

# 셀 구조물의 비선형좌굴 및 결함민감도 해석

원 종 진

## Nonlinear Buckling and Imperfection Sensitivity Analyses of Shell Structures

Chong-Jin Won



●원종진(국민대 기계설계학과)  
●1948년생.  
●고체역학을 전공하였으며 판 및 셀 구조물의 응력해석, 특히 보강된 판 및 셀구조물의 좌굴해석과 최적화에 관심을 가지고 있다.

### 1. 머리말

많은 구조물들은 얇은 판이나 셀을 기본요소로 구성된다. 예를 들면, 보강판이나 원통형 판넬은 그 길이 및 보강재의 간격에 비해서 두께가 얇은 판과 그들의 높이 및 길이에 비해서 두께가 얇은 보강재들로 구성된다. 이들 구조물에 압축하중이 작용할 때, 판과 보강재가 전체 불안정모드로 붕괴될 수 있으며 보강재들 사이의 판과 보강재는 각각 국부적으로 좌굴될 수 있다. 또한 판과 보강재의 국부변형과 전체변형을 포함하는 여러 가지 복잡한 좌굴의 상호작용이 발생할 수도 있다.

좌굴하기 쉬운 구조물을 설계할 때는 반드시 좌굴특성에 대한 어떤 직관을 가져야 한다. 이 글의 목적은 셀 구조물이 비선형붕괴(nonlinear collapse), 분기좌굴(bifurcation buckling) 또는 이들 모드의 조합에 의해서 어떻게 좌굴될 것인가에 대한 감각을 전하는 데 있다. 이 불안정에 대한 직관적 이해는,

보강되고 여러 요소들로 조립되며 분지셀(branched shell)을 갖거나 복잡한 벽구조를 갖는 실제 셀 구조물 등의 많은 예에 의해서 얻어질 수 있다. 이 글에서는 수식의 개발이 아니라 불안정의 예측에 주안점을 두고 있으며, 큰 처짐과 소성의 조합에 의해 발생하는 비선형좌굴과 결함민감도가 특히 강조된다. 또한 최적화된 구조물의 국부 및 전체 불안정, 좌굴모드의 상호작용, 그리고 결함민감도(imperfection sensitivity) 등이 예시된다.

### 2. 셀 좌굴의 발생원인과 형태

#### 2.1 셀 좌굴의 발생원인

막강성도(membrane stiffness)는 일반적으로 굽힘강성도(bending stiffness)보다 상당 차수의 큰 값을 갖는다. 얇은 셀은 크게 변형하지 않고도 많은 양의 막변형에너지(membrane strain energy)를 흡수할 수 있으나 같은 양의 굽힘 변형에너지(bending strain energy)를 흡수하기 위해서는 훨씬 더 큰 변형을 요한다. 만약 셀이 그 변형에너지의 대

부분이 막압축상태가 되도록 하중을 받고 이 저장된 변형에너지가 굽힘변형에너지로 변환될 수 있는 방법이 있다면, 셀은 그 막에너지를 굽힘변형에너지로 변환하면서 좌굴이라는 과정에 따라 비교적 극적으로 파손될 수 있다. 일반적으로 주어진 양의 막변형에너지를 굽힘변형에너지로 변환시키기 위해서는 상당히 큰 처짐이 요구된다. 셀의 좌굴이 발생하는 방법은 셀에 작용하는 하중과 그 기하학적 그리고 재료적 특성에 달려 있다.

### 2.2 좌굴의 정의

좌굴이라는 말은 임의의 방법으로 압축을 받는 구조물이 파손되는 현상을 연상케 하고, 그 형태와 소리도 상당히 큰 변형을 포함하는 갑작스럽고 격렬한 붕괴를 연상케 한다. 그러나 과학적이고 공학적인 견지에서 보면, 일반적으로 좌굴현상의 흥미있는 양상은 육안으로 보아 구조물의 변형이 아주 크기 전에는 변형되지 않거나 단지 약간 변형될 때 발생한다는 것이다.

완전구조물(perfect shell)의 정적해석에 있어서 막연히 좌굴이라는 현상은 하중-처짐곡선상의 최대점에서의 비선형붕괴와 분기좌굴이 있다. 그림 1과 2는 이들 두 가지 형태의 불안정파손(instability failure)을 보여주고 있다.<sup>(1)</sup>

그림 1과 같은 비교적 두꺼운 축압축 원통셀은 최대 또는 붕괴하중  $\lambda_c$ 이 점 A에 도달할 때까지 평형경로(equilibrium path) 0A를 따라 축대칭형태로 근사적으로 변형한다. 만약 축하중  $\lambda$ 가 축방향강성도의 감소에 의해서 충분히 제거되지 않는다면, 완전원통셀은 이 붕괴하중에서 좌굴하기 시작하여 계속 축대칭형태로 변형하는 경로 ABC를 따라 또는 먼저 점 A에서 B까지 축대칭형태로 변형한 후 점 B에서 D까지 비축대칭형태로 변형하는 다른 경로 ABD를 따라 변형할 것이다. 비선형좌굴(nonlinear buckling or snap-through)은 점 A에서 발생하고 분기좌굴은

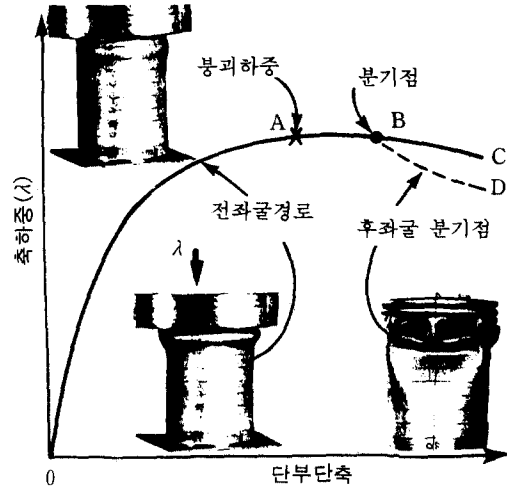


그림 1 붕괴하중 A, 분기점 B 및 후좌굴평형 경로 BD를 갖는 축하중-단부압축곡선

점 B에서 발생한다. 변형의 대칭모드에 해당되는 평형경로 0ABC를 1차 또는 전좌굴 경로(primary or prebuckling path)라 하고, 변형의 비대칭모드에 해당되는 후분기 평형 경로 BD를 2차 또는 후좌굴경로(secondary or postbuckling path)라 한다. 붕괴나 분기 형태의 좌굴은 구조재료의 일부 또는 전부가 비례한도를 넘는 응력을 발생시키는 하중에서 발생할 수 있다. 그림 1의 예는 다소 특수한 경우로 분기좌굴의 공학적 중요성은 축대칭붕괴의 경우보다 작다.

그림 2는 좀더 일반적으로 발생할 수 있는 상황을 보여준다. 분기점 B는 점 0와 A 사이에 있다. 1차 경로 0AC가 축대칭변형에 해당되고 경로 BD가 비축대칭변형에 해당된다면, 구조물의 초기파손은 일반적으로 급격히 증가하는 비축대칭변형의 성격을 나타낸다. 이 경우 완전구조물의 붕괴하중  $\lambda_c$ 의 공학적 중요성은 분기점  $\lambda_c$ 보다 작다.

