kaviany⁽⁸⁾는 마찰소산과 유한한 벽두께에 의한 효과를 고려하여 왕복유동에 의한 열확산을 연구하였다.

한편 근래에 와서 스테링 기관에 대한 관심이 높아짐에 따라 이러한 연구결과를 스테링 기기의 열교환기 해석에 적용하려는 시도가 이루어지고 있다. 스테링 기기는 외연기관이기 때문에 외부와의 열전달이 전체 기기성능에 큰 영향을 미치게 되며, 한편 열교환기가 차지하는 부피는 작동유체의 압축과 팽창에 기여하지 않는 불용체적으로서, 기기 출력을 향상시키기 위해서는 이 열교환기 부피를 필요한도의 최소 크기로 설계하여야 하므로 열교환기의 성능이 전체 기기성능을 좌우하는 중요한 인자가 된다.⁽⁹⁾

이러한 관점에서 Kornhauser⁽¹⁰⁾등은 Gedeon⁽⁶⁾의 연구결과를 자유피스톤 스테링기관 (free piston stirling engine)의 기체 스프링의 해석에 응용한 바 있으나 스테링 기기의 열교환기에서는 열교환기 외벽면을 통한 열의 출입으로 열교환기 벽면의 축방향 온도 기울기가 일정하지 않게 되므로 Kurzweg 등의 연구결과를 직접 적용하기에는 무리가 따르게 된다.

따라서 스테링 기기의 열교환기에서의 열전달과정을 연구하기 위해서는 파이프 벽면의 온도분포가 축방향으로 임의의 벽온도 구배를 가질 때의 열전달 현상에 대한 연구가 필요하다. 본 연구에서는 벽온도구배가 일정하지 않을 때 왕복유동이 열전달에 미치는 영향을 고찰하기 위하여 벽온도가 축방향으로 정현파로 분포되어 있을 경우에 대하여 적절한 모델링과 perturbation 방법에 의하여 원관내부의 열전달과정을 해석하였다.

임의의 벽온도분포를 가지는 경우의 해는 이 벽온도분포를 푸리에급수 (fourier series)로 전개하여 각각의 정현파 벽온도분포에 대한 해를 중첩하여 얻을 수 있으므로, 본 연구에서는 이러한 해석방법의 기초가 되는 벽온도가 정현파로 분포된 경우의 열전달과정을 연구하였다.

2. 해 석

Fig. 1과 같이 무한히 긴 원관의 내부에 층류 왕복유동이 형성되고 벽면온도가 축방향으로 정현파로 분포되어 있는 경우에 대하여 온도장의 해를 구

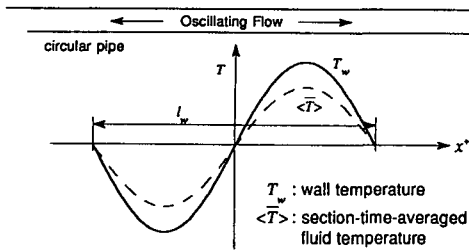


Fig. 1 Analysis model

한다.

관 내부에서 유체가 왕복유동할 때, 엄밀하게는 벽면의 온도도 한 주기내에서 진동하게 되나 Kaviany⁽⁸⁾의 연구에 의하여 이러한 효과는 관벽의 열용량이 유체의 열용량에 비하여 상당히 클 때에는 거의 무시할 수 있다고 알려져 있으므로 본 해석에 있어서 관 내벽면의 온도는 왕복유동의 위상각에 관계없이 일정하다고 가정하였다. 또한 일반적인 경우 열교환기의 특성길이(관경)가 반경에 비해 상당히 크므로 축방향 전도의 영향을 무시할 수 있으며 해석의 편의를 위하여 모든 물성치는 온도에 무관하게 일정하다고 놓으면 에너지 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial T^+}{\partial t} + u \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = \alpha \frac{1}{r^+} \frac{\partial}{\partial r^+} \left(r^+ \frac{\partial T^+}{\partial r^+} \right)$$

$$\frac{\partial T^+}{\partial r^+} \Big|_{r^+=0} = 0, \quad T^+ \Big|_{r^+=R} = T_a^+ \sin(2\pi x^+ / l_w) \quad (1)$$

위의 식에서 R 은 원관의 반지름이고 l_w 는 벽온도분포 형태의 길이방향의 주기이며 Fig. 1에 나타낸 바와 같다.

