

〈論 文〉

## 경계요소법을 이용한 수직열유동을 받는 접합경계면 커스프균열의 열응력세기계수 결정

이강용\* · 백운천\*\*

(1993년 3월 27일 접수)

### Boundary Element Analysis of Thermal Stress Intensity Factor for Interface Crack under Vertical Uniform Heat Flow

Kang Yong Lee and Woon Cheon Baik

**Key Words :** Bimaterial(접합재료), Boundary Element Method(경계요소법), Interface Crack(경계면 균열), Lip Cusp Crack(입술형 커스프균열), Thermal Stress Intensity Factor(열응력세기계수)

#### Abstract

The thermal stress intensity factors for interface cracks of Griffith and symmetric lip cusp types under vertical uniform heat flow in a finite body are calculated by boundary element method. The boundary conditions on the crack surfaces are insulated or fixed to constant temperature. The relationship between the stress intensity factors and the displacements on the nodal point of a crack tip element is derived. The numerical values of the thermal stress intensity factors for interface Griffith crack in an infinite body and for symmetric lip cusp crack in a finite and homogeneous body are compared with the previous solutions. The thermal stress intensity factors for symmetric lip cusp interface crack in a finite body are calculated with respect to various effective crack lengths, configuration parameters, material property ratios and the thermal boundary conditions on the crack surfaces. Under the same outer boundary conditions, there are no appreciable differences in the distribution of thermal stress intensity factors with respect to each material properties. But the effect of crack surface thermal boundary conditions on the thermal stress intensity factors is considerable.

#### 1. 서 론

접합재료의 경계면균열 문제에서는 균질재료의 경우와는 달리 기하학적 불연속 뿐만 아니라 물성치의 불연속으로 인하여 열림형 하중상태에서도 열림형 및 전단형 응력세기계수(SIF: stress intensity

factor)가 동시에 발생하게 된다.

기계적 하중하에서 접합재료의 경계면균열에 대한 이론적 연구는 Williams<sup>(1)</sup>에 의해서 최초로 이루어 졌고, 그 뒤에 Erdogan,<sup>(2)</sup> England,<sup>(3)</sup> Rice와 Sih<sup>(4)</sup> 등도 Muskhelishvili<sup>(5)</sup>의 복소함수이론을 도입하여 접합재료의 경계면균열 문제를 해석적으로 풀고자 했다. Comninou<sup>(6,7,8)</sup>는 고전적인 탄성이론을 사용할때 경계면균열의 균열선단에서 발생하는 응력 및 변위의 진동(oscillation) 현상을 지적하고

\*정회원, 연세대학교 기계공학과

\*\*정회원, 현대정공 기술연구소

이를 해결하기 위한 방법을 제시하였다. Lee등<sup>(9)</sup>은 경계요소법(boundary element method)에 의해 유한체 경계면균열에 대한 응력세기계수를 결정할 수 있는 식을 제시하였다.

균일 열유동을 받는 접합재료의 경계면균열에 대한 문제는 Erdogan<sup>(10)</sup>이 일련의 직렬 선형균열에 대해 응력분포를 제시하였으나 열응력세기계수(TSIF: thermal stress intensity factor)에 대한 구체적인 결과를 주지는 못하고 있다. 한편 Bregman과 Kassir<sup>(11)</sup>는 동전형 균열에 대해서, Takakuda<sup>(12)</sup>는 축대칭 외부경계면의 선형균열에 대하여 Muskhelishvili<sup>(9)</sup>의 복소함수론을 이용하여 열응력세기계수에 관한 식을 제시하였다. Sumi<sup>(13,14)</sup>는 이중 정방형 유한평판내의 중앙 경계면균열과 모서리 경계면균열에 대해서 열응력세기계수를 수치해석법에 의해 근사적으로 구하였다. Lee등<sup>(15)</sup>은 무한체의 선형 경계면균열에 대한 열응력 문제를 Sumi<sup>(13,14)</sup>의 방법론을 따라 Hilbert 문제화 하고, 복소방법에 의해 이론적인 열응력세기계수식을 제시하였다.

경계요소법을 이용한 열하중상태의 균열문제에 대한 연구로는 Tanaka등<sup>(16)</sup>과 Sládek등<sup>(17)</sup>이 유한체 균질재료의 선형균열에 대한 열응력세기계수를 구하였으며, Lee등<sup>(18,19)</sup>은 유한체 균질재료의 커스프균열(cusp crack)에 대하여 각각 정상 및 천이상태의 열응력세기계수를 구하였다.

커스프균열에 대한 연구로는 Chen<sup>(20)</sup>과 Wu<sup>(21)</sup>가 복소함수론을 이용하여 무한체 균질재료의 기계적 하중상태에 대한 열응력세기계수를 구하였으며, Lee등<sup>(22,23)</sup>은 복소함수론을 이용하여 균일열유동에 있는 무한체 균질재료 내에 커스프균열이 존재하는 경우 커스프균열의 표면에 트랙션이 없거나 또는 변위가 고정된 기계적 하중조건과 단열 또는 온도가 영으로 고정된 열경계 조건을 가했을 때 균열선단의 열응력세기계수를 구하였다. 그러나, 유한체 접합 경계면상의 커스프균열에 대한 열응력세기계수를 구한 연구는 찾아보기가 어렵다.

본 논문에서는 경계요소법에 의해 수직 균일열유동하에 있는 접합경계면균열의 열응력세기계수를 결정할 수 있는 열응력세기계수와 균열선단요소 절점상의 변위와의 관계식을 유도한다. 그리고 유도된 식과 경계요소법에 의해 유한체 내의 선형균열과 대칭입술형 커스프균열(symmetric lip cusp crack)에 대한 정상상태 열응력세기계수를 결정하

고자 한다.