피할 수 없는 결함을 포함하는 실제 구조물의 경우에 진정한 분기좌굴은 없다. 실제 구조물에서는 붕괴하중  $\lambda_s$ 인 점 E에서 비선형좌굴이 발생하며 1차경로 0EF를 따른다.

만약 그림 2(a)에서 점 B가 비대칭좌굴모드의 분기에 해당된다면, 점 E에서의 붕괴는 심각한 비대칭변위성분을 포함한다. 비록 진정한 분기좌굴이 가상일지라도 분기좌굴해석 모델은 계산적으로 편리하고 경제적이며 자주 실제 파손하중과 모드의 근사값을 제공한다.

2.3 여러가지 형태의 분기좌굴

그림 2(b)에서는 분기좌굴모드 진폭의 함수로 표시된 하중을 보여주고 있다. 분기좌굴모드는 완전셀의 전좌굴변위형태에 직교하

기 때문에 그 진폭은 분기점 B에 이를 때까지 영이 된다. 그림 2(b)에서 곡선 BD는 후좌굴상태가 불안정한 것을 의미하고 하중지탱능력(load-carrying capacity)  $\lambda$ 는 분기좌굴모드의 진폭의 증가와 함께 감소한다.

모든 실제 구조물은 결함을 가지고 있다. 일반적으로 결함의 형태는 분기좌굴모드와 직교하지 않는다. 만약 불완전구조물(imperfect shell)의 변형을 두 성분의 합으로 나타내고 완전구조물의 1차 전좌굴평형상태와 분기좌굴모드를 합하여 불완전구조물의 분기모드성분의 진폭과 하중을 그림으로 나타내면, 그림 2(b)의 곡선 OEF를 얻을 수 있다. 분기모드성분의 진폭은 감소된 하중  $\lambda_s$ 에서 비선형좌굴 또는 붕괴에 따른 불안정성이 발생할 때까지 증가되는 비율로 증가한다. 완전구조물의 임계분기하중  $\lambda_c$ 와 불완전구조물의 붕괴하중  $\lambda_s$ 와의 차이는 초기결함의 진폭  $w_b$ 에 달려 있다.  $\lambda_s/\lambda_c$ 와  $w_b$ 의 도표는 기하학적 초기결함에 대한 최대 하중  $\lambda_s$ 의 민감도

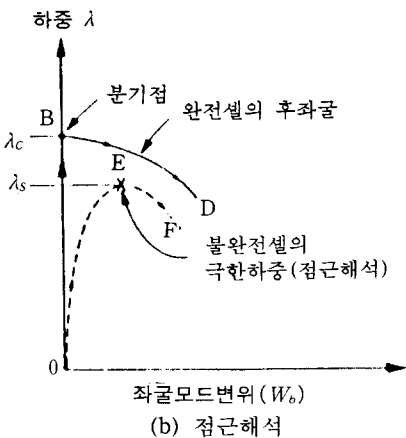
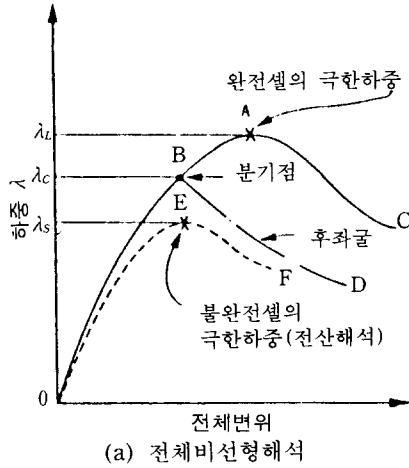


그림 2 극한하중 및 분기점을 나타내는 하중-처짐곡선

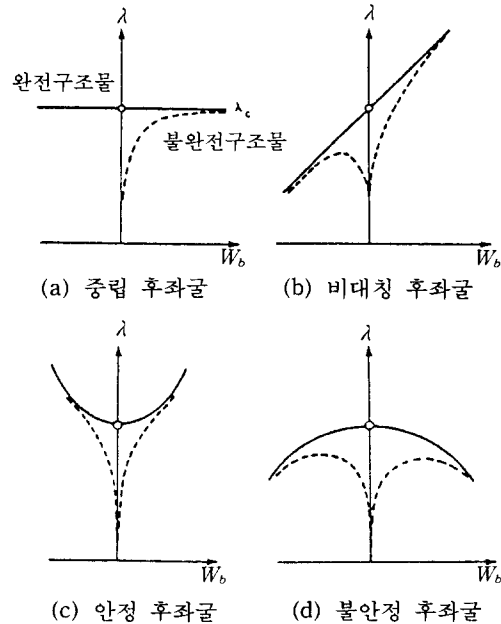


그림 3 여러가지 형태의 하중-변위관계 ( $\lambda$ 는 하중,  $w_b$ 는 좌굴모드변위)

를 나타낸다.

모든 구조물과 그들의 어떤 수학적 모델도 그림 2(b)와 같은 특성을 나타내지는 않는다. 그림 3은 여러가지 형태의 후좌굴특성을 보여주고 있다. 그림 3(a)는 탄성안정선형모델의 하중-처짐관계를 나타내며, 비선형 후좌굴의 영향이 설명될 수 있는 대부분의 구조물에 대한 평형경로는 그림 3(b)부터 그림 3(d)와 같은 형태를 나타낸다.

### 3. 좌굴해석에 대한 연구동향

좌굴파손(buckling failure)의 예측능력에 대한 최근 연구결과들은 다음 세 가지 주요 분야로 구분될 수 있다.

- ① 점근법에 의한 후좌굴이론의 개발과 단순한 판, 셀 및 판넬 등과 같은 특수한 구조물에 대한 이들 이론의 적용<sup>(2)</sup>
- ② 대변형, 대변형률 및 비선형재료의 영향을 고려하고 구조물의 정적, 동적 특성의 계산을 위한 일반목적 컴퓨터 프로그램의 개발<sup>(3)</sup>
- ③ 축대칭구조물의 비축대칭분기좌굴과 극한점 축대칭좌굴에 대한 특수목적 컴퓨터 프로그램의 개발<sup>(4)</sup>

#### 3.1 점근해석

점근해석(asymptotic analysis)은 Koiter에 의해서 설정된 이론적 기초에 근거하고 있으며,<sup>(2)</sup> 그의 일반적인 탄성 후좌굴이론에서는 하중변수  $\lambda$ 를  $(\lambda, W_b)$  공간의 임계분기점 부근에서 타당한 좌굴모드진폭  $W_b$ 의 항으로 전개된다. 점근해석의 본래 목적은 완전구조물과 불완전구조물에 대한 최대 하중을 계산하는 것이다.

