

〈論 文〉

최대 열적 좌굴하중을 갖는 두꺼운 복합재료 적층판의 설계

이영신* · 이열화** · 양명석** · 박복선**

(1993년 2월 12일 접수)

Design of Thick Laminated Composite Plates for Maximum Thermal Buckling Load

Young-Shin Lee, Yeol-Wha Lee, Myung-Seog Yang and Bock-Sun Park

Key Words : Optimal Design(최적설계), Thermal Buckling(열적좌굴), Thick Laminated Plate(두꺼운 적층판), Anti-symmetric Laminates(역대칭 적층판), Symmetric Laminates(대칭 적층판), Shear Deformation Theory(전단 변형이론), Finite Element Method(유한요소법), Thickness Coefficient(두께 계수)

Abstract

In this paper, the design of thick laminated composite plate subjected to thermal buckling load under uniform temperature distribution is presented. In the design procedures of composite laminated plates for maximum thermal buckling load, the finite element method based on shear deformed theory is used for the analysis of laminated plates. One-dimensional search method is used to find optimal fiber orientation and, in the next step, optimal thickness is investigated. Design variables such as fiber orientation and ply thicknesses coefficient of plates are adopted. The optimal design for the symmetric or antisymmetric laminated plates consisted of 4 layers with maximum thermal buckling load is performed.

기호설명		
A	: 적층판의 면적 ($A = a \times b$)	N_i : 보간함수
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	: 적층판의 강성행렬	N_n : 요소의 절점수
E_1, E_2	: 재료의 주축방향의 탄성계수	N_x, N_y, N_{xy} : 판의 합응력
$\{F_t\}$: 절점의 외력벡터	Q_{ij} : 재료강성행렬
k_c	: 전단보정계수 ($=5/6$)	\bar{Q}_{ij} : 판의 좌표로 변환된 강성행렬
$[K_c], [\bar{K}_c]$: 판의 형상행렬	Q_x, Q_y : 합 전단력
$[K_s], [\bar{K}_s]$: 판의 강성행렬	t, t_k : 판의 두께와 k 번째 층의 두께
m	: 판의 요소수	T_{cr} : 임계 좌굴온도 ($T_{cr} = \lambda \times \Delta T$)
M_x, M_y, M_{xy}	: 판의 합모멘트	ΔT : 판의 온도와 기준온도의 차이 ($\Delta T = T_a - T_o$)
n	: 판의 적층수	$[T]$: 변환행렬
		u, v, w : 판의 x, y, z 방향 변위
		u_o, v_o, w_o : 판의 중립면에서의 변위

*정희원, 충남대학교 기계설계공학과

**정희원, 충남대학교 대학원

$\{q_j\}$: 절점변위 벡터
U_s, U_p	: 판의 변형에너지와 위치에너지
z_k	: 판의 중립면에서 k 번째 층까지의 거리
a_1, a_2	: 재료방향의 열팽창계수
ε, γ	: 변형률 성분
η	: 두께 계수
λ	: 열하중계수 ($\lambda_i = T_{cr}/\Delta T$)
σ, τ	: 응력성분
ν	: 푸아송의 비
ψ_x, ψ_y	: xz, yz 평면에서의 기울기

1. 서 론

복합재료는 그 무게에 비하여 강도(strength) 및 강성(stiffness)이 높고, 섬유의 비중이 낮으며, 마름질(tailoring)이 가능하여 유지비가 적게 들기 때문에, 실제 응용분야에서 섬유강화 재료의 사용이 증가되고, 중량감소가 중요한 설계목표가 되고 있는 구조물 응용에서 매우 중요한 분야이다. 특히, 항공우주 분야 또는 원자로에 응용되는 구조물에서 표면온도의 급격한 상승으로 생기는 구조안정성 문제에 관한 설계는 매우 중요하다. 특히 박판으로 외벽이 구성된 구조물에서 더욱 중요하여 최근에 외국에서 이분야에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으나, 국내의 연구는 부진한 편이다.