## 2. 경계적분 방정식

경계면 S를 Fig. 1과 같이 N개의 상수 경계요소로 분할하였을 때 수치적분을 위하여 변환된 2차원 온도장 문제의 경계적분방정식(boundary integral equation)은 다음과 같다.<sup>(24)</sup>

$$\frac{1}{2} T^n + \sum_{m=1}^N \left[ \int_{-1}^1 q_m^{n*} J(\xi) d\xi \right] T_m = \sum_{m=1}^N \left[ \int_{-1}^1 T_m^{n*} J(\xi) d\xi \right] q_m \quad (n=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

여기서  $T, q$ 는 온도와 열유동을 나타내며,  $T_m^{n*}, q_m^{n*}$ 는 각각 절점  $m$ 에 단위점력(unit charge)이 작용할 때 절점  $m$ 에서 발생하는 온도와 열유동의 Kelvin 기본해(fundamental solution)이다.  $J(\xi)$ 는 경계요소를 직교좌표계에서 구부좌표계  $\xi$ 로 전환시킬 때의 Jacobian이다.

식(1)로부터 구성되는 전체 행렬식 형태는 다음과 같다.

$$[B]_{N \times N} \{T\}_{N \times 1} = [C]_{N \times N} \{q\}_{N \times 1} \quad (2)$$

여기에서 행렬  $[B], [C]$ 는 각 절점에서의 열유동과 온도 기본해를 수치적분 하여 얻어지는 계수행렬이다.

한편 N개의 상수경계요소로 분할된 경계면상에서 구성되는 2차원 열탄성문제의 경계적분방정식은 다음과 같다.<sup>(24)</sup>

$$\frac{1}{2} u_i^n + \sum_{m=1}^N \left[ \int_{-1}^1 t_{ijm}^{n*} J(\xi) d\xi \right] u_{jm}$$

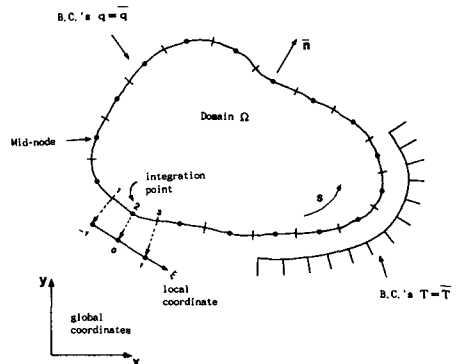


Fig. 1 Boundary of two dimensional body divided into boundary elements

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{m=1}^N \left[ \int_{-1}^1 u_{jm}^n J(\xi) d\xi \right] t_{jm} \\
 &+ \sum_{m=1}^N \left[ \int_{-1}^1 A_{im}^n T_m J(\xi) d\xi \right] \\
 &- \sum_{m=1}^N \left[ \int_{-1}^1 D_{im}^n q_m J(\xi) d\xi \right] \\
 &(n=1, 2, \dots, N) \tag{3}
 \end{aligned}$$

여기서  $t, u$ 는 트랙션과 변위를 나타내며,  $t_{jm}^n, u_{jm}^n$ 는 절점  $n$ 에  $i$ 방향의 단위점력이 작용할 때 절점  $m$ 에서  $j$ 방향으로 발생하는 트랙션 및 변위 기본해이고,  $A, D$ 는 온도장문제에서 구해진 온도와 열유동 분포에 의해 발생하는 체적력(body force)을 구성하는 계수행렬의 요소이다.

식(3)으로부터 구성되는 전체 행렬식의 형태는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [H]_{2Nx2N} \{u\}_{2Nx1} &= [G]_{2Nx2N} \{t\}_{2Nx1} \\
 &+ [A]_{2NxN} \{T\}_{Nx1} + [D]_{2NxN} \{q\}_{Nx1} \tag{4}
 \end{aligned}$$

식(4)에서 행렬  $[H], [G]$ 는 트랙션과 변위 기본해를 수치적분하여 구성되는 계수행렬이다.

식(1), (3)의 피적분함수는  $0(1/r)$  및  $0(lnr)$ 의 특이항을 가지므로 단위점력의 작용점과 피적분점이 일치하는 경우에는 두점사이의 거리  $r$ 이 영이 되어 이들 피적분함수의 특이성으로 인해 일반적인 Gauss<sup>(24)</sup>의 수치적분을 적용할 수 없게 된다. 이러한 경우에는 특이적분을 수행하여야 한다.

$0(1/r)$ 과 같은 강한 특이성의 처리는 Davis<sup>(25)</sup>가 제시한 다음과 같은 Cauchy 주치적분의 공식을 이용한다.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b f(s) ds \quad (a < c < b) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^c f(s) ds + \int_c^b f(s) ds \right] \tag{5}
 \end{aligned}$$

여기서  $c$ 는 특이점이며  $\epsilon$ 은 특이점 주위의 미소 반경이다.

$0(lnr)$ 과 같이 약한 특이성을 갖는 피적분함수를 적분하는 경우에는 logarithmic 수치적분법<sup>(24)</sup>에 따라 수치적분을 수행하거나  $0(1/r)$ 에서와 마찬가지로 Cauchy 주치적분으로 처리할 수 있다. 본 논문에서 개발된 프로그램에서는  $0(lnr)$ 의 특이함수에도 Cauchy 주치적분이 사용된다. 특이성이 발생하지 않는 수치적분의 경우에는 6점 Gauss 수치적분이 적용된다.

경계요소법에 의해 접합재료의 경계면균열에 대한 응력해석을 수행하기 위해서 원래의 영역을 균

열면이 접합관계(interface boundary condition)에 포함되도록 소영역들로 분할하고, 경제적분방정식을 각 영역에 독립적으로 적용한 다음, 접합면에서의 연속 및 적합조건을 적용하여 새로운 행렬식을 구성하는 다중영역방법<sup>(24)</sup>이 적용된다.