#### 3.2 일반적인 비선형해석

1970년대 이래로 널리 사용되고 있으며 현재 작성되고 있는 일반목적 컴퓨터 프로그램은 지난 1950년대까지 대부분에 대하여 설정

되었던 연속체역학에 근거하고 있다.<sup>(5)</sup> 구조적인 연속체는 유한요소로 분리되고 비선형 문제를 풀기 위하여 여러가지 전략이 사용되고 있다. 비선형성은 상당히 크거나 아주 큰 처짐과 비선형재료의 성질에 의한다. 일반적으로 좌굴문제에 대한 비선형해석방법에서의 계산은 필연적으로 전좌굴해석 또는 그림 2(a)에서의 제1차 경로 0EF를 따른 유일한 평형상태의 결정을 포함한다. 좌굴문제에 대한 그림 2(b)의 점근해석방법에서 전좌굴상태는 흔히 가장 중요한 것으로 알려져 있다. 완전구조물의 제2차 경로 BD와 불완전구조물의 제1차 경로에서의 최대점 E는 그 해를 분기모드의 진폭 또는 분기점 B에서 점근적으로 정확한 진폭의 멱급수로 전개함으로써 결정된다.

#### 3.3 축대칭 구조물의 해석

좌굴문제에 대한 세번째 방법 즉, 축대칭 구조물의 해석에 대한 특수목적 프로그램의 개발은 일종의 점근해석과 일반목적 비선형 해석 사이의 중간대를 형성한다. 이 방법의 응용은 실제로 특수한 구조물에 제한되며 전좌굴평형과 분기좌굴 사이의 구분은 유보된다. 여기서 강조되는 것은 그림 2(a)에서의 전좌굴 1차 경로 0B 또는 0A의 계산과 분기점 B와 관련된 좌굴모드의 결정이며, 후분기성질 BD 또는 불완전구조물의 하중-처짐 경로 0EF의 계산은 아니다. 이 방법의 목적은 엔지니어와 설계자에 의해 사용되는 해석 도구를 만들고, 그것을 입증하고 좌굴과정에서의 물리적 통찰을 얻기 위하여, 실험과의 광범위한 비교에 이 도구를 사용하는 것이다.

### 4. 원통셀의 고전적 좌굴과 점근결함민감도 해석

#### 4.1 축압축하중을 받고 있는 원통셀

축압축하중을 받고 있는 두께가 얇은 셀의

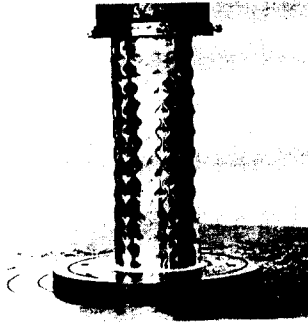


그림 4 탄성좌굴이 완전하게 발생한 원통셀

좌굴문제는 수년 동안 설명되지 않고 남아 있던 실험과 이론의 상당히 큰 차이 때문에 구조역학에서의 대부분의 문제보다 훨씬 많은 주의를 받아왔다. 그림 4는 축압축 원통셀의 후좌굴상태를 보여주고 있다.<sup>(6)</sup> 매우 신중하게 제작된 원통셀을 실험하는 동안에 독립된 좌굴이 다음과 같이 예측된 분기값보다 상당히 작은 평균응력값에서 초기에 나타난다.

$$\sigma_{cr} = [3(1-\nu^2)]^{-1/2} Eh/a \approx 0.6Eh/a \quad (1)$$

일반적으로 이 좌굴은 매우 급속도로 깊어지고, 모양이 변하며, 표면의 상당 부분에 발생하는 좌굴균을 동반한다.

그림 4에 보여진 후좌굴형상은 좌굴의 과도성장과 그에 따른 경계에서의 소성형지의 형성을 방지하기 위하여 내부에 밀착된 맨드릴을 가진 원통셀의 축압축하중에 의하여 발생한 것으로 원통셀 전 표면에 나타난다. 그림 5는 넓은 범위의 반경 대 두께비에 걸친 실험과 이론 사이의 극적인 차이를 나타낸다.<sup>(7)</sup>

이들 데이터 중에서 가장 중요한 경향은 반경 대 두께비  $a/h$ 의 증가에 따라 실험과 이론 사이의 차가 증가하는 것이다. 그것은 차이가 임계하중의 극한민감도 (limit sensitivity)로부터 초기결함까지 발생하는 실마리를 제공한다. 기하학적인 질의 합리적인 척도는 완전원통셀 형상으로부터 두께  $h$ 까지

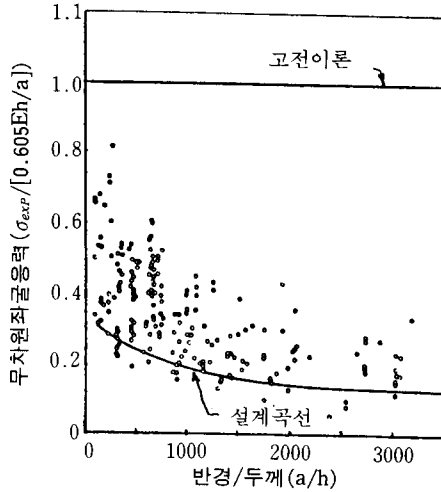
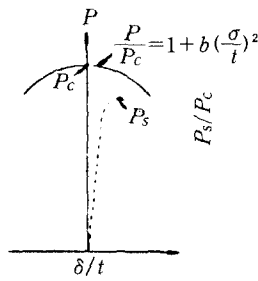


그림 5 축압축원통셀에 대한 좌굴응력 실험데이터의 분포

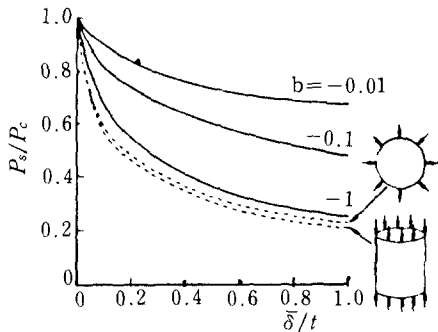
의 초기편차  $w_0(x, \theta)$ 의 비이다. 주어진 제작방법에 대하여 이 비는 반경 대 두께비의 증가에 따라 증가할 것이다.

Donnell과 Wan의 초기 기하학적 결함에 대한 임계하중의 민감도에 대한 연구에서는 실험과 이론 사이의 차이가 초기 기하학적 결함에 의해서 발생한다는 것을 질적으로 보여주고 있다.<sup>(8)</sup> 불완전구조물의 최대하중지탱능력  $P_c$ 에 대하여 점근적으로 정확한 공식을 제공하는 Koiter이론<sup>(9)</sup>은 원통셀의 임계축하중이 초기 기하학적 결함의 극한민감도에 대한 엄밀한 증거를 제공한다. 그림 6을 참고하기 바란다.

여러가지 경계조건의 고려에 따른 실험과 이론 사이의 차이를 설명하기 위한 연구<sup>(10)</sup>에서는 접선방향변위  $v$ 가 경계에서 자유인 단부조건에 대한 최저임계하중이  $\sigma_{cr}/\sigma_{cr0} = 0.38$  이고, 수직처짐  $w$  또는 변위  $v$ 가 경계에서 자유인 단부조건에 대하여는  $\sigma_{cr}/\sigma_{cr0} = 0.5$ 를 나타낸다. 실제로 실험중에 발생하는 처짐을 측정할 때는 단부에서의 변위  $v$  및  $w$ 를 방지하기 위하여 충분한 마찰이 존재한다.  $v$ 가 자유인 경우에 대한 임계모드는 2개의 원



(a) 좌굴모드에 대한 결함민감도(변수 b의 함수)



(b) 외압이 작용하는 구형셀 및 축압축 원통셀의 결함민감도의 비교

그림 6 좌굴모드에 대한 결함민감도( $\delta$  및  $\bar{\delta}$ 는 좌굴모드 및 결함의 진폭)

주방향 파장에 해당하며, 그것은 관측된 좌굴모드와는 다르다.