동방성 평판에 대한 열적좌굴에 대한 연구는 1960년 Boley와 Weiner⁽¹⁾에 의하여 단순지지된 동방성 평판에 대한 이론적인 임계좌굴온도를 구하였으며, 1982년에 Chen⁽²⁾ 등은 초기응력이 있는 두꺼운 동방성 평판에 대한 열적좌굴을 해석하였다. 1974년에 Prabhu와 Durvasula⁽³⁾는 단순지지된 역대칭 사각판과 원판에 대한 열적좌굴 해석을 하였다. Tauchert와 Haung^(4,5)은 1986년에 Kirchhoff 이론에 의한 단순지지 역대칭 Angle-ply 적층박판을 해석하였고, 1987년에 Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 단순지지 대칭 Angle-ply 적층박판을 해석하였으며, 또한 Tauchert⁽⁶⁾는 Reissner-Mindlin 이론을 도입하여 두꺼운 역대칭 Angle-ply 적층판을 해석하였고 Powell's Method을 이용하여 좌굴온도가 최대가 되는 최적의 적층각도를 구하였다. 1991년에는 Chen⁽⁷⁾ 등은 불균일 온도분포를 받는 두꺼운 적층판에 대하여 Mindlin 판이론과 유한요소법을

이용하여 단순지지, 완전고정 등의 조건에서 열적좌굴을 해석하였다. 또한 1991년에 Chen과 Leu⁽⁸⁾은 균일분포 온도를 받는 역대칭 Angle-ply 적층판에 대하여 전단변형이론과 고차변위이론으로 열적좌굴을 해석하였으며 같은 시기에 Chen⁽⁹⁾은 유한요소법으로 완전고정된 역대칭 Angle-ply 적층판에 대하여 해석을 하였다.

열적좌굴에 대한 국내의 연구로는 1990년에 이종석⁽¹⁰⁾은 혼합 유한요소법을 이용하여 적층판을 해석하였다. 한편 1993년에 이영신⁽¹¹⁾은 Rayleigh-Ritz법으로 혼합적층 복합재료판에 대한 해석을 수행하였다. 한편 1990년에 Adali와 Duffy⁽¹²⁾는 Graphite/Epoxy, Boron/Epoxy 및 Glass/Epoxy로 구성된 혼합적층판에 대한 매개변수(혼합비/두께비), η 를 도입하여 동일무게조건에서 임계좌굴온도를 최대로하는 적층각도 및 적층두께의 설계를 하였다.

본 연구에서는 전단변형이론에 근거한 유한요소법⁽¹³⁾을 이용하여 균일온도 분포를 받는 두꺼운 역대칭 Angle-ply 적층판 뿐만 아니라, 대칭 Angle-ply 적층판에 대한 열적좌굴을 고려한 최적설계를 수행하였다. 열적좌굴에 대한 해석은 등방성재료에 대하여 Boley⁽¹⁾의 해와 비교하였고, 대칭 Angle-ply 적층판⁽⁵⁾ 및 역대칭 Angle-ply 적층판⁽⁶⁾에 대해서도 참고문헌들과 비교하였다. 이를 해석결과를 근거로 하여 적층각도 및 적층 두께계수를 설계변수로 하여 복합재료 적층판에 대한 설계를 수행하였다. 설계의 목표는 동일한 중량을 갖는 적층판에 대하여 열적좌굴하중이 최대가 되는 적층각도 및 적층 두께계수를 찾는 것이다. 4층으로 구성된 복합재료 적층판이 설계에 이용되고, 경계조건은 단순지지 적층판에 대하여 수행되었다. 설계방법은 1차원 탐색법(line search)을 이용하여 먼저 열적좌굴온도가 최대가 되는 최적적층각도를 구하고, 적층두께계수를 도입하여 최적적층 두께를 찾는 2차원 문제를 1차원 문제로 구성하여 적층 두께계수를 찾은 후, 다시 적층두께를 구하는 다단계최적화 기법을 적용하였다.