### 3. 열응력세기계수의 결정

Sumi<sup>(13)</sup>는 선형균열을 갖는 무한체가 정상 열유동을 받을때 Muskhelishvili<sup>(5)</sup>의 복소해석 방법을 사용하여 Hilbert 문제화 하고, 변위와 복소포텐셜 함수 사이의 관계식을 다음과 같이 제시하였다.

$$\begin{aligned}
 u_1 + iv_1 &= \frac{1}{2\mu_1(\mu_1 + \mu_2 k_1)} \cdot \\
 &\left[ (\mu_1 + K) \{k_1 \theta(Z) + \theta(\bar{Z}) - (Z - \bar{Z}) \cdot \right. \\
 &\left. \theta'(Z)\} + \{k_1 \omega(Z) - \beta \omega(\bar{Z}) - (Z - \bar{Z}) \cdot \right. \\
 &\left. \omega'(Z)\} + 2\mu_1 \{ \mu_1 \alpha_1 \int \Omega_1(Z) dZ + \beta \mu_2 \alpha_2 \cdot \right. \\
 &\left. \int \Omega_2(\bar{Z}) d\bar{Z} + \mu_2 \alpha_1 (Z - \bar{Z}) \overline{\Omega_1(Z)} \} \right] \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 + iv_2 &= \frac{1}{2\mu_2(\mu_2 + \mu_1 k_2)} \cdot \\
 &\left[ (\mu_2 + K) \{k_2 \theta(Z) + \theta(\bar{Z}) - (Z - \bar{Z}) \cdot \right. \\
 &\left. \theta'(Z)\} + \{k_2 \omega(Z) - \frac{1}{\beta} \omega(\bar{Z}) - (Z - \bar{Z}) \cdot \right. \\
 &\left. \omega'(Z)\} + 2\mu_2 \{ \mu_2 \alpha_2 \int \Omega_2(Z) dZ + \frac{1}{\beta} \mu_1 \alpha_1 \cdot \right. \\
 &\left. \int \Omega_1(\bar{Z}) d\bar{Z} + \mu_1 \alpha_2 (Z - \bar{Z}) \overline{\Omega_2(Z)} \} \right] \tag{7}
 \end{aligned}$$

여기서  $u_j$ 와  $v_j$ 는 영역  $j$ 에서의  $x$  및  $y$ 방향 변위이고,  $Z$ 는 복소변수,  $\omega(Z), \theta(Z)$ 와  $\Omega_j(Z)$ 는 복소포텐셜 함수로 물체의 기하학적 형상 및 경계조건에 의해 결정된다.  $\mu$ 와  $\alpha$ 는 횡탄성계수와 열팽창계수이며,  $\beta$ 는 bielastic constant 이고,  $\beta, K$ 와  $k_j$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 + \mu_2 k_1}{\mu_2 + \mu_1 k_2} \tag{8}$$

$$K \equiv \frac{-\mu_1(1 - \beta k_2)}{1 + \beta} \tag{9}$$

$$k_j \equiv \begin{cases} 3 - 4\nu_j & (\text{평면 응력상태}) \\ \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j} & (\text{평면 변형률상태}) \end{cases} \tag{10}$$

여기서  $\nu$ 는 푸아송비이다.

Lee<sup>(15)</sup>등은 Fig. 2와 같이 선형 경계면균열에 수직인 방향으로 균일 열유동  $Q$ 가 흐르고 균열면의

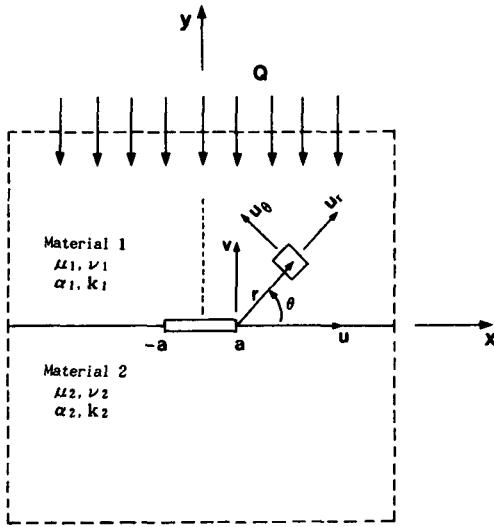


Fig. 2 The interface crack between two bonded dissimilar half planes subjected to uniform vertical heat flow Q

열경계조건이 단열되어 있는 경우에 대하여 균질 및 접합재료 모두에 적용될 수 있는 복소포텐셜함수와 응력세기계수식을 다음과 같이 구하였다.

$$\Omega_1(Z) = i \frac{Q}{k_1} \sqrt{Z^2 - a^2} \quad (11)$$

$$\Omega_2(Z) = i \frac{Q}{k_2} \sqrt{Z^2 - a^2} \quad (12)$$

$$\theta'(Z) = 0 \quad (13)$$

$$\omega'(Z) = 2\mu_1\mu_2 \left( \frac{iQ}{1+\beta} \right) \left( \frac{\alpha_1}{k_1} + \beta \frac{\alpha_2}{k_2} \right) \cdot [\sqrt{Z^2 - a^2} - X_0(Z) \{ Z^2 - \frac{1}{2}a^2 - 2i\gamma_0 aZ - 2\gamma_0^2 a^2 \}] \quad (14)$$

$$K_I - iK_{II} = \frac{-2Q\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 k_1} \frac{a\sqrt{\pi a}}{\cosh(\pi\gamma_0)} \left( \frac{\alpha_1}{k_1} + \beta \frac{\alpha_2}{k_2} \right) \{ \cos(\gamma_0 \ln 2a) + i \sin(\gamma_0 \ln 2a) \} \left\{ \left( \frac{1}{2} - 2\gamma_0^2 \right) i + 2\gamma_0 \right\} \quad (15)$$

여기서  $a$ 는 균열길이의 반이며  $k$ 는 열전도계수이고,  $X_0$ 와  $\gamma_0$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$X_0(Z) \equiv \left[ \frac{Z+a}{Z-a} \right]^{i\gamma_0} [Z^2 - a^2]^{-1/2} \quad (16)$$

$$\gamma_0 \equiv \frac{1}{2\pi} \ln \beta \quad (17)$$

Fig. 2와 같이 좌표축의 원점을 균열선단에 놓고 식(11)~(14)를 식(6)에 대입하면 영역1의 균열선

단 가까이에서 변위분포식은 균열면상에서 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$2\mu_1(\mu_1 + \mu_2 k_1) \{u_1 + iv_1\} = \frac{-2\mu_1\mu_2}{\sqrt{2}} a\sqrt{ar_1} \left( \frac{iQ}{1+\beta} \right) \left( \frac{\alpha_1}{k_1} + \beta \frac{\alpha_2}{k_2} \right) \left[ \frac{2a}{r_1} \right]^{i\gamma_0} (2\gamma_0 + i) e^{\pi\gamma_0} (k_1 + \beta) \quad (18)$$