벽면의 축방향온도 기울기가 일정할 때에는 $\partial T^+ / \partial x^+$ 를 x^+ 와 t 에 무관하게 일정하다고 할 수 있으며 이 경우의 해는 Kurzweg⁽⁹⁾이 구한 바 있다.

본 연구의 목적은 축방향으로의 비선형적인 벽온도분포가 열전달에 미치는 영향을 해석하는 것이므로 해석의 편의를 위하여 반경방향으로 속도가 일정하다고 가정한다. 이러한 가정을 통한 해석은 작동 유체의 Pr 이 무한히 작은 경우에 해당하며, Kurzweg의 결과를 참고할 때 $Pr \ll 1$ 인 경우의 해가 $Pr \approx 1$ 인 경우의 해와 정성적으로 일치하는 것을 알 수 있으므로 이러한 가정에 의한 해석 결과로부터 반경방향으로 속도분포를 가지는 실제 상황에서의 열전달 현상을 정성적으로 예측할 수 있을 것으로 생각한다.

이 가정을 적용하여 유체의 속도를 다음식과 같

이 가정한다.

$$u = \frac{l\omega}{2} \cos \omega t \quad (2)$$

여기서 l 은 유체입자의 길이방향 진동거리이고 ω 는 각속도이다.

다음의 무차원변수

$$T = \frac{T^+}{T_a^+}, \quad \tau = \omega t, \quad x = 2\pi \frac{x^+}{l_w}, \quad r = \frac{r^+}{R} \quad (3)$$

를 도입하여 지배방정식을 무차원화하면 아래와 같이 된다.

$$F^2 \frac{\partial T}{\partial \tau} + 2F^2 \varepsilon \cos \tau \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad T \Big|_{r=1} = \sin x$$

$$F = R \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}, \quad \varepsilon = \frac{\pi l}{2l_w} \quad (4)$$

위식에서 F 는 왕복 주파수를 무차원화한 수로 Stokes의 열경계층 두께에 대한 반경의 비이며 ε 은 벽온도분포의 특성 길이에 대한 왕복거리의 비를 나타내는 무차원수이다.

Perturbation 방법을 도입하여 T 를 다음의 식

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m T_m \quad (5)$$

와 같이 가정하여 지배방정식에 대입한 다음, 같은 차수의 ε 에 대하여 정리하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\varepsilon^0 : \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0,$$

$$T_0 \Big|_{r=1} = \sin x \quad (6)$$

$$\varepsilon^m : F^2 \frac{\partial T_m}{\partial \tau} + 2F^2 \cos \tau \frac{\partial T_{m-1}}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_m}{\partial r} \right),$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad T_m \Big|_{r=1} = 0 \quad (m \geq 1) \quad (7)$$

식(6)으로부터

$$T_0 = \sin x \quad (8)$$

임을 알 수 있다.

$m \geq 1$ 인 경우의 T_m 을

$$T_m = \begin{cases} \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{m/2} \theta_{m,2n} e^{2ni\tau} \right] & m : \text{짝수} \\ \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{(m+1)/2} \theta_{m,2n-1} e^{(2n-1)i\tau} \right] & m : \text{홀수} \end{cases} \quad (9)$$

과 같이 가정하여 식(7)에 대입하고 다음의 관계식

$$\begin{aligned} \cos r \operatorname{Re}[\theta] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[(\theta + \theta^*) e^{i\tau}] \\ \cos r \operatorname{Re}[\theta e^{i\tau}] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\theta e^{i(n-1)\tau} + \theta e^{i(n+1)\tau}] \\ &\quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (10)$$

을 이용하여 정리하면 $\theta_{m,n}$ 에 대한 상미분방정식을 얻을 수 있다. 이 식에서 θ^* 는 θ 의 켈레복소수 (complex conjugate)를 나타낸다.

$\theta_{m,n}$ 은 다음식과 같은 형태로 구할 수 있다.

m : 짝수

$$n=0, \quad \theta_{m,0} = \sum_{k=1}^{m/2} a_{m,0,k} g_k \sin x$$

$$n=2, 4, 6, \dots, m, \quad \theta_{m,n} = \sum_{k=(n-m)/2, k \neq 0}^{(m+n)/2} a_{m,n,k} g_k \sin x$$

m : 홀수

$$n=1, 3, 5, \dots, m, \quad \theta_{m,n} = i \sum_{k=(n-m)/2, k \neq 0}^{(m+n)/2} a_{m,n,k} g_k \cos x \quad (11)$$

위식에서 g_k 는 다음과 같이 경계조건을 만족하도록 정의된 반경방향, r 의 함수이다.