2. 적층판의 열적좌굴해석

2.1 기본 이론

본 논문에서 연구대상으로 선정한 적층복합재료판의 기하학적 형상은 Fig. 1에 보인 바와 같고,

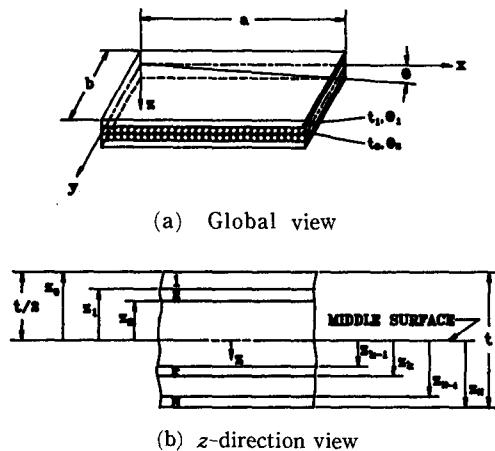


Fig. 1 Geometry and coordinate system of a plate and its section of a laminate

적층판에 대하여 전단변형 이론과 회전 관성효과를 고려하기 위한 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= u_o(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v &= v_o(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w &= w_o(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u, v, w 는 각각 x, y, z 축방향 변위이며, u_o, v_o, w_o 는 중립면의 x, y, z 방향 변위이고, ψ_x, ψ_y 는 굽힘 만에 의해 발생되는 xz, yz 평면의 회전 각이다. 이 때 변형률과 변위의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_o}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \epsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + z \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right], \\ \gamma_{xz} &= \psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

또한, k 번쩨 복합재료층의 섬유주축에서의 응력변형률 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{22} & Q_{23} & \text{Symm.} \\ Q_{33} & Q_{44} & Q_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \alpha_{11}\Delta T \\ \epsilon_2 - \alpha_{22}\Delta T \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}_k, \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} (Q_{11})_k &= \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ (Q_{12})_k &= \left[\frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ k &= \left[\frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ (Q_{22})_k &= \left[\frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ (Q_{33})_k &= (G_{12})_k, \\ (Q_{44})_k &= (G_{13})_k, \\ (Q_{55})_k &= (G_{23})_k. \end{aligned} \quad (4)$$

섬유 방향이 x 축에 대하여 θ (Fig. 1 참고) 만큼 기울었을 때 적층판 좌표계에 대한 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & \text{Symm.} \\ \bar{Q}_{33} & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \epsilon_x - \alpha_x\Delta T \\ \epsilon_y - \alpha_y\Delta T \\ \gamma_{xy} - 2\alpha_x\Delta T \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_k, \quad (5)$$

여기서

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]^{-T}, \quad (6)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & -2CS & 0 & 0 \\ -CS & CS & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$(C = \cos\theta, S = \sin\theta)$

또, Fig. 2에서 보인것과 같은 적층판에 대하여 단위 길이당 합응력과 합모멘트는 다음과 같이 나타낸다.

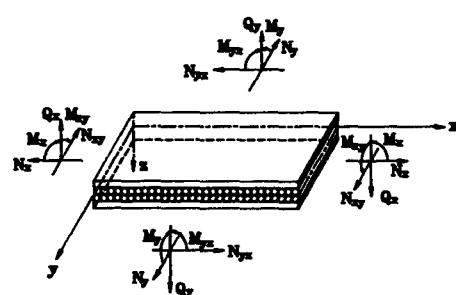


Fig. 2 Forces and moments on a laminated plate

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^T, \sigma_y^T, \tau_{xy}^T) z dz. \end{aligned} \quad (8)$$

따라서, 식(8)에 식(2)과 식(5)를 대입하면 합응력과 합모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ & & A_{33} & 0 & 0 & B_{13} & B_{23} & B_{33} \\ & & & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ & & & & & D_{22} & D_{23} & \\ & & & & & & & D_{33} \end{Bmatrix} \text{Symm.}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial w_o}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ 0 \\ 0 \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix}. \quad (9)$$

식(9)에서

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (i, j=1, 2, 3), \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k z_k t_k \quad (i, j=1, 2, 3), \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 t_k + \frac{t_k^3}{12}) \\ &\quad (i, j=1, 2, 3), \\ A_{ij} &= k_c \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (i, j=4, 5). \end{aligned} \quad (10)$$

이고, k_c 는 전단보정계수(shear correction coefficient)로 5/6를 취하였으며, 열에 의한 합응력과 합모멘트는 다음과 같다.

$$(N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T) = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^T, \sigma_y^T, \tau_{xy}^T) dz$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij})_k (\alpha_x, \alpha_y, \\ &\quad 2\alpha_{xy})_k \Delta T dz \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (M_x^T, M_y^T, M_{xy}^T) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^T, \sigma_y^T, \tau_{xy}^T) z dz \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij})_k (\alpha_x, \alpha_y, \\ &\quad 2\alpha_{xy})_k \Delta T z dz \end{aligned} \quad (12)$$