식(15)를 식(18)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 영역1에서 변위의 함수로 표현된 접합경계면 균열에 대한 열응력세기계수식을 얻을 수 있다.

$$K_I - iK_{II} = -\frac{1+\beta}{k_1 + \beta} \sqrt{\frac{2\pi}{r_1}} \cdot \mu_1 \frac{e^{-\pi\gamma_0}}{\cosh(\pi\gamma_0)} (2\gamma_0 + i) (r_1)^{i\gamma_0} [u_1 + iv_1] \quad (19)$$

같은 방법으로 영역 2에서의 열응력세기계수는 다음과 같다.

$$K_I - iK_{II} = \frac{1+1/\beta}{k_2 + 1/\beta} \sqrt{\frac{2\pi}{r_2}} \cdot \mu_2 \frac{e^{\pi\gamma_0}}{\cosh(\pi\gamma_0)} (2\gamma_0 + i) (r_2)^{i\gamma_0} [u_2 + iv_2] \quad (20)$$

새로운 열응력세기계수  $K^*$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$K^* \equiv \sqrt{(K_I)^2 + (K_{II})^2} \quad (21)$$

식(21)로 주어지는  $K^*$ 는 에너지해방률(energy release rate)에 비례하는 parameter이다.

#### 4. 수치해석 결과 및 검토

경계요소 프로그램은 2차원 정상상태 선형 열탄성학문제의 응력해석을 위하여 개발된 상수 경계요소 프로그램<sup>(18)</sup>에 다중영역방법을 적용하여 부분비균질 재료(piecewise nonhomogeneous material) 문제까지 해석할 수 있도록 확장한 것이다. 프로그램 언어는 FORTRAN 77이며, 수치해석은 VAX-6420을 이용하여 수행 되었다.

대칭입술형 커스프균열의 복소등각사상함수는 다음과 같다.<sup>(22)</sup>

$$Z = \omega(\xi) = \frac{R_0(m+2)}{4} \left[ \xi + \frac{2(1-m)}{m+2} \frac{1}{\xi} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{\xi^2} \right] \quad (22)$$

여기서  $2R_0$ 는 상당균열 길이(equivalent crack

length)이고  $Z$ 는 실평면상의 좌표점이며  $\zeta$ 는 사상 평면상의 좌표점이다.  $m$ 은 형상계수로서 0인 경우에는 커스프균열의 형상이 선형균열(Griffith crack)로 표현되며 형상계수의 증가에 따라 Fig. 3에서 보는 바와 같이 균열면 중앙부의 틈새가 점차 커지게 된다. 본 연구에서는  $m$ 이 0인 선형 경계면 균열과 0.1인 대칭 입술형 커스프 경계면균열의 경우를 택하였다. 커스프균열의 균열면은 Fig. 3과 같이 일정한 형태의 곡면을 형성하고 있으므로 수치해석을 위한 균열경계면 좌표는 식 (22)로 부터 결정하였다.

본 논문에서 사용된 모델은 모두  $y$ 축에 대하여 열 및 역학적 대칭성을 가지므로, 수치해석은 우측 1/2에 대하여 수행되었다. 접합재료의 응력상태는

평면 변형률상태를 가정하였으며, 영역1의 물성치는 열팽창계수  $\alpha_1=0.00002(^{\circ}K)$ , 횡탄성계수  $\mu_1=8000.0$  (MPa), 푸아송비  $\nu_1=0.3$ 으로 고정하였다. 열전도계수는 양 영역 모두  $1.0(^{\circ}K/m)$ 로 고정하였다. 수치해석에 사용된 모든 모델의 열 및 기계적 경계조건은 Fig. 4에서 제시된 바와 같다.

균열면의 열경계조건은 단열인 경우( $\gamma=+1$ )와 일정한 온도로 유지된 경우( $\gamma=-1$ )로 하였다. 균열면이 단열된 경우에는 커스프균열의 형상계수에 관계없이 열응력세기계수가 발생하지만, 균열면이 접합면에서와 같은 온도로 일정하게 유지되면 형상계수  $m=0$ 인 경우에는 열응력세기계수가 발생하지 않는다.<sup>(22)</sup> 따라서 이 경우에는 형상계수  $m=0.1$ 에 대해서만 열응력세기계수를 구하였다.

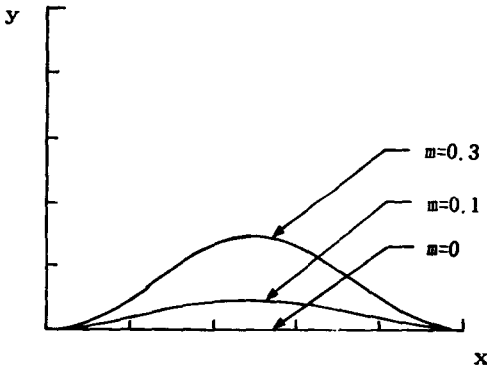


Fig. 3 Configuration of symmetric lip cusp cracks

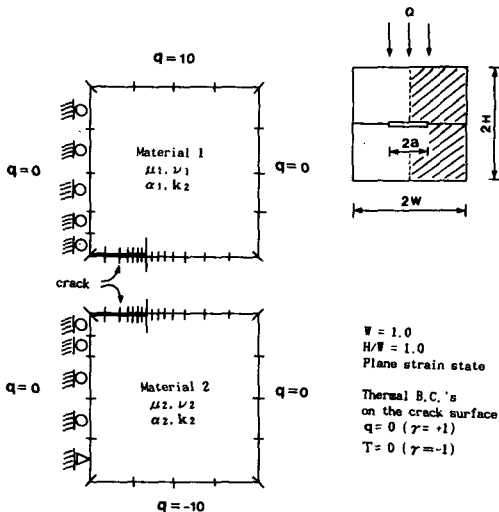


Fig. 4 Boundary conditions of interface Griffith cracked bimaterial body

4.1 프로그램의 검증

Table 1~3에서는 유효균열길이  $R_0/W=0.1$ 인 경우를 무한체로 가정하여 Fig. 4와 같이 수직균열

Table 1 Comparison between exact<sup>(15)</sup> and present solutions for insulated interface Griffith crack( $\gamma=+1$ ) in an infinite bimaterial body with respect to thermal expansion coefficient ratio  $\alpha_0$