$$g_k(r) = 1 - \frac{I_0(F\sqrt{ik}r)}{I_0(F\sqrt{ik})} \quad (12)$$

I_n : modified Bessel function of the first kind of order n

식(8)과 식(9)를 식(5)에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} T &= \sin x + \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \{ \theta_{2m,0} \epsilon^{2m} + \sum_{n=1}^m (\theta_{2m,2n} \epsilon^{2m} e^{2ni\tau} \right. \\ &\quad \left. + \theta_{2m-1,2n-1} \epsilon^{2m-1} e^{(2n-1)i\tau}) \} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

이 된다. 여기에 식(11)을 대입하고 합의 순서를 바꾸어 주파수에 따라 정리하면

$$\begin{aligned} T &= \sin x + \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m a_{2m,0,k} \epsilon^{2m} g_k \sin x \right. \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-m+n, k \neq 0}^{m+n} a_{2m,2n,k} \epsilon^{2m} g_k e^{2ni\tau} \sin x \\ &\quad \left. + i \sum_{k=-m+n, k \neq 0}^{m+n-1} a_{2m-1,2n-1,k} \epsilon^{2m} g_k e^{(2n-1)i\tau} \cos x \right] \\ &\equiv \sin x + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} g_k \sin x \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} g_k e^{2ni\tau} \sin x \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} g_k e^{(2n-1)i\tau} \cos x \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

와 같이 나타낼 수 있으며 $C_{n,k}$ 는 다음 식으로 구하여진다.

$$C_{n,k} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k-1} (2m+n)! \epsilon^{2m+n}}{m! (m+n)! \Pi(m+k) \Pi(m+n-k)} \quad (15)$$

이때 $\Pi(n)$ 은 Gauss 함수이다.

위식에서 무한수열의 합의 형태로 구한 $C_{n,k}$ 는 다음 과정⁽¹¹⁾을 이용하여 베셀함수 (Bessel function)의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} C_{n,k} &= (-1)^{k-1} 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^m \epsilon^{2m+n}}{m! (m+n)!} \right. \\ &\quad \left. \int_0^{\pi/2} (2 \cos v)^{2m+n} \cos(n-2k)v dv \right] \\ &= (-1)^{k-1} \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(n-2k)v \times J_n(4\epsilon \cos v) dv \\ &= (-1)^{k-1} 2 J_{n-k}(2\epsilon) J_k(2\epsilon) \end{aligned} \quad (16)$$

J_n : Bessel function of the first kind of order n

위식(16)의 관계를 이용하면 부록에 나타낸 바와 같이 식(14)는 F 나 ϵ 에 관계없이 항상 수렴함을 알 수 있으므로 식(14)로부터 모든 위치 및 시간에 서의 유체온도를 구할 수 있다.

3. 왕복운동 주파수와 왕복거리가 열전달에 미치는 영향

유체의 단면 평균온도와 벽면 열유속은 다음식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &= \sin x + \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} \langle g_k \rangle \sin x \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} \langle g_k \rangle e^{2ni\tau} \sin x \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} \langle g_k \rangle e^{(2n-1)i\tau} \cos x \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} q_w &= \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} g'_k \sin x \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} g'_k e^{2ni\tau} \sin x \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} g'_k e^{(2n-1)i\tau} \cos x \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

$\langle g_k \rangle$ 와 g'_k 는 각각 g_k 의 단면평균과 벽면에서의 기울기를 나타내며 다음식과 같다.

$$\langle g_k \rangle = 1 - \frac{2}{F\sqrt{ik}} \frac{I_1(F\sqrt{ik})}{I_0(F\sqrt{ik})} \quad (19)$$

$$g'_k = -F\sqrt{ik} \frac{I_1(F\sqrt{ik})}{I_0(F\sqrt{ik})} \quad (20)$$

식(17)을 이용하여 벽온도와 유체의 면적-시간

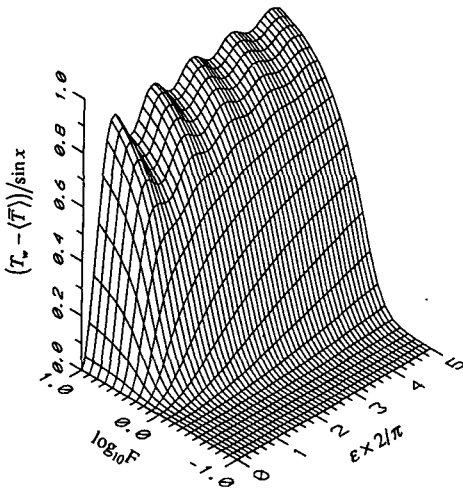


Fig. 2 Difference between wall and section-time-averaged fluid temperature as a function of F and ε

평균온도의 차이를 sin x로 나눈 값을 Fig. 2에 나타내었다. 그림으로부터 F가 작을 때 온도차는 거의 없으며 F가 커질수록 점차 커져서 ε에 따라 차이가 있기는 하지만 대략 1에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 이 값이 1로 수렴하는 것은 유체의 단면-시간 평균온도가 0이 되는 것을 의미한다.