온도분포가 균일할 경우 판전체에는 열응력만 발생하고 초기응력에 의한 변위는 발생하지 않는다.⁽¹⁾ 그러므로 초기응력이 없는 균일분포 온도를 받는 판에 대하여 식(9)의 합응력과 합모멘트는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} N_x &= -N_x^T, N_y = -N_y^T, N_{xy} = -N_{xy}^T, \\ M_x &= -M_x^T, M_y = -M_y^T, M_{xy} = -M_{xy}^T, \\ Q_x &= Q_y = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 유한요소 해석모델

유한요소해석을 위한 판요소로 Reddy⁽¹³⁾가 제안한 벌칙 함수를 적용한 판의 굽힘 요소를 사용하였으며, Fig. 3에서와 같이 $u_o, v_o, w_o, \psi_x, \psi_y$ 를 갖는 5-자유도 문제를 수식화 하였고, 변위장 보간함수(interpolation function)는 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} u_o^e &= \sum_{i=1}^{Nn} u_i^e N_i^e, \\ v_o^e &= \sum_{i=1}^{Nn} v_i^e N_i^e, \\ w_o^e &= \sum_{i=1}^{Nn} w_i^e N_i^e, \\ \psi_x^e &= \sum_{i=1}^{Nn} \psi_{xi}^e N_i^e, \\ \psi_y^e &= \sum_{i=1}^{Nn} \psi_{yi}^e N_i^e. \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, N_i^e 는 보간함수를 나타내고, N_n 은 요소의 절점수이다.

유한요소해석법의 적용을 위하여 판의 총 위치에

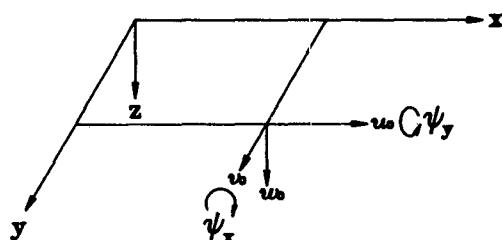


Fig. 3 Definition of coordinates, displacements and rotations of a plate

너지(total potential energy)를 표시하면 다음과 같다.

$$\pi = U_s + U_p, \quad (15)$$

여기서, U_s 는 변형률 에너지, U_p 는 외력에 의한 위치에너지로서 응력, 변형률로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U_s &= \frac{1}{2} \int_A (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} \\ &\quad + Q_x \gamma_{xz} + Q_y \gamma_{yz}) dx dy \\ &= \sum_{e=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \{q^e\}^T [k_s^e] \{q^e\} \right. \\ &\quad \left. - \{q^e\}^T [F_t^e] \right\} = \frac{1}{2} \{q\}^T [K_s] \{q\} \\ &\quad - \{q\}^T [F_t], \quad (16) \\ U_p &= \frac{1}{2} \int_A \left(N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K_c^e] \{q^e\} \\ &= \frac{1}{2} \{q\}^T [K_c] \{q\}, \quad (17) \end{aligned}$$

여기서 $[K_s^e]$ 는 요소강성행렬이고, $[K_c^e]$ 는 요소형상 행렬이며, $[F_t^e]$ 는 요소열하중 벡터이다.

또한 초기좌굴의 변위장에 대하여 판의 변형에너지, 식(16)를 최소화 하면 다음의 식을 얻는다.

$$[K_s] \{q\} = [F_t]. \quad (18)$$

중립 평형조건에 부합하는 임계좌굴상태에 대하여 판 전체 위치에너지의 2차변분(second variation)을 0이 되게 하면 다음의 고유치 문제를 얻는다.

$$[K_s] \{q\} + \lambda [K_c] \{q\} = [0], \quad (19)$$

윗식의 변위벡터, $\{q\} = \{u_o, v_o, w_o, \psi_x, \psi_y\}$ 를 $\{\bar{q}\} = \{w_o : u_o, v_o, \psi_x, \psi_y\}$ 로 구성되는 방정식으로 분리하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} K_{s1} & K_{s2} \\ K_{s3} & K_{s4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_o \\ u_o \\ v_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \bar{K}_c & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_o \\ u_o \\ v_o \\ \psi_x \\ \psi_y \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (20)$$