축압축하중을 받는 원통셀은 그것의 축방향과 원주방향의 파장길이가 반경에 비해 아주 작은 모드에 해당하기 때문에 작은 초기 결함에도 매우 민감하다. 또한, 임계하중은 파장길이에 민감하지 않기 때문에 그림 5와 같이 완전셀의 임의의 곳에서 발생하는 매우 다양하고 작은 초기결함은, 필연적으로 완전셀의 분기좌굴에서 예측되었던 하중보다 훨씬 작은 하중에서 비선형좌굴을 유발시키면서, 하중이 증가함에 따라 커지는 임계 또는 거의 임계분기좌굴모드형상 즉, 변형형상의 중요한 성분들을 포함한다.

그림 7과 8은 정수압이나 비틀림을 받고 있는 원통셀의 좌굴실험과 이론 사이의 비교

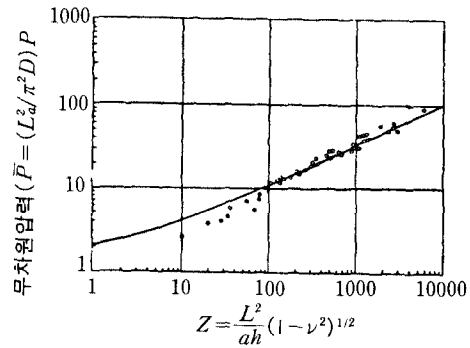


그림 7 외부정수압을 받는 원통셀에 대한 이론 및 실험좌굴하중의 비교 (D는 굽힘강성)

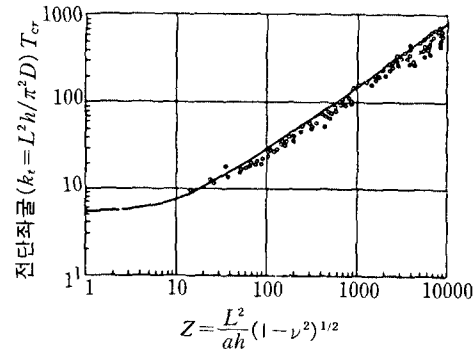


그림 8 비틀림을 받는 원통셀에 대한 이론 및 실험좌굴하중의 비교

를 나타내고 있다.<sup>(7)</sup> 길이방향보강재로 보강된 축압축하중이 작용하는 원통셀에 대한 좌굴모드는 길이가 긴 축방향파장과 비교적 작은 수의 원주방향파장으로 특징되며, 그것은 좌굴하중의 초기 기하학적 결함에 대한 좀더 가벼운 민감도를 나타낸다. 가장 민감한 시스템은, 분기좌굴현상이 축압축하중을 받고 있는 원통셀에 대한 것과 유사한 경우인, 정수압을 받고 있는 짧은 원통셀 ( $10 \leq Z \leq 100$ )이다. (그림 7)

#### 4.2 점근 후좌굴이론

Koiter는 최초로 축압축 원통셀의 좌굴에 대한 실험과 이론 사이의 큰 차이에 대한 가장 합리적인 설명을 제공하는 이론을 개발하였으며,<sup>(9)</sup>이 Koiter이론과 탄성 및 탄-소성

원통셀에의 응용에 대한 검토가 많은 연구자들에게 의하여 수행되어 왔다.<sup>(11)</sup>

본질적으로 Koiter이론의 목적은 다음과 같다.

① 평형경로의 최저 분기점에서 안정성의 결정

② 구조물의 최대 하중지탱능력의 초기 기하학적 결함에 대한 민감도 확인

고전적 분기좌굴해석은 구조물의 평형이 안정에서 중립이 되는 하중의 탐색을 나타내지만, 구조물의 안정성에 대한 지식을 나타내지는 않는다. 구조물이 최저 분기하중보다 작은 하중에서 평형상태에 있다고 가정하자. 연속성과 기하학적 경계조건의 요구를 만족하는 어떤 작은 부가적인 변위장은 계의 에너지의 증가를 유발시키므로, 구조물은 좌형 곡면상의 최저점에 있는 공에 유추되는 안정된 평형상태에 있다. 분기점에 해당하는 더 큰 하중에서는 작은 변화에 따른 계의 부가적인 에너지가 변하지 않으므로 그 구조물은 평면상에 있는 공에 유추되는 중립평형상태에 있으며 이 평형상태는 좌좌굴상태의 바로 인접한 곳에서 유일하지 않게 된다. 최저 분기점 이상의 하중에서 분기전 하중-처짐경로에서의 평형은 불안정하게 되어 정점에 있는 공에 유추된다.

### 4.3 탄성 후분기 해석

좌굴모드가 유일한 분기하중  $\lambda_c$ 에서, Koiter의 일반 탄성 후좌굴이론으로부터 하중 변수  $\lambda$ 를 다음과 같이 무차원화된 분기좌굴 모드의 진폭  $w_b$ 의 향으로 접근적으로 정확하게 전개를 할 수 있다.

$$\lambda/\lambda_c = 1 + aw_b + bw_b^2 + \dots \quad (2)$$

탄성 초기 후좌굴성질의 네 가지 형태가 그림 3에 보여지고 있다. 실선은 완전구조물의 성질을 보여주고 있으며, 점선은 유일한 임계 분기좌굴 모드형태의 불안전구조물의 성질을 보여주고 있다. 그림 3(b)와 3(c)에

서 표시되는 구조물의 극한하중지탱능력은, 그림 3(a)와 그림 3(c)에 의해서 표시되는 것들과는 달리 초기결함에 민감하다. 좌굴모드 진폭  $w_b(a=0)$ 의 부호에 관해서 비대칭인 그림 3(b)의 경우에 대해서, 음의 무차원화된 결함진폭  $w_{imp}$ 는 분기좌굴을 다음과 같은 Koiter의 일반이론에 의해서 주어진 감소된 하중  $\lambda_s$ 에서 극한점 또는 비선형좌굴로 변환시킨다.

$$\lambda_s/\lambda_c \approx 1 - 2(-\rho w_{imp})^{1/2} \quad (3)$$

여기서,  $\rho$ 는 결함형상에 의존하는 상수이다. 그림 3(d)와 같이 대칭인 경우에 대해서, 식 (2)에서의  $a$ 는 영이며,  $b < 0$ 이고 불안전 구조물의 극한하중은 근사적으로 다음과 같이 된다.

$$\lambda_s/\lambda_c \approx 1 - 3(-b/4)^{1/3} (\rho w_{imp})^{2/3} \quad (4)$$

그림 6은 식 (2)와 식 (4)에서의 계수  $b$ 와 축대칭 셀과 같은 시스템에 대한 결함민감도와와의 관계를 나타낸다. 이 경우 최저 분기좌굴모드는 유일하고 초기 후좌굴변위장의 부호에 대하여 대칭이며 불안정하다. 완전구조물의 초기 후좌굴하중  $P$ 는 그림 6에서 보여진 실선을 따른다.  $\delta$ 는 유일한 좌굴모드의 형태로 가정되는 후좌굴변위의 진폭이고  $t$ 는 셀의 두께를 나타낸다. 점선은 결함이 있는 셀에 해당된다.  $b$ 의 값은 상세한 기하학적 형상과 하중에 따라 변한다. 좌굴하중은  $b$ 가 음이면 결함에 민감하고  $b$ 가 양이면 결함에 민감하지 않다. 그림 6에 보여진 것처럼 더 많은  $b$ 의 음의 값들이 초기 기하학적 결함  $\delta$ 에 대한 임계하중  $P_s$ 의 더 큰 민감도와 관계된다.