F → 0일 때 <g_k>는

$$\langle g_k \rangle \sim \frac{1}{48} k^2 F^4 + i \frac{1}{8} k F^2 \tag{21}$$

가 되므로 이를 식(17)에 대입하여 F가 작을 때의 유체의 단면 및 시간에 대한 평균온도를 구하면 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned} \langle \bar{T} \rangle &\sim \left\{ 1 - \frac{1}{24} F^4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 J_k^2(2\epsilon) \right\} \sin x \\ &= \left(1 - \frac{1}{24} F^4 \epsilon^2 \right) \sin x \end{aligned} \tag{22}$$

위식으로부터 F가 작아지면 벽면과 유체의 단면-시간 평균온도의 차이는 F⁴과 ε²에 비례하는 것을 알 수 있으며 극단적으로 F나 ε이 0이 되면, 즉 유동이 없을 경우에는 유체의 온도가 벽온도와 같아지게 된다. F가 작을 때에는 왕복유동의 주기와 같은 주기를 가지는 온도변동 성분의 진폭이 F²ε에 비례하는 것을 보일 수 있는데, 이는 벽온도 기울기가 일정할 때 온도변동 진폭이 F²과 벽온도의 기울기에 비례하는 것과 유사한 결과이다. 벽온도

가 정현파 형태로 분포되어 있는 경우에는 왕복유동(진폭이 F²ε에 비례)과 이 왕복유동에 동기되는 온도변동(진폭이 F²ε에 비례)의 간섭으로 인하여 벽면과 유체의 단면-시간 평균온도 사이에 차이가 생기게 되며 이 차이는 F⁴ε²에 비례하게 된다.

한편 F → ∞일 때

$$\langle g_k \rangle \sim 1 \tag{23}$$

인 것을 이용하여 유체의 단면 평균온도의 극한값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle T \rangle &\sim \sin x + \text{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} \sin x \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n,k} e^{2n i \tau} \sin x \right. \\ &\quad \left. + i \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} C_{2n-1,k} e^{(2n-1) i \tau} \cos x \right\} \\ &= J_0^2(2\epsilon) \sin x \\ &\quad + 2J_0(2\epsilon) \text{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_{2n}(2\epsilon) e^{2n i \tau} \sin x \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i J_{2n-1}(2\epsilon) e^{(2n-1) i \tau} \cos x \right\} \right] \end{aligned} \tag{24}$$

F가 클 때 유체의 단면 평균온도는 F에 관계없이 ε만에 의하여 결정됨을 알 수 있다.

위식은 다음의 식

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\xi + 2\epsilon \sin \tau) d\tau, \quad \xi = x - 2\epsilon \sin \tau \tag{25}$$

으로 정리할 수 있으며, 이때 ξ는 Lagrangian 관점에서 본 유체입자는 상대적인 위치이다. 따라서 식(25)는 유체입자가 왕복운동을 하면서 경험하는 벽온도의 시간평균값을 나타내는 것을 알 수 있으며, 결국 F가 커질 경우 Lagrangian 관점에서 본 유체입자의 단면 평균온도는 시간에 의존함이 없이 단지 왕복유동에 의하여 경험하게 되는, 시간에 따라 변화하는 벽온도의 시간평균값으로 일정하게 유지됨을 알 수 있다. 이 결과로부터 F가 증가하면 벽면으로부터의 열전달 효과는 벽면근처의 좁은 영역에 국한되어 유체의 단면 평균온도에는 거의 영향을 미치지 않음을 알 수 있다.