이고, 그러면 특성방정식은 최종적으로 다음과 같은 더욱 간단한 식으로 표현된다.

$$[\bar{K}_s] \{w_o\} + \lambda [\bar{K}_c] \{w_o\} = \{0\} \quad (21)$$

여기서, $[\bar{K}_s] = [K_{s1}] - [K_{s2}] [K_{s4}]^{-1} [K_{s3}]$ 이고⁽¹⁴⁾, λ 는 고유치로서 초기응력이 없이 균일분포 열하중을 받는 경우에는 열하중 계수이며, 기준온도와 초기온도의 차이에 가장작은 λ 를 곱하면 임계좌굴온도, T_{cr} 이 된다.

3. 최적 설계

3.1 열적좌굴해석 결과비교

본 연구에서 수치해석에 사용된 경계조건은 $x=0$, a 일때 $u_o = w_o = \psi_y = 0$ 이고, $y=0$, b 일때 $v_o = w_o = \psi_x = 0$ 인 단순지지 경계조건이고, 고려된 적층판의 재료물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_1/E_o &= 181, \quad E_2/E_o = 10.3, \quad G_{12}/E_o = 0.717, \\ G_{13}/E_o &= 0.598, \quad G_{23}/E_o = 0.239, \\ \nu &= 0.28, \quad \alpha_1/\alpha_o = 0.2, \quad \alpha_2/\alpha_o = 22.5, \\ E_o &= 1.0 \text{ Gpa}, \quad \alpha_o = 1.0 (\mu\text{m}/\text{m})/\text{°K} \end{aligned} \quad (22)$$

본 연구에서 사용한 유한요소법의 확인을 위하여 기존 연구결과와 비교검토를 하였는데 먼저 등방성 재료에 대하여 단순지지 경계조건의 경우 참고문헌(1)의 염밀해는 다음과 같다.

Table 1 Comparison between the FEM solution and the results of Ref[1] for isotropic plates

Nondimensional critical buckling temperature, for a simply supported aluminum plates
 $E10 \times 10^6 \text{ psi}$, $a/t = 100$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 1.0 \times 10^{-6} \text{ in/in/}^\circ\text{K}$

a/b	Ref[1]	Present	
		9-nodes (2x2 elements)	9-nodes (3x3 elements)
0.25	0.672	0.682	0.674
0.5	0.791	0.801	0.793
1.0	1.265	1.281	1.268
1.5	2.056	2.081	2.060
2.0	3.163	3.201	3.168
2.5	4.587	4.641	4.591
3.0	6.327	6.398	6.327

$$N_{cr}^T = (1-\nu) \left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} \right\} \frac{\pi^2 D}{a^2},$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu)}, \quad (23)$$

여기서 임계좌굴응력, N_{cr}^T 은 무차원 임계좌굴온도 $\{=a T_{cr} (a^2/t^2)\}$ 로 변환을 하여 계산한 결과이며, Table 1에서 본 연구의 유한요소 해석결과는 대체로 Boley의 연구결과⁽¹⁾와 잘 일치하는데, 2×2 요소의 해석결과 보다 3×3 요소의 해석결과가 더욱 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이는 3×3 요소의 경우가 판모서리의 영향을 적게 받기 때문이다. 또한 Table 2는 역대칭 적층판에 대한 열적좌굴 해석결과를 기준의 연구결과와 비교 검토한 것인데 3×3 요소의 경우에 참고문헌(11)의 결과와

잘 일치하고 있다. Table 2에서 참고문헌(6)의 *는 참고문헌에서 제시된 수식으로 계산한 값이며, **는 제시된 그림을 읽은 값이다. 이 경우 적층판은 $(\theta_1 - \theta_2 / \theta_1 - \theta_3 \dots)$ 으로 구성되는 역대칭 판으로 각층의 두께는 서로 같게 하였고, 해석은 9개의 절점을 가진 요소를 사용하여 4개의 요소(2×2)의 경우와 9개의 요소(3×3)의 경우에 대하여 수행하였으며, 3×3 가우스(Gauss) 적분법을 사용하였다.