K*	$\alpha_0$				
	1	2	3	4	5
exact <sup>(15)</sup>	0.833	1.249	1.666	2.082	2.498
present	0.859	1.299	1.733	2.165	2.599
err.(%)	3.1	4.0	4.1	4.0	4.1

Table 2 Comparison between exact<sup>(15)</sup> and present solutions for insulated interface Griffith crack ( $\gamma=+1$ ) in an infinite bimaterial body with respect to shear modulus ratio  $\mu_0$

K*	$\mu_0$				
	1	2	3	4	5
exact <sup>(15)</sup>	0.833	1.120	1.273	1.369	1.421
present	0.859	1.160	1.294	1.343	1.402
err.(%)	3.1	3.6	1.7	1.9	1.4

열유동을 받을 때  $m=0$ 이고  $\gamma=+1$ 인 경우에 대해 각각 열팽창계수비  $\alpha_0 (\equiv \alpha_1/\alpha_2)$ , 횡단성계수비  $\mu_0 (\equiv \mu_1/\mu_2)$ , 푸아송비  $\nu_0 (\equiv \nu_1/\nu_2)$ 의 변화에 따른 열응력세기계수  $K^*$ 의 변화를 기존 이론해<sup>(15)</sup>와 비교한 결과를 보여주고 있다. 수치해석 결과는 기존 이론해와 오차 5% 이내에서 잘 맞고 있다.

Table 4에서는 Fig. 4와 같이 수직 균열열유동을 받는 유한체 균질재료 내에  $m=0.1$ 인 대칭 입술형 커스프균열이 존재할 때 균열면의 열경계조건 ( $\gamma = \pm 1$ )에 따른 열응력세기계수를 Lee 등<sup>(18)</sup>의 수치결

**Table 3** Comparison between exact<sup>(15)</sup> and present solutions for insulated interface Griffith crack ( $\gamma = +1$ ) in an infinite Poisson's ratio  $\nu_0$

K*	$\nu_0$				
	1.0	1.04	1.08	1.12	1.16
exact <sup>(15)</sup>	0.833	0.844	0.855	0.867	0.880
present	0.859	0.864	0.882	0.898	0.915
err.(%)	3.1	2.4	3.2	3.6	4.0

**Table 4** Comparison between Ref.[18] and present solutions for symmetric lip cusp crack ( $m=0.1$ ) in homogeneous finite body.

$R_0/W$	$K^*$					
	$\gamma = +1$			$\gamma = -1$		
	Ref.[18]	present	err.(%)	Ref.[18]	present	err.(%)
0.1	0.704	0.691	1.8	0.077	0.076	1.0
0.2	2.096	2.084	0.6	0.205	0.210	3.0
0.3	3.888	3.972	2.2	0.358	0.354	1.2
0.4	5.936	5.883	0.9	0.525	0.504	4.0
0.5	7.880	7.861	0.2	0.648	0.658	1.5

**Table 5** Thermal stress intensity factor for insulated symmetric lip cusp interface cracks ( $\gamma = +1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and thermal expansion coefficient ratio  $\alpha_0$

$R_0/W$	$m$	$K^*$				
		$\alpha_0$				
		1	2	3	4	5
0.1	0	0.859	1.299	1.733	2.165	2.599
	0.1	0.691	1.038	1.448	1.731	2.171
0.2	0	2.575	3.862	5.150	6.437	7.725
	0.1	2.084	3.125	4.293	5.208	6.438
0.3	0	4.633	6.950	9.266	11.583	13.899
	0.1	3.972	5.955	7.834	9.923	11.750
0.4	0	6.918	10.377	13.837	17.296	20.755
	0.1	5.883	8.823	11.653	14.703	17.477
0.5	0	9.348	14.022	18.6969	23.370	28.044
	0.1	7.861	11.790	15.672	19.648	23.508

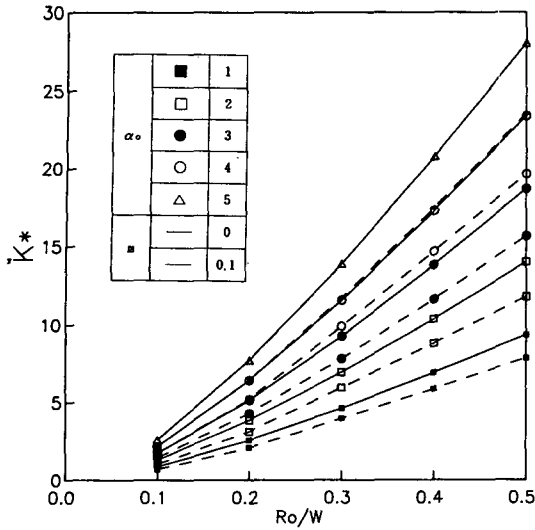


Fig. 5 Variation of thermal stress intensity factor for insulated symmetric lip cusp interface cracks ( $\gamma=+1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_o/W$  and thermal expansion coefficient ratio  $\alpha_0$

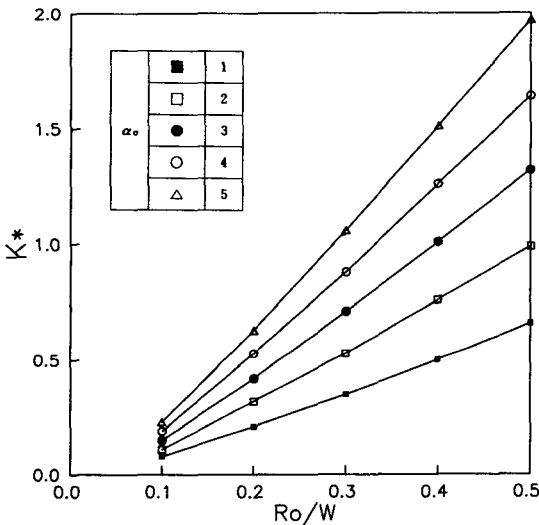


Fig. 6 Variation of thermal stress intensity factor for symmetric lip cusp interface cracks ( $m=0.1$  and  $\gamma=-1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_o/W$  and thermal expansion coefficient ratio  $\alpha_0$