한편 벽면 열유속에 대하여 다음의 식

$$F \rightarrow 0 \quad g'_k \sim -\frac{1}{16} k^2 F^4 - i \frac{1}{2} k F^2 \tag{26}$$

$$F \rightarrow \infty \quad g'_k \sim -F \sqrt{k/2} - i F \sqrt{k/2} \tag{27}$$

을 이용하여 점근함수를 구하면 다음과 같다.

$$F \rightarrow 0 \quad \bar{q}_w \sim \frac{1}{8} F^4 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 J_k^2(2\epsilon) \sin x$$

$$= \frac{1}{8} F^4 \epsilon^2 \sin x \quad (28)$$

$$F \rightarrow \infty \quad \bar{q}_w \sim \sqrt{2F} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} J_k^2(2\epsilon) \sin x \quad (29)$$

$$\epsilon \rightarrow 0 \quad \bar{q}_w \sim \sqrt{2F} \epsilon^2 \sin x \quad (30)$$

위식에서 보는 바와 같이 벽면 열유속은 F 가 작을 때 F^4 과 ϵ^2 에 비례하며 F 가 커지면 F 에 비례하게 된다. F 가 클 때 벽면 열유속의 크기가 ϵ 에 의존하는 정도는 ϵ 의 크기에 따라 다르며 ϵ 이 작을 때에는 ϵ^2 에 비례하고, ϵ 이 클 때에는 정확한 점근함수를 구하기는 어려우나 대략 $\epsilon^{1/2}$ 에 비례함을 알 수 있다.

위에서 보인 바와 같이 벽면 열유속은 F 에 대하여 단조증가하는 형태이어서 F 의 변화에 따른 열전달현상의 변화를 관찰하기에는 적당치 않으므로 한 주기당 열전달량을 ϵ 으로 나눈 값은 $\epsilon \gg 1$ 인 영역에서 오로지 $F\epsilon^{1/2}$ 에 의하여만 결정되는 것을 알 수 있으며 또한 $F\epsilon^{1/2}$ 가 작을 때와 클 때의 양상이 서로 크게 다른 것을 볼 수 있다.

Fig. 3에서 한주기 당 열전달량이 최대가 될 때의 $F\epsilon^{1/2}$ 를 ϵ 에 대하여 나타내면 Fig. 4와 같다. Fig. 4로부터 대략 ϵ 이 1보다 작을 때에는 $F=2.5$ 에서 한주기당 열전달량이 최대가 되며 ϵ 이 1보다 커지게 되면 $F\epsilon^{1/2}=2$ 일 때 최대값을 가짐을 알 수 있다.

따라서 $\epsilon \gg 1$ 인 영역에서 $F\epsilon^{1/2} < 2$ 일 때에는 한주기당 열전달량을 ϵ 으로 나눈 값이 $F^2\epsilon$ 에 비례하여 증가하다가 $F\epsilon^{1/2}=2$ 에서 대략 0.25 정도의 최대값을 가지고, $F\epsilon^{1/2}$ 이 2보다 커지게 되면 $F\epsilon^{1/2}$ 에 반비례하여 감소하게 되는 것을 알 수 있다. 이는 $F\epsilon^{1/2} < 2$ 일 때에는 왕복유동에 의한 관성의 영향이 크지 않아서 유체의 온도분포가 일방향 유동의 경우와 같이 대략 포물선 모양을 유지하여 벽면 열유속이 관 중심까지 전달되는 형태의 열전달과정을 유지하다가, $F\epsilon^{1/2}$ 이 2보다 커지게 되면 관성효과에 의하여 벽면 열유속의 영향을 받는 열경계층의 두께가 관의 반지름보다 작아지게 되고 관 중심부에 벽면 열유속의 영향을 받지않는 코어영역이 생기게 되어 벽면 열유속의 영향은 벽근처의 좁은 영역으로 국한되는 형태의 열전달과정이 진행되기 때문이다.

이러한 결과로부터 $\epsilon \gg 1$ 인 영역에서 열전달과정의 형태를 결정짓는 주요변수는 F 보다는 $F\epsilon^{1/2}$ 인 것을 알 수 있으며 이를 식(22)에 적용하면 괄호

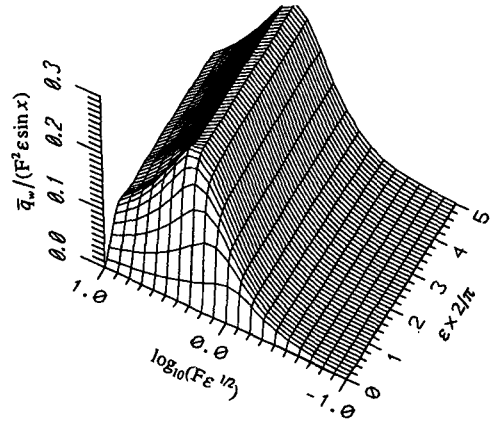


Fig. 3 Heat transferred in a period divided by ϵ as a function of $F\epsilon^{1/2}$ and ϵ