모든 결함민감도해석의 궁극적인 목적은 하중지탱능력(그림 2에서  $\lambda_s$ , 그림 6에서  $P_s$ )을 결정하는 것이며, 이들  $\lambda_s$ 와  $P_s$ 는 다음과 같은 방법에 의해서 결정된다.

① 축대칭과 비대칭 모두를 포함하는 일반적인 결함형상을 가정하고 비선형 적합조건

과 von Karman-Donnell이론의 평형방정식을 하중-처짐곡선을 추적하는 데 사용한다.<sup>(12)</sup>

② 축대칭 결함형상을 가정하고  $\lambda_0$ 는 비대칭분기의 어떤 축대칭분포가 축대칭으로 변형된 전좌굴상태로부터 발생하는 최저 하중에서 확인된다.<sup>(13)</sup> 이 방법은 보강되고 내압을 받는 원통셀에 대한 설계방법의 유도를 위하여 사용된다.

③ Koiter의 일반이론은 식 (2)와 식 (4)에서 계수  $b$ 를 얻는 데 사용되며, 여러가지 모드에 대한 그것의 일반이론은 최대 하중  $\lambda_0$ 를 얻는 데 사용된다. 이 방법은 편심보강되고 통모양의 원통셀의 연구에 사용되고, 국부적이고 임의로 축대칭결함을 가진 축압축원통셀의 좌굴의 점근적 처리에 사용된다.<sup>(14)</sup>

그림 9와 10은 점근 결함민감도이론이 만드는 결과를 예시하고 있다.<sup>(11,15)</sup> 그림 9의 상부는 Batdorf 길이변수  $Z = (L^2/Rt)(1-\nu^2)^{1/2}$ 의 함수로서 무차원화된 임계하중  $N_c(\text{보강})/N_c(\text{비보강})$ 을 나타내고 있으며, 하부는 결함민감도변수  $b$ 를 나타내고 있다. 하중지탱능력은 식 (4)로부터 결함진폭의 함수로써 쉽게 결정될 수 있다. 고전적

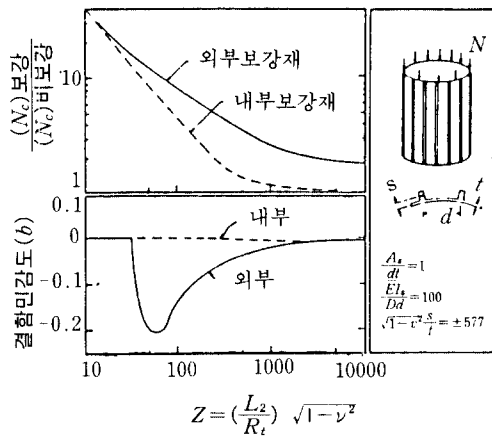


그림 9 축압축하중을 받는 보강원통셀에 대한 고전적 좌굴과 결함민감도

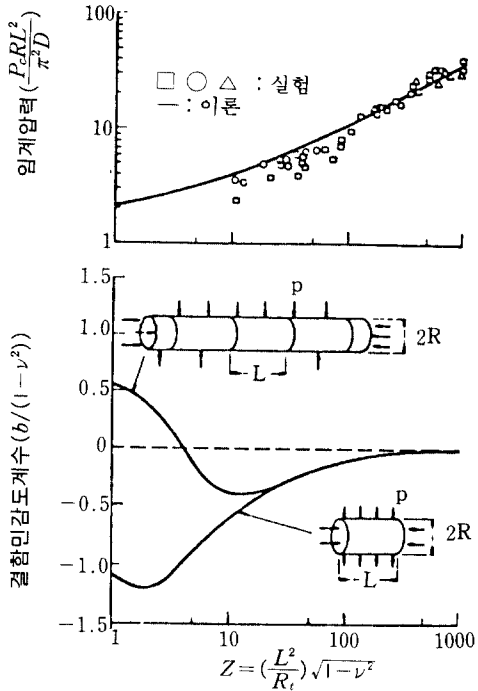


그림 10 외압을 받는 원통셀에 대한 고전이론과 초기 후좌굴예측 사이의 비교

분기좌굴이론은 외부보강재를 가진 설계가 내부보강재를 가진 설계보다 더 효율적이라는 예측을 주는 반면에, 이 이점은 넓은 범위의  $Z$ 에 대한 증가된 결함민감도에 의하여 중화된다. 재료의 증가없이 완전셀의 분기좌굴하중을 크게 하는 설계변경은 초기 기하학적 결함에 대한 임계하중의 민감도를 증대시키는 경향이 있다. 이 현상은 적층복합재로 된 축압축 원통셀의 좌굴과 최적화된 좌굴-임계구조물의 경우에 나타난다.

#### 4.4 전좌굴상태의 비선형성이 중요한 분기좌굴

전좌굴상태가 분기좌굴하중에 미치는 중요한 영향에는 다음과 같이 두 가지 유형이 있다.

① 무부하상태의 셀과 다른 형상을 갖는 전좌굴상태의 셀: 막 전응력분포의 새로운



형상이 주어지며, 이것은 다소 변형되지 않은 본래의 형상보다 안정성을 상실하기가 쉽다.

② 전좌굴 막응력분포 : 셀의 전좌굴된 형상이 주어지며, 선형 또는 비선형해석으로부터 계산된 막응력분포와 막 또는 굽힘셀이론은 예측된 분기좌굴하중과 모드형상에 격렬하게 영향을 미칠 수 있다.

여기서는 이들 두 영향의 조합이 존재하는 두 가지 예를 들어 본다.

(1) 내압을 받고 있는 연료탱크의 좌굴

그림 11에서는 연료탱크의 기하학적형상을 나타내고 있으며, 그림 12에서는 이에 대한 선형이론에 의한 비대칭 분기좌굴모드와 원주방향 합응력을 나타내고 있다.<sup>(4)</sup> 이 문제는 해석의 전좌굴형상에 선형이론의 사용이 부적당한 경우의 예이다. 내압이 증가함에 따라서 타원형 돔은 형상이 변한다. 원주응력은 재배치되고 그림 12의 하부에 표시된 것처럼 압력에 따라 선형적이기보다는 좀더 천천히 증가한다. 내압  $p$ 가 증가함에 따라서, 원주응력은 선형이론에서 분기좌굴이 발생한다고 예측되는 영역에서 인장이 되고 최대 원주압축응력은 초기에 선형이론에 의해서 예측했던 것보다 더 느리게 증가해서, 결국은 1.4 Pa의 압력에서  $-800 \text{ N/mm}$ 의 최대값에 이른다. 이후 그것은 내압이 더욱 증가함에 따라 감소한다. 따라서 비선형좌굴이 포함된 예측은 분기좌굴이 전혀 발생하지 않는다는 것이다.