Table 6 Thermal stress intensity factor for symmetric lip cusp interface cracks ( $m=0.1$  and  $\gamma=-1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_o/W$  and thermal expansion coefficient ratio  $\alpha_0$

$R_o/W$	$K^*$				
	$\alpha_0$				
	1	2	3	4	5
0.1	0.076	0.114	0.153	0.190	0.229
0.2	0.210	0.316	0.421	0.526	0.631
0.3	0.354	0.530	0.706	0.882	1.058
0.4	0.504	0.756	1.007	1.259	1.510
0.5	0.658	0.986	1.315	1.643	1.971

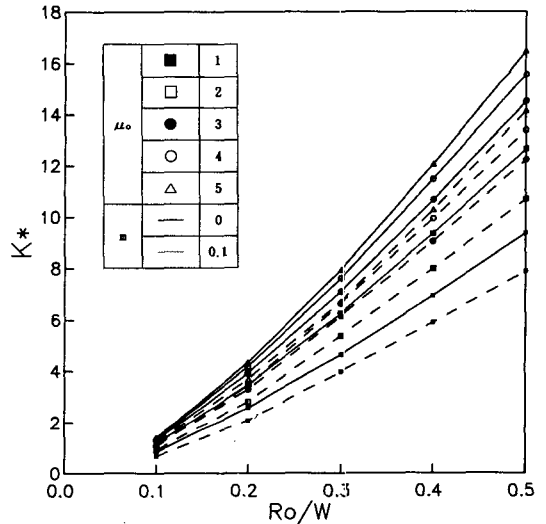


Fig. 7 Variation of thermal stress intensity factor for insulated symmetric lip cusp interface cracks ( $\gamma=+1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_o/W$  and shear modulus ratio  $\mu_0$

4.2 유한체 접합 경계면균열의 수치해석

Fig. 5는 선형 ( $m=0$ ) 및 대칭입술형 커스프 경계면균열 ( $m=0.1$ )의 균열면 열경계조건이 단열 ( $\gamma=+1$ )이고  $\mu_0=1, \nu_0=1$ 인 경우 열응력세기계수의 변화를 유효 균열길이와 열팽창계수비의 변화에 대

과와 비교하고 있다. Table 4에서 보듯이 열응력 세기계수는 각 유효 균열길이에 대하여 오차 5% 이내의 안정된 결과를 주고 있다.

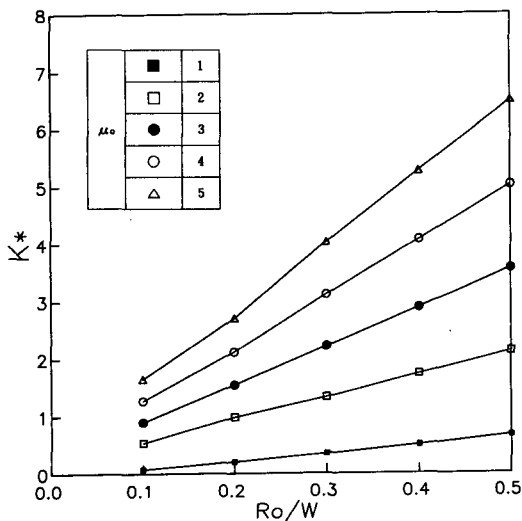
**Table 7** Thermal stress intensity factor for insulated symmetric lip cusp interface cracks( $\gamma = +1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and shear modulus ratio  $\mu_0$

$R_0/W$	$m$	$K^*$				
		$\mu_0$				
		1	2	3	4	5
0.1	0	0.859	1.160	1.294	1.343	1.402
	0.1	0.691	0.938	1.104	1.077	1.223
0.2	0	2.575	3.454	3.899	4.149	4.318
	0.1	2.084	2.809	3.280	3.419	3.670
0.3	0	4.633	6.234	7.080	7.598	7.936
	0.1	3.972	5.366	6.131	6.621	6.960
0.4	0	6.918	9.330	10.650	11.458	12.037
	0.1	5.883	7.967	9.023	9.919	10.262
0.5	0	9.348	12.620	14.473	15.553	16.453
	0.1	7.861	10.666	12.204	13.354	14.124

하여 보여주고 있으며, 그 수치값들은 Table 5와 같다. 열응력세기계수는 유효 균열길이에 대하여 2차함수적으로 증가하고 열팽창계수비에 대하여 비례하는 경향이 뚜렷이 나타나고 있는데, 이는 무한

체에 대한 이론식<sup>(15)</sup>에서 나타나는 경향과 일치하는 결과이다. 또한 열응력세기계수는 형상계수의 증가에 따라 조금씩 감소하는 경향을 보이는데, 이는 균질재료에 대한 Lee등<sup>(18)</sup>의 연구와 일치하는 결과이다.

Fig. 6에서는 대칭입술형 커스프균열( $m=0.1$ )의 균열면이 일정한 온도로 유지되고( $\gamma=-1$ )  $\mu_0=1$ ,



**Fig. 8** Variation of thermal stress intensity factor for symmetric lip cusp interface cracks( $m=0.1$  and  $\gamma=-1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and shear modulus ratio  $\mu_0$

**Table 8** Thermal stress intensity factor for symmetric lip cusp interface cracks( $m=0.1$  and  $\gamma=-1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and shear modulus ratio  $\mu_0$

$R_0/W$	$K^*$				
	$\mu_0$				
	1	2	3	4	5
0.1	0.076	0.544	0.904	1.271	1.647
0.2	0.210	0.986	1.545	2.123	2.712
0.3	0.354	1.329	2.216	3.119	4.034
0.4	0.504	1.726	2.889	4.072	5.266
0.5	0.658	2.119	3.561	5.023	6.494



$\nu_0=1$ 인 경우에 유효균열길이와 열팽창계수비에 따른 열응력세기계수의 변화를 보여주고 있으며, 그 수치값들은 Table 6과 같다. 열응력세기계수는 유효 균열길이에 대하여 2차함수적으로 증가하며 열 팽창계수비에 비례하고 있으나,  $\gamma=+1$ 인 경우보다는 상대적으로 작은 값을 가진다.