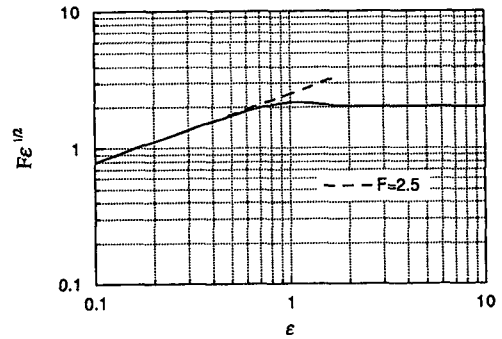


Fig. 4 $F\epsilon^{1/2}$ at which heat transferred in a period has its maximum value as a function of ϵ

안의 값이 0보다 작아지는 경우는 있을 수 없음을 알 수 있다.

$\epsilon > 1$ 일 때 $F\epsilon^{1/2}$ 에 의하여 열전달과정의 형태가 결정되는 것은 Lagrangian 관점에서 유체와 벽면 사이의 열전달과정을 고찰할 때 ϵ 이 1보다 커지게 되면 실질적으로 유체가 느끼는 벽온도 변화의 주파수는, x 방향으로 주기적으로 분포된 벽온도에 의하여, ω 가 아니라 $\omega \times l/l_w$ 가 되기 때문이며 이 주파수에 따라 열경계층의 두께가 결정되어지기 때문이다. 또한 $\epsilon \gg 1$ 일 때 $F\epsilon^{1/2}$ 가 일정할 경우 한주기당 열전달량이 ϵ 에 비례하는 것은 왕복유동의 한주기동안 동일한 $F\epsilon^{1/2}$ 에 대하여, $l/l_w=1$ 인 경우와 비슷한 상황이 l/l_w 번 반복되어서 한주기 동안의 열전달량이 $l/l_w=1$ 일 때보다 대략 l/l_w 배 만큼 커지기 때문이다.

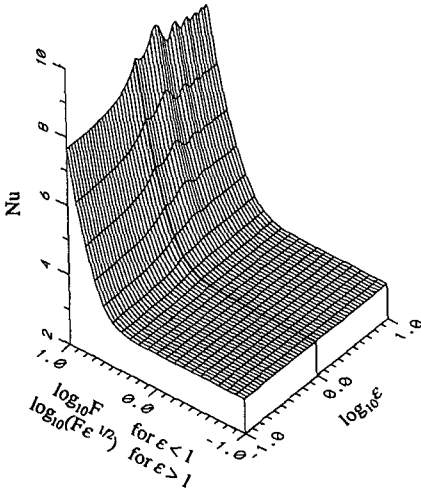


Fig. 5 Variation of Nusselt number with respect to $F\epsilon^{1/2}$

Nu는 다음식과 같이 정의한다.

$$Nu = \frac{\bar{q}_w}{T_w - \langle T \rangle} = -\text{Re} \left[\frac{\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} g_k'}{\text{Re} \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_{0,k} \langle g_k \rangle \right]} \right] \quad (31)$$

Fig. 5에 식(31)을 이용하여 $F\epsilon^{1/2}$ 에 대하여 Nu를 나타내었으며, 3차원으로 나타낸 이 그림에서 $\epsilon < 1$ 일 때에는 F, $\epsilon > 1$ 일 때에는 $F\epsilon^{1/2}$ 을 독립변수로 취하였다.

그림으로부터 Nu 역시 $\epsilon \ll 1$ 일 때에는 F에 의하여 결정되고 $\epsilon \gg 1$ 일 때에는 $F\epsilon^{1/2}$ 에 의하여 결정됨을 알 수 있으며, 또한 $F \rightarrow 0$ 일 때 Nu는 ϵ 에 관계없이 3으로 일정해지는 것을 볼 수 있다. 식(24)와 식(30)으로부터 $\epsilon < 1$ 일 때 F가 커짐에 따라 Nu는 F에 비례함을 알 수 있으며 $\epsilon > 1$ 이고 $F\epsilon^{1/2} \rightarrow \infty$ 일 때에는 열전달이 $F\epsilon^{1/2}$ 에 비례한다는 사실로부터 Nu가 $F\epsilon^{1/2}$ 에 비례하게 됨을 알 수 있다. $\epsilon > 1$ 이고 $F\epsilon^{1/2} \rightarrow \infty$ 일 때 Nu의 대체적인 경향은 $\epsilon^{1/2}$ 에 비례하지만 ϵ 에 대하여 주기적으로 변동하는 성분이 중첩되어 있으며 이는 주로 벽과 유체의 면적-시간 평균온도차가 ϵ 에 대하여 주기적으로 변하기 때문이다.