(2) 내압을 받는 토리구형용기 머리부의 탄소성좌굴

여기서 제시된 예는 원주압축을 받는 것과 똑같은 부류에 속한다. 이 문제는 토리구형 또는 타원형 머리부를 갖는 많은 압력용기의 설계자들에게 특히 중요하다. 그림 13에서는 탄성셀에 대한 전형적인 후좌굴형상의 예를 보여주고 있다. 여기서 눈에 보이는 좌굴은 하나의 좌굴발생과정이지 분기(고유치)좌굴 해석에 의해 예측된 단일결과가 아니다.

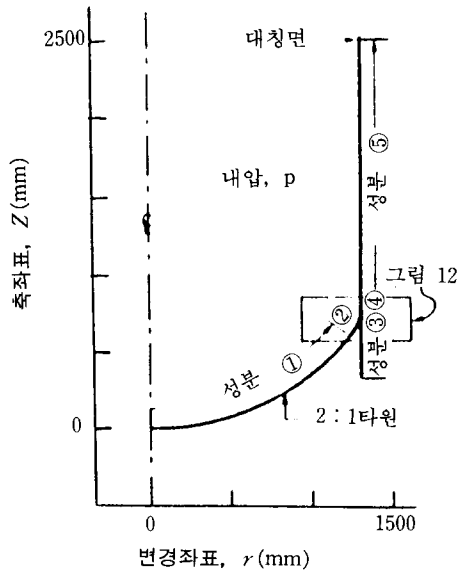


그림 11 로켓 연료탱크의 하부

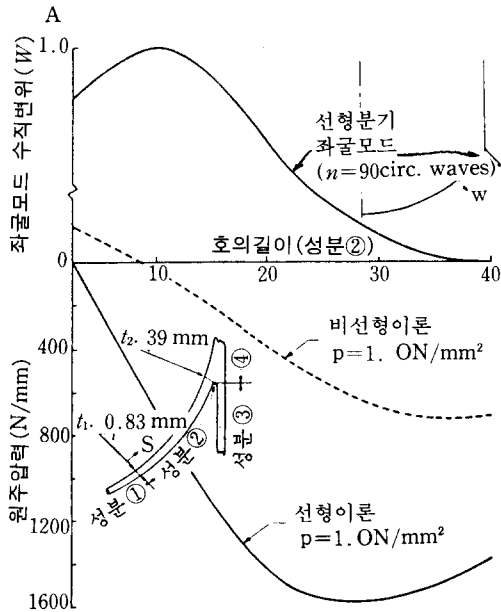


그림 12 그림 11에서 내압을 받는 로켓 모터부에 대한 비대칭좌굴모드(상)와 원주응력(하)

이런 종류의 문제는 실제 설계변수의 영역에서 예측된 성질이 임계압력 증가효과를 갖는 재료적 비선형성뿐만이 아니라 임계압력

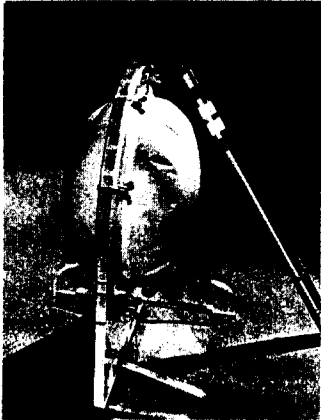


그림 13 내압에 의한 비대칭좌굴이 발생하는 토리구형구조물

의 감소효과를 갖는 좌굴 기하학적 비선형성에 민감하다는 것이 판명되었기 때문에 특히 흥미가 있다. 따라서 이 문제는 엔지니어가 안정성 해석을 수행할 때 반드시 알아야만 하는 비선형현상의 아주 좋은 예가 될 수 있다.

#### 4.5 경계조건 및 하중경로편심에 의한 영향

그림 14에서는, 특히 흥미있는 짧은 영역인 MS170.0과 MS182.8 위치 사이의 로켓의 중간단계가 분리되고 MS170.0에서 고정지지, MS182.8에서 단순지지라는 가정으로부터 나머지 구조물과 독립적으로 해석되는 예를 보여주고 있다.<sup>(16)</sup> 중간단계가 부착되어 있는 인접한 구조물의 두께는 이들 가정을 정당화하는 듯 하다. 그러나 보통 분리된 모델에서는 가능한 한 있는 그대로의 절점밀도와 함께 인접하는 부분들의 뒀을 포함시키는 것이 최상이다. 이것은 특히 구조물이 축대칭이고 1차원적으로 분리된 모델로 충분할 때 사실이다. 그와 같은 경우에 일반적인 법칙은 모델에서 정의되는 구조물의 모든 부분 또는 어떤 경계조건과 하중이 가정되어야 하는지에 대하여 의심의 여지가 없는 모든 부

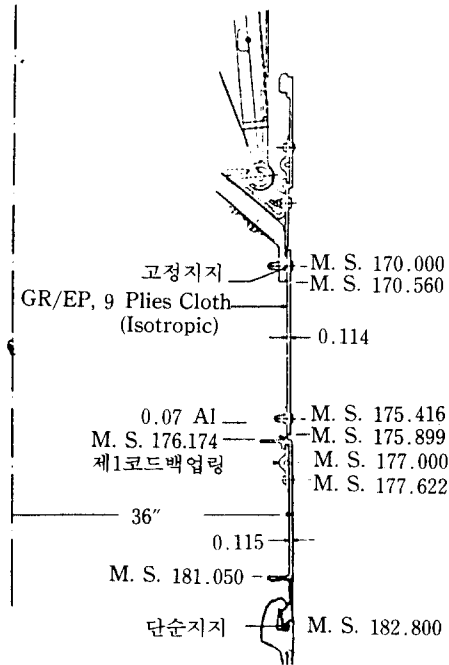


그림 14 발진하는 동안 축압축하중을 받고 있는 로켓의 중간단계

분을 포함시키는 것이다.

인접하는 구조물에 관해서 아는 바가 거의 없다면, 결함민감도 연구는 경계구속조건의 자유도의 상·하한 모두가 가정되어지는 곳에서 수행되어야 한다. 값 비싼 시험편이 만들어지기 전에 해석적인 모의실험이 시험에 적용될 경계조건의 적절한 표현과 국부좌굴의 가능성을 고려하여 수행되어야 한다.

선형 분기좌굴문제는 다음 형태를 갖는다.

$$[K_1 + \lambda K_2]q = 0 \quad (5)$$

여기서,  $K_1$ 은 안정강성행렬,  $\lambda$ 는 하중계수(고유치),  $K_2$ 는 하중-기하학적 행렬 그리고  $q$ 는 고유벡터이다. 경계조건과 편심하중은 안정성 특히 분기좌굴하중  $\lambda$ 에 다음 두 가지 방법으로 영향을 미친다.