Fig. 7은 균열면의 열경계조건이 단열( $\gamma=+1$ )이고  $\alpha_0=1, \nu_0=1$ 인 경우에 Griffith 균열( $m=0$ )과 대칭입술형 커스프균열( $m=0.1$ )의 열응력세기계수를 유효 균열길이와 전단계수비의 변화에 대하여 나타낸 것이며, 그 수치값들은 Table 7과 같다. 열응력세기계수는 유효 균열길이에 대하여 2차함수적으로 증가하고 있으며, 형상계수의 증가에 따라 조금씩 작은 값을 갖는 것을 알 수 있다. 한편  $\gamma=+1$ 인 경우 유효 균열길이와 형상계수에 대한 열응력세기계수의 분포는 열팽창계수비 변화에 대한 Fig. 6과 유사하나, 열응력세기계수의 크기는 Fig. 6의 경우보다 작은 값을 주고 있다.

Fig. 8과 Table 8에서는 균열면이 일정한 온도로 유지되고( $\gamma=-1$ )  $\alpha_0=1, \nu_0=1$ 인 경우에 대칭입술형 커스프균열( $m=0.1$ )의 열응력세기계수를 유효 균열길이와 전단계수비의 변화에 따라 보여주고 있다. 이 경우 역시 열응력세기계수는  $\gamma=+1$ 인 경

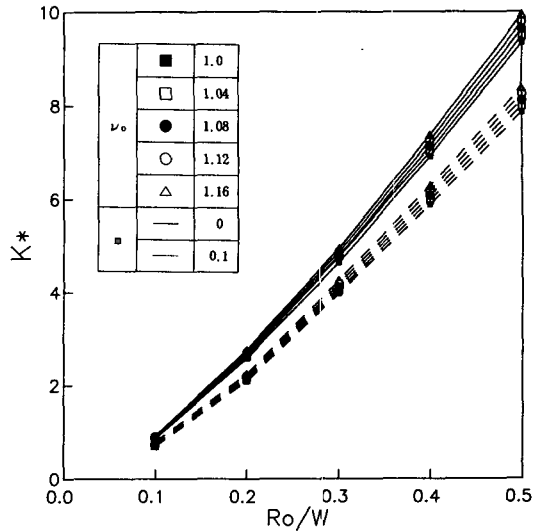


Fig. 9 Variation of thermal stress intensity factor for insulated symmetric lip cusp interface cracks( $\gamma=+1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and the ratio of Poisson's ratio  $\nu_0$

우보다 작은값을 나타내고 있다.

Fig. 9는 균열면의 열경계조건이 단열( $\gamma=+1$ )이고  $\alpha_0=1, \nu_0=1$ 인 경우에 Griffith 균열( $m=0$ )과

Table 9 Thermal stress intensity factor for insulated symmetric lip cusp interface cracks( $\gamma=+1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and the ratio of Poisson's ratio  $\nu_0$

$R_0/W$	$m$	$K^*$				
		$\nu_0$				
		1.0	1.04	1.08	1.12	1.16
0.1	0	0.859	0.864	0.882	0.898	0.915
	0.1	0.691	0.703	0.717	0.732	0.748
0.2	0	2.575	2.617	2.660	2.706	2.754
	0.1	2.084	2.120	2.158	2.198	2.240
0.3	0	4.633	4.706	4.782	4.862	4.944
	0.1	3.972	4.037	4.160	4.177	4.253
0.4	0	6.918	7.024	7.135	7.249	7.368
	0.1	5.883	5.978	6.076	6.178	6.285
0.5	0	9.348	9.488	9.634	9.784	9.940
	0.1	7.861	7.986	8.115	8.249	8.388

대칭입술형 커스프균열( $m=0.1$ )의 열응력세기계수를 유효 균열길이와 푸아송비  $\nu_0$ 의 변화에 대하여 나타낸 것이며, 그 수치값들은 Table 9와 같다. 열응력세기계수는 유효 균열길이에 대하여 2차함수적으로 증가하고 있으며, 형상계수의 증가에 따라 조금씩 작은 값을 갖는다.

Fig. 10과 Table 10에서는 균열면이 일정한 온도

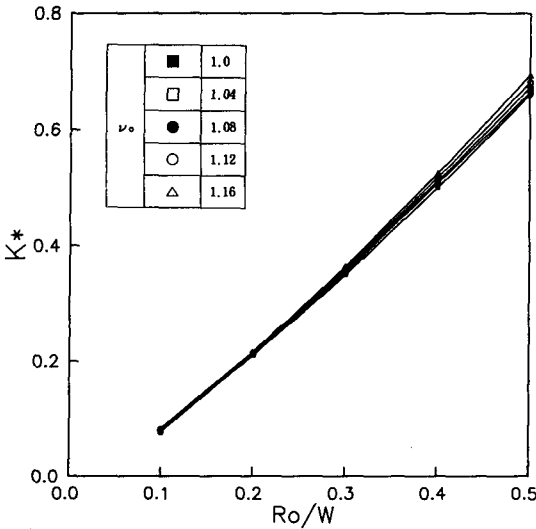


Fig. 10 Variation of thermal stress intensity factor for symmetric lip cusp interface cracks( $m=0.1$  and  $\gamma=-1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and the ratio of Poisson's ratio  $\nu_0$

Table 10 Thermal stress intensity factor for symmetric lip cusp interface cracks( $m=0.1$  and  $\gamma=-1$ ) in a finite bimaterial body with respect to effective crack length  $R_0/W$  and the ratio of Poisson's ratio  $\nu_0$

$R_0/W$	$K^*$				
	$\nu_0$				
	1.0	1.04	1.08	1.12	1.16
0.1	0.076	0.077	0.904	1.271	1.647
0.2	0.210	0.986	1.545	2.123	2.712
0.3	0.354	1.329	2.216	3.119	4.034
0.4	0.504	1.726	2.889	4.072	5.266
0.5	0.658	2.119	3.561	5.023	6.494

로 유지되고( $\gamma=-1$ )  $\alpha_0=1, \mu_0=1$ 인 경우에 대칭 입술형 커스프균열( $m=0.1$ )의 열응력세기계수를 유효 균열길이와 푸아송비  $\nu_0$ 의 변화에 따라 보여 주고 있다. 이 경우 역시 열응력세기계수는  $\gamma=+1$ 인 경우보다 작은값을 나타내고 있다.