4. 결 론

원관 내부에 왕복유동이 존재할 때, 원관의 내벽

면온도가 길이방향으로 정현파 형태로 분포하는 경우에 대하여 1차원 속도분포 가정과 perturbation 방법을 도입하여 온도장의 해를 구하였다. 이 해로부터 유체의 면적 평균온도, 열전달량, Nusselt수 등에 대한 왕복유동 주파수와 왕복거리의 영향을 고찰하고 열전달 특성을 살펴보았다.

왕복유동의 주파수가 커지면 Lagrangian 관점에서 본 유체입자의 단면 평균온도는 시간에 의존함이 없이 단지 왕복유동에 의하여 경험하게 되는, 시간에 따라 변화는 벽온도의 시간평균값으로 일정하게 유지되게 된다. 이는 벽과의 열전달이 벽면 근처의 좁은 영역으로 국한되어 관 중심부의 대부분의 유체는 왕복운동으로 인하여 경험하는 벽온도 변화에 영향받지 않는 것을 의미한다.

한 주기당 열전달량은 F가 증가함에 따라 함께 증가하다가 ϵ 에 따라 특정 F에서 최대값을 가지고 그 이상에서는 다시 감소하는 것으로 나타났다. 최대값은 $\epsilon \ll 1$ 에서는 $F=2.5$, $\epsilon \gg 1$ 인 영역에서는 $F\epsilon^{1/2}=2$ 인 점들에서 나타났다. Nusselt수는 F가 작을 경우 3으로 일정한 값을 유지하고, F가 커지면 $\epsilon \ll 1$ 에서는 F수에 비례하여 증가하고 $\epsilon \gg 1$ 에서는 $F\epsilon^{1/2}$ 에 비례하는 결과를 보였다.

이러한 결과들로부터 벽온도분포의 특성길이에 대한 왕복유동 진폭의 비인 ϵ 이 1보다 작을 때에 열전달과정은 F의 지배를 받게 되고, ϵ 이 그보다 클 때는 $F\epsilon^{1/2}$ 에 의하여 열전달 형태가 결정됨을 알 수 있다. 이는 왕복거리가 짧을 때는 왕복유동의 주파수가 주요변수이지만 왕복거리가 길어지게 되면 주파수와 왕복거리의 곱이 유체 온도장을 결정하는 주요변수가 됨을 의미한다.

식(4)에서 나타낸 지배방정식은 제차 선형 미분방정식이므로 해의 중첩이 가능하며 좀 더 복잡한 벽온도분포의 경우로 확장 적용할 수 있다. 스티링 기기의 열교환기와 같이 벽면온도가 정현파로 분포되지 않은 경우에도 이를 정현파의 중첩된 형태로 나타낼 수 있으므로 본 연구의 결과를 적용할 수 있을 것으로 생각된다.

후 기

본 연구는 서울대학교 터보·동력기계연구센터의 지원에 의하여 수행되었습니다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

부 록

- (1) Chatwin, P. C., 1975, "On the Longitudinal Dispersion of Passive Contaminant in Oscillatory Flows in Tubes," *J. Fluid Mech.*, Vol. 71, part 3, pp. 513~527.
- (2) Jaeger, M. J. and Kurzweg, U. H., 1983, "Determination of the Longitudinal Dispersion Coefficient in Flows Subjected to High-Frequency Oscillations," *Phys. Fluids*, Vol. 26, pp. 1380~1382.
- (3) Kurzweg, U. H. and Zhao, L., 1984, "Heat Transfer by High-frequency Oscillations: A New Hydrodynamic Technique for Achieving Large Effective Thermal Conductivities," *Phys. Fluids*, Vol. 27, pp. 2624~2627.
- (4) Kurzweg, U. H., 1985, "Enhanced Heat Conduction in Oscillating Viscous Flows within Parallel-Plate Channels," *J. Fluid Mech.*, Vol. 156, pp. 291~300.
- (5) Kurweg, U. H., 1985, "Enhanced Heat Conduction in Fluids Subjected to Sinusoidal Oscillations," *J. Heat Transfer*, Vol. 107, pp. 459~462.
- (6) Gedeon, D., 1986, "Mean-Parameter Modeling of Oscillating Flow," *J. Heat Transfer*, Vol. 108, pp. 513~518.
- (7) Peattie, R. A. and Budwig, R., 1989, "Heat Transfer in Laminar, Oscillatory Flow in Cylindrical and Conical Tubes," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No. 5, pp. 923~934.
- (8) Kaviany, M., 1990, "Performance of a Heat Exchanger Based on Enhanced Heat Diffusion in Fluids by Oscillation: Analysis," *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 49~55.
- (9) Reader, G. T. and Hooper, C., 1983, "Stirling Engines," E. & F. N. Spon, London, pp. 193~210.
- (10) Kornhauser, A. A. and Smith, J. L. Jr., 1989, "Heat Transfer with Oscillating Pressure and Oscillating Flow," *Proc. IECEC*, paper 899204, pp. 2347~2353.
- (11) Dingle, R. B., 1973, "Asymptotic Expansion: Their Derivation and Interpretation," Academic Press Inc., London, Chap. 3.