① 주어진 하중에서 좌굴 막응력은 이들 인자에 의존하므로 식 (5)에서 하중-기하학적 행렬  $K_2$ 는 그들에 의존한다.

② 전좌굴변형과 경계에서의 구조적 강성은 이들 인자에 의존하므로 식 (5)에서 강성행렬  $K_1$ 은 그들에 의존한다.

흔히 경계조건은 안정강성행렬  $K_1$ 에 미치는 영향을 통해서 가장 강하게 분기좌굴하중과 모드에 영향을 주고, 반면에 하중편심도는 전좌굴상태와 하중-기하학적 행렬  $K_2$ 에 미치는 영향을 통해서 가장 강하게 분기좌굴하중과 모드에 영향을 주는 것이 사실이다. 이것은 다른 기하학적 형상을 갖는 셸보다도 원통셸에 적용될 때 더 타당하다.

### 5. 조립된 얇은 두께의 판넬 및 셸의 최적설계

경량구조물은 흔히 판에 용접 또는 리벳조립된 상당히 깊은 보강재로 보강된 굽은 판이나 평판들로 구성된다. 중량의 제한은 보강재의 두께를 높이에 비해 얇게 만든다. 그와 같은 조립된 셸구조물의 설계문제는 좌굴과 진동 중에 각종 좌굴모드의 발생과 하중작용시 셸벽의 국부적 뒤틀림 등에 의해서 복잡해진다.

#### 5.1 좌굴의 세 가지 형태

흔히 세 가지 다른 형태의 좌굴이 보통 독립적인 해석에서 조사된다. 긴 파장길이의 전체불안정은 보강재의 역학적 특성을 판면에 균배시킴으로써 취급된다. 중간 파장길이 또는 판넬 불안정은 보강재의 위치에서의 어떤 경계조건의 가정과 함께 또는 그 단면이 변형하지 않는 보강재를 독립된 탄성구조물로 취급함으로써 조사된다. 짧은 파장길이의 국부좌굴은 보통 축압축하중을 받고 있는 평면 또는 원통형판넬의 해석에 의해서 예측된다.

#### 5.2 단순한 설계방법

위와 같은 구조물은 흔히 최적영역의 사용을 통해서 설계된다. 셸의 두께 및 보강재의 간격치수는 그림 15(a)와 같은 전체 불안정

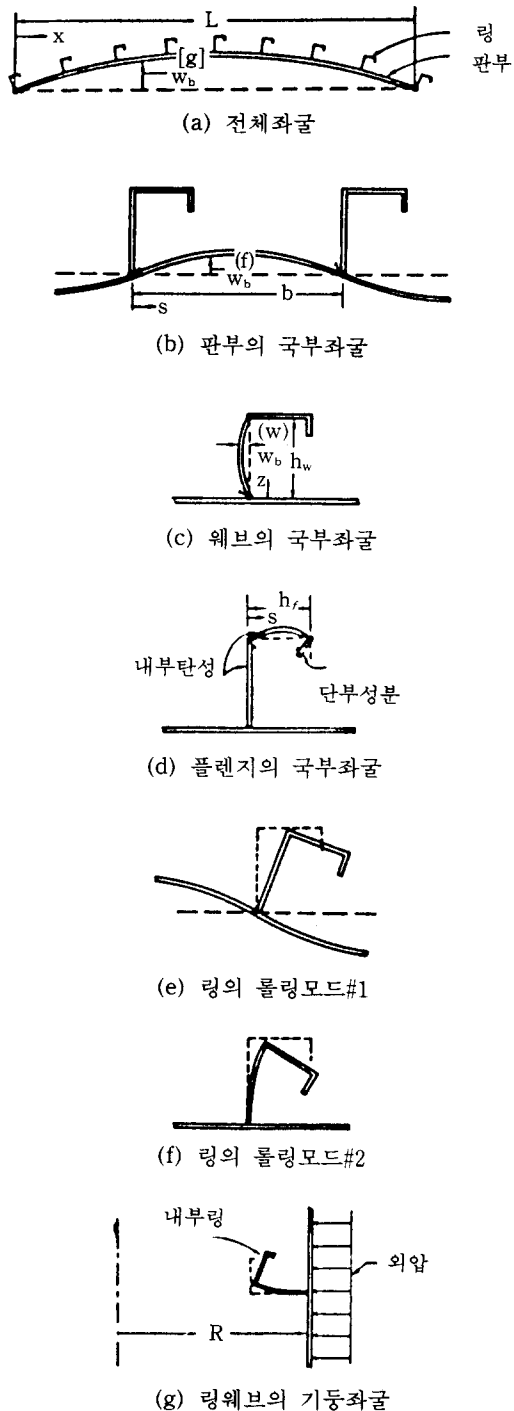


그림 15 보강판넬에 대한 전체 및 국부 분기좌굴모드

모드의 좌굴하중이 그림 15(b)와 같은 인접 보강재 사이의 판의 좌굴하중과 같은 하중에서 발생하는 것과 같이 결정된다. 보강재성분의 높이 및 두께는 그림 15(c) 및 15(d)와 같은 각 부분의 국부좌굴이 그림 15(a) 및 15(b)와 같은 전체 및 국부 불안정에 의한 셀벽에서의 국부좌굴과 같은 임계압축변형률에서 발생하는 것과 같이 결정된다. 설계는 각부가 독립적으로 해석되고 구조물의 나머지 부분과 독립적으로 좌굴될 수 있다는 가정과 함께 좌굴변형률의 계산에 의해서 달성된다. 가정된 좌굴모드에 대한 단순한 표현의 사용을 허용하기 위하여 단순지지의 단부조건들이 각부의 경계에서 주어진다.

### 5.3 롤링좌굴모드

그림 15(e)부터 15(g)까지는 롤링이라 불리는 보강재좌굴의 여러가지 형태를 보여주고 있다.<sup>(17,18)</sup> 그림 15(e)에서는 판넬의 판부가 국부좌굴되고, 그림 15(f), 15(g)에서는 국부좌굴되지 않는다. 전자에서 보강재단면은 변형하지 않고 판부에 부착된 선을 중심으로 단순히 회전만 하고, 후자에서 보강재의 웹은 변형하고 웹에 부착된 단면부분은 병진 및 회전한다. 그림 15(f)에서의 좌굴은 지면에 수직인 압축 때문에 발생하고 그림 15(g)에서의 좌굴은 외압을 받는 원통셀이 내부링을 가진 경우와 내압을 받는 원통셀이 외부링을 갖는 경우에 발생한다. 그것은 지면에 있는 웹에서 웹의 단부에 부착된 링부분이 반경방향 변위에 저항하기 때문에 발생한 압축에 의한 것이다. 웹에서의 반경방향압축은 웹의 축대칭의 넓은 기둥좌굴을 발생시킬 수 있다.

### 5.4 좌굴모드의 상호작용

보강재를 회전시키는 힘이 없이는 그림 15(b)에서와 같이 2개의 인접 보강재 사이의 판부의 국부좌굴이 발생할 수 없다는 것이 명백하다. 마찬가지로, 각 보강재 단면요소

의 국부좌굴은 이 요소들의 연결이 힌지연결이 아니므로 다른 요소들과 독립적으로 그림 15(c) 및 15(d)에 표시된 것처럼 발생할 수 없다. 그 부분들 사이에서 많은 힌지를 가진 모델은 좌굴하중의 하한값을 제공하기 때문에 실제 구조물에 대하여 요구된 것보다 더 두꺼운 부분을 제공한다.