Table 3에서는 대칭적층판의 해석결과와 기존의 연구결과와의 비교를 제시하고 있으며 이 경우 역대칭 판과 같은 조건을 사용하였고, 적층방법은 $(\theta_1 - \theta_2 \dots)_s$ 으로 하였는데, 이 경우의 결과는 서로 약간의 차이를 보이고 있다. 즉 3×3 요소의 유

Table 2 Comparison between the FEM solution and results of Ref[6] and Ref[7] for antisymmetric angle-ply laminated plates

Nondimensional critical buckling temperature $\{=a_0 T_{cr} \times 10^3\}$ for a simply supported laminated plates ($a/b=1$)

Ply No	Ply-angle	Ref[6]	References		Present	
			*	**	Ref[7]	9-nodes (2×2)
2	(45° / -45°)	1.055	0.992	-	1.021	1.012
4	(45° / -45°) ₂	2.228	2.032	2.038	2.053	2.037
8	(45° / -45°) ₄	2.522	2.275	2.278	2.296	2.278

Note * Based on classical thin plate theory

** Based on Reissner-Mindlin plate theory

*** FEM solutions

Table 3 Comparison between the FEM solution and results of Ref[5] for symmetric angle-ply laminated plates

Nondimensional critical buckling temperature $\{=a_0 T_{cr} \times 10^3\}$ for a simply supported laminated plates ($a/b=1$)

Ply angle	Ply-No.	References		Present	
		Ref[5]*	Ref[11]*	9-nodes (2×2)	9-nodes (3×3)
11.25°	1	1.038	1.033	1.090	0.993
	3	1.130	-	1.125	1.039
	5	1.236	1.236	1.199	1.136
45°	1	1.097	-	1.252	1.077
	3	1.666	-	1.557	1.445

Note * Based on classical theory

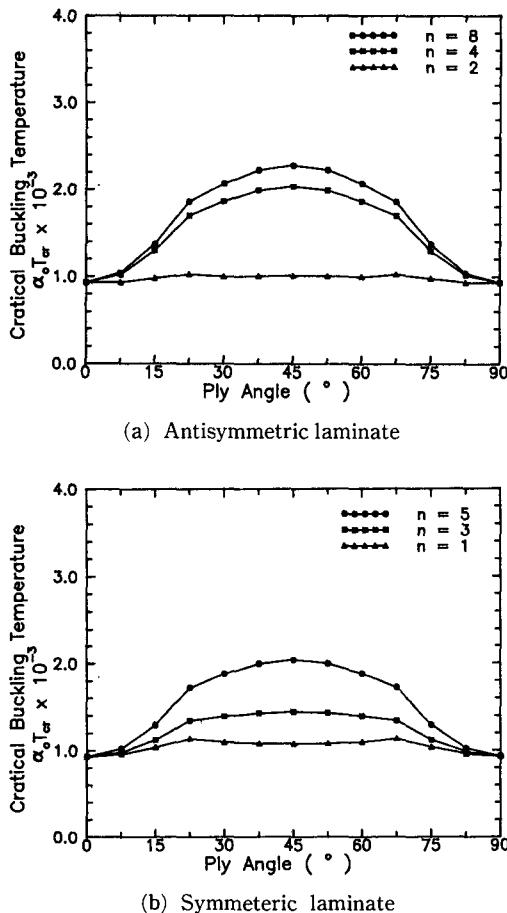


Fig. 4 Effect of ply-angle on the critical buckling temperature of laminates($a/b=1$, $a/t=20$)

한요소해석 결과가 참고문헌의 결과보다 작은 값을 보인다. 이 차이는 전단변형 효과에 의한 것으로 보이며 $a/t \leq 20$ 인 경우 적층판이 더욱 두꺼워지므로 더욱 중대한 의미를 갖는다.

Fig. 4는 적층각도 변화에 따른 임계좌굴온도의 변화를 보이며, 역대칭 적층판의 경우 $n=1$ 인 경우를 제외하고 $n=4, 8$ 인 경우에 45° 에서 최대값을 보이고 있다. 대칭적층판의 경우에도 $n=1$ 인 경우를 제외하고 $n=3, 5$ 인 경우에 45° 에서 최대값을 보인다.