### 5. 결론

정상상태 수직 균열 열유동을 받는 접합재료의 경계면에 단열 및 일정온도로 유지되는 선형 경계면균열과 대칭입술형 커스프 경계면균열이 존재할 때, 경계요소법을 적용하여 열응력세기계수를 구한 연구에서 다음의 결과를 얻었다.

(1) 수치해석을 위하여 접합재료 및 균질재료 모두에 적용될 수 있는 열응력세기계수와 균열선단 요소 절점의 변위사이의 관계식을 유도하였다.

(2) 무한체모델의 선형 경계면균열에 대한 열응력세기계수값은 열팽창계수비와 전단계수비 및 푸아송비의 변화에 대하여 기존의 이론해와 5% 오차범위 내에서 일치하였다. 한편 유한체 균질재료 내에 존재하는 대칭입술형 커스프균열에 대한 열응력세기계수도 기존해와 비교하여 오차범위 5% 내에서 일치하였다.

(3) 유한체모델의 접합 경계면균열에 대한 열응력세기계수는 유효균열길이에 대하여 2차함수적으로 증가하며, 형상계수가 커지면 열응력세기계수는 감소하는 경향을 보인다. 한편 균열면 열경계 조건의 변화는 열응력세기계수의 크기에 큰 영향을 준다.

### 참고문헌

- (1) Williams, M.L., 1959, "The Stress around a Fault or Crack in Dissimilar Media," Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 49, pp. 199~204.
- (2) Erdogan, F., 1963, "Stress Distribution in a Nonhomogeneous Elastic Plane with Cracks," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 30, pp. 232~236.
- (3) England, A.H., 1965, "A Crack between Dissimilar Media," Trans. ASME, J. Appl. Mech., Vol. 32, pp. 400~402.
- (4) Rice, J.R. and Sih, G.C., 1965, "A Crack

- between Dissimilar Media," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 32, pp. 418~423.
- (5) Muskhelishvili, N.I., 1963, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff Int. Publishing Company, Leyden.
- (6) Comninou, M., 1977, "The Interface Crack," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 631~636.
- (7) Comninou, M., 1978, "The Interface Crack in a Shear Field," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 45, pp. 287~290.
- (8) Comninou, M. and Schmueser, D., 1979, "The Interface Crack in a Combined Tension-Compression and Shear Field," *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, Vol. 46, pp. 345~348.
- (9) Lee, K.Y. and Choi, H.J., 1988, "Boundary Element Analysis of Stress Intensity Factors for Bimaterial Interface Cracks," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 29, No. 4, pp. 461~472.
- (10) Brown, E.J. and Erdogan, F., 1968, "Thermal Stress in Bonded Materials Containing Cuts on the Interface," *Int.J.Eng.Sci.*, Vol.6, pp. 87~98.
- (11) Bregman, A.M. and Kassir, M.K., 1975, "Thermal Fracture of Bonded Dissimilar Media Containing a Penny Shaped Crack," *Int. J. Fract.*, Vol. 10, pp. 87~98.
- (12) Takakuda, K., 1984, "Steady State Thermal Stresses in a Bonded Dissimilar Medium with an External Crack on the Interface," *Bulletin of JSME*, Vol. 27, No. 234, pp. 2643~2650.
- (13) Sumi, N. and Ueda, S., 1989, "Thermal Stress in Bonded Dissimilar Finite Materials with External Interface Cracks," *Trans. JSME, Sec. A*, Vol. 55, No. 519, pp. 2325~2329.
- (14) Sumi, N., 1986, "Thermal Stress in Bonded Dissimilar Finite Materials with Interface Cracks," *Trans. JSME, Sec.A*, Vol.52, No.473, pp. 13~18.
- (15) Lee, K.Y. and Shul, C.W., 1991, "Determination of Thermal Stress Intensity Factors for the Interface Crack under Vertical Uniform Heat Flow," *Eng.Fract.Mech.*, Vol. 40, No. 6, pp. 1067~1074.
- (16) Tanaka, M., Togoh, H. and Kikuta, M., 1984, "Boundary Element Method Applied to 2-D Thermoelastic Problems in Steady-State and Non-Steady States," *Eng. Analysis*, Vol. 1, No. 1, pp. 13~19.
- (17) Sládek, V. and Sládek, J., 1987, "Computation of the Stress Intensity Factor in 2-D Stationary Thermoelasticity Using The BEM," *ACTA TECHNICA CSAV*, No. 2, pp. 217~229.
- (18) Lee, K.Y. and Cho, Y.H., 1990, "Boundary Element Analysis of Thermal Stress Intensity Factors for Cusp Cracks," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 37, No. 4, pp. 787~798.
- (19) Lee, K.Y. and Hong, J.K., "Boundary Element Analysis of Thermal Stress Intensity Factors for Cusp Cracks in Transient State," *Eng. Fract. Mech.*, in press.
- (20) Chen, Y.Z., 1984, "Elastic Analysis of an Infinite Plate Containing Hole with Cusps and Applied by Concentrated Forces," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 20, No. 4, pp. 573~582.
- (21) Wu, C.H., 1982, "The Contact of a Cuspidal Crack," *J. Appl. Mech.*, Vol. 49, pp. 525~530.
- (22) Lee, K.Y. and Choi, H.S., 1988, "Determination of Thermal Stress Intensity Factor for Traction Free Cusp Cracks under Uniform Heat Flow," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 31, No. 4, pp. 661~672.
- (23) Lee, K.Y. and Choi, H.S., 1989, "Determination of Thermal Stress Intensity Factors for Rigid Cusp Cracks under Uniform Heat Flow," *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 32, No. 2, pp. 183~193.
- (24) Brebbia, C.A., 1980, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London.
- (25) Davis, P.J. and Rabinowitz, P., 1967, *Numerical Integration*, Blaisdell Publishers Company, Waltham.