그러나 국부 및 전체 불안정모드와 여러가지 국부 불안정모드의 상호작용 때문에, 흔히 결합된 완전구조물에 대하여 계산된 임계좌굴하중은 그들이 마치 경계에서 힌지로 연결된 것처럼 취급된 이 구조물의 부분들에 대해서 독립적으로 계산된 것보다 더 낮다. 다시 말하면, 위에서 언급한 여러 형태의 불안정성이 별개가 아닌 많은 경우들이 있다. 링이나 길이방향보강재의 국부뒤틀림은 전체 그리고 판넬 불안정성 예측에 중대한 영향을 미치고, 상당히 긴 길이의 파장은 국부좌굴 예측에 중대한 영향을 미칠 수 있다.

### 5.5 불완전구조물에서의 좌굴모드의 상호작용

불완전구조물에서의 좌굴모드의 상호작용의 효과는 완전구조물의 경우와는 기본적으로 다르다. 그것은 일반불안정에 대한 임계하중을 감소시키는 방법으로 강성을 감소시키는 효과를 갖는 구조물의 국부결함에 주로 관련된다. 작은 결함에 의한 하중지탱능력의 감소는 동시에 발생하는 전체 및 국부불안정에 대한 설계점에서 특히 심각하다.

Thompson과 Lewis는 van der Neut의 두 플렌지모델에 대하여 기둥의 축이 직선을 유지한다는 가정하에서 초기결함을 고려한 최적설계를 수행하였다.<sup>(19)</sup> 그들은 초기결함의 증가에 따라 최적하중 지탱능력이 완전기둥에서 동시에 발생하는 국부 및 전체 불안정에 대한 값들로부터 급격히 감소하고, 아주 작은 결함에 대한 최적설계가 그림 16과 같이 기둥의 Euler형 좌굴이 플렌지의 국부좌굴보다 낮은 하중하에서 발생하는 설계에 동

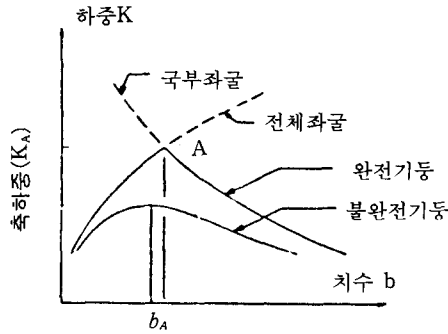


그림 16 결함으로 인한 최적설계의 변화

시 발생좌굴영역을 부과하여 얻어진 결과로부터 멀어진다는 것을 발견하였다.

### 6. 맺음말

얇은 셸구조물의 능률적이고 신뢰성 있는 설계를 위하여, 설계자는 셸좌굴의 특성을 이해하여야 한다. 이 글에서는 좌굴특성에 대한 설계자의 직관적 이해를 돕기 위하여 좌굴의 발생원인과 형태, 좌굴해석의 연구동향, 원통셸의 고전적 좌굴과 점근결함민감도 해석 및 최적설계 등을 주로 참고문헌 (20)의 내용을 토대로 기술하였다. 상기와 같은 좌굴에 대한 직관적인 지식과 함께 설계자는 좌굴이 발생할 수 있는 상황을 예측하고 그것을 피하기 위하여 설계를 변화시킬 수 있는 개발된 능력을 갖추고, 해석적인 예측과 실험을 위한 좀더 적절한 모델을 설정할 수 있을 것으로 기대된다.

### 참고문헌

(1) Sobel, L. H. and Newman, S. Z., 1979, "Plastic Buckling of Cylindrical Shells," ASME Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 102, pp. 40~44.  
 (2) Hutchinson, J. W. and Koiter, W. T., 1970, "Post Buckling Theory," Applied

Mechanics Review, Vol. 23, pp. 1353~1356.  
 (3) Bushnell, D., 1974, "A Computerized Information Retrieval System," Structural Mechanics Computer Programs, pp. 735~804.  
 (4) Bushnell, D., 1974, "Stress, Stability and Vibration of Complex Branched Shells of Revolution," Computer and Structures, Vol. 4, pp. 399~435.  
 (5) Oden, J. T., 1972, Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill Book Co., N. Y.  
 (6) Horton, W. H., Bailey, S. C., and McQuilkin, B. H., 1966, "An Introduction to Stability," Stanford Univ. Report Version of Paper 219, Presented at ASTM Annual Meeting, N. J.  
 (7) Brush, D. O. and Almqvist, B. O., 1975, Buckling of Bars, Plates, and Shells, McGraw-Hill Book Co., N. Y.  
 (8) Donnell, L. H. and Wan, C. C., 1950, "Effects of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression," J. of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 73~83.  
 (9) Koiter, W. T., 1945, "Over de Stabiliteit van het Elastisch Evenwicht," Univ. of Delft Thesis, Paris, Amsterdam.  
 (10) Hoff, N. J., 1966, "The Perplexing Behavior of Thin Cylindrical Shells in Axial Compression," Israel Journal of Technology, Vol. 4, No. 1, pp 1~28.  
 (11) Tvergaard, V., 1976, "Buckling of Behavior of Plate and Shell Structures," Proceeding of 14th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland Publishing Co. N.Y., pp 233~247.  
 (12) Hutchinson, J. W., 1965, "Axial Buckl-

- ing of Pressurized Imperfect Cylindrical Shells," AIAA Journal, Vol. 3, pp. 1461~1466.
- (13) Almroth, B. O., Burns, A. B. and Pittner, E. V., 1960, "Design Criteria for Axially Loaded Cylindrical Shells," Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 7, pp. 714~720.
- (14) Hutchinson, J. W. and Amazigo, J. C., 1967, "Imperfection Sensitivity of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells," AIAA Journal Vol. 5, pp. 392~401.
- (15) Budiansky, B. and Hutchinson, J. W., 1966, "A Survey of Some Buckling Problems," AIAA Journal, Vol. 4, pp. 1505~1510.
- (16) Bushnell, D., 1976, "BOSOR5-Program for Buckling of Elastic-Plastic Complex Shells of Revolution Including Large Deflections and Creep," Computers & Structures, Vol. 6, pp. 221~239.
- (17) Bushnell, D., 1986, "PANDA-Interactive Program for Minimum Weight Design of Composite and Elastic-plastic Stiffened Analysis Systems, Vol. 1, Pergamon Press, pp. 171~201.
- (18) Won, C. J., 1992, "A Study on the Minimum Weight Design of Stiffened Cylindrical Shells," Trans. of KSME, Vol. 16, No. 4, pp. 630~648.
- (19) Thompson, J. M. T. and Lewis, G. M., 1972, "On the Optimum Design of Thin-walled Compression Members," Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 20, pp. 101~109.
- (20) Bushnell, D. 1985, Computerized Buckling Analysis of Shell, Martinus Nijhoff Publishers. 