다음의 관계식

$$|g_k| \leq 1, |e^{int}| \leq 1, |\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1 \quad (A. 1)$$

을 이용하여 식 (14)의 유체온도의 절대값을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|T| \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_{0,k}| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_{n,k}| \quad (A. 2)$$

위식의 우변 세번째항은

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_{n,k}| = \begin{cases} |C_{n,n/2}| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_{n,n/2+k}| & n : \text{짝수} \\ 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_{n,(n-1)/2+k}| & n : \text{홀수} \end{cases} \quad (A. 3)$$

와 같으므로 이를 식 (A. 2)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |T| &\leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_{0,k}| + \sum_{n=1}^{\infty} |C_{2n,n}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |C_{n,[n/2]+k}| \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C_{0,k}| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{2k-1} |C_{n,k}| \end{aligned} \quad (A. 4)$$

위식에서 []는 가우스 기호를 나타낸다.

식 (16)을 적용하면 다음의 관계식

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_{0,k}| = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(2\varepsilon) \quad (A. 5)$$

$$\sum_{n=1}^{2k-1} |C_{n,k}| \leq 2 \times (2k-1) |J_m(2\varepsilon)| |J_k(2\varepsilon)| \quad (A. 6)$$

을 얻을 수 있는데 식 (A. 6)에서 $J_m(2\varepsilon)$ 은

$$J_m(2\varepsilon) \equiv \text{Max}(J_n(2\varepsilon)) \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (A. 7)$$

와 같이 정의되며, ε 이 일정하고 베셀함수의 차수 (order)가 바뀌는 경우에 있어서의 함수값의 최대값을 의미한다. 식 (A. 5), 식 (A. 6)을 식 (A. 4)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |T| &\leq 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} J_k^2(2\varepsilon) + 4 |J_m(2\varepsilon)| \\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) |J_k(2\varepsilon)| \end{aligned} \quad (A. 8)$$

우변 세번째 항의 수렴여부는 다음의 관계식으로 판단할 수 있다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(2k+1)J_{k+1}(2\varepsilon)}{(2k-1)J_{k-1}(2\varepsilon)} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\varepsilon}{k+1} \right| \quad (A. 9)$$

위의 식으로부터 식(A. 8)의 세번째 항은 ε 에 관계없이 항상 수렴하는 것을 알 수 있으며 또한 비슷한 방법으로 우변 두번째 항도 수렴함을 보일 수

있다.

따라서 식(14)로 나타낸 유체의 온도는 시간 및 위치에 관계없이 수렴하는 것을 알 수 있다.

© 바로 잡습니다. (제17권 제 7 호, pp. 1783~1793)

- | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| (1) Fig. 8의 그림은 Fig. 17의 그림으로 수정 | (2) Fig. 9의 그림은 Fig. 8의 그림으로 수정 |
| (3) Fig. 10의 그림은 Fig. 9의 그림으로 수정 | (4) Fig. 11의 그림은 Fig. 10의 그림으로 수정 |
| (5) Fig. 12의 그림은 Fig. 11의 그림으로 수정 | (6) Fig. 13의 그림은 Fig. 12의 그림으로 수정 |
| (7) Fig. 14의 그림은 Fig. 13의 그림으로 수정 | (8) Fig. 15의 그림은 Fig. 14의 그림으로 수정 |
| (9) Fig. 16의 그림은 Fig. 15의 그림으로 수정 | (10) Fig. 17의 그림은 Fig. 16의 그림으로 수정 |