3.2 최적화 절차

본 연구에서 최설설계를 하고자하는 적층복합재료판의 기하학적 형상은 Fig. 1과 같고 설계 최적화의 목표는 초기응력이 없이 균일분포 열하중을

받는 역대칭 적층판 및 대칭적층판에 대하여 임계좌굴온도를 최대로 하는 최적의 적층두께 및 적층각도를 찾는 것이다. 즉 식(21)에서 λ 를 최대로 하는 문제가 된다.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} && F_o = \lambda(\theta_i, t_i) \\ & \text{Subject to} && -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \\ & && 0 \leq t_i \leq t_i^u \end{aligned} \quad (24)$$

여기서, F_o 는 목적함수이고, θ_i 는 i 번째 적층 각도이며, t_i 는 i 번째 적층두께이고 t_i^u 는 적층두께의 상한치이다. 여기서 t_i 의 초기치는 각 층의 두께를 동일하게하기 위하여 판두께를 적층수로 나눈값, $t_i = t/n$ 를 취하였다.

식(24)의 최대화 문제를 최소화 문제로 수정하는 것은 부호를 바꿈으로서 쉽게 다시 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \Phi_o = -\lambda(\theta_i, t_i) \\ & \text{Subject to} && -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \\ & && 0 \leq t_i \leq t_i^u \end{aligned} \quad (25)$$

식(25)의 최적화 문제를 적층각도만을 설계변수로 하는 최적화 문제로 구성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \Phi_o = -\lambda(\theta_i) \\ & \text{Subject to} && -90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ \end{aligned} \quad (26)$$

위 문제의 최적해는 최적의 적층 각도만을 찾는 경우로서 1차원 탐색법(line search)으로 쉽게 찾을 수 있으며, 여러 층으로 적층된 경우에도 단계별 최적화 기법으로 해를 구할 수 있다.

식(25)의 최적화 문제를 적층두께만을 설계변수로 하는 최적화 문제를 구성하기 위하여 적층 두께 계수를 도입하여 4층으로 적층된 대칭적층판의 두께를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{t}{2} &= t_1 + t_2 = \eta \frac{t}{2} + (1-\eta) \frac{t}{2} \\ t_3 &= t_2, \quad t_4 = t_1 \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 t 는 적층판의 두께이고 η 는 적층 두께계수를 나타낸다. 적층두께계수를 설계변수로 하는 최적화 문제는 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && \Phi_o = -\lambda(\eta) \\ & \text{Subject to} && 0 \leq \eta \leq 1 \end{aligned} \quad (28)$$

위식의 최적화 문제는 적층두께계수에 대한 1차원 문제로서 1차원 탐색법으로 쉽게 해를 구할 수 있다. 그러나 적층수가 많아지면 식(27)의 구성은 더 이상 유용하지 않게 된다.

여기서 선택된 1차원 탐색법은 황금 분할법(golden section method)으로서 매 설계 단계마다 설계변수에 대한 미분치를 구하지 않아도 최적점을 찾을 수 있는 장점이 있다.

3.3 설계결과 및 검토

(1) 역대칭 적층판의 설계 예

적층각도가 $[\theta, -\theta, \theta, -\theta]$ 로 변하는 역대칭 적층판에 대한 설계에서 적층각도의 설계변수는 항상 1차원이고, 4층으로 구성된 적층판의 경우에는 두께계수의 설계변수를 이용함으로써 2차원 문제를 1차원 문제로 변환할 수 있다. 앞서의 식(26)과 식(28)은 4층으로 구성된 역대칭 적층판의 최적설계에 이용된다. 먼저 임계좌굴온도를 최대로 하는 최적의 적층각도를 식(26)에서 구한 후에 그 결과를 이용하고, 다음 단계로서 식(28)을 이용하여 최적의 두께계수를 구하는 방법으로 최적화를 수행하였다. 계산된 결과는 Table 4에서 보이고 있다.

Table 4에서 첫번째 단계에서 찾은 최적의 적층각도는 44.9885° 로서 참고문헌(6)의 결과인 $[45^\circ / -45^\circ]_a$ 와 잘 일치하고 있다. 이러한 결과의 예측은 적층 각도에 따른 임계좌굴온도의 변화를 보여주는 Fig. 4의 (a)와 Fig. 5에서도 가능하다. Fig. 4에서는 역대칭 적층판의 경우 45° 에서 최대값을 보이고 있으며 Fig. 5에서도 같은 결과를 확인할

Table 4 Design results for anti-symmetric angle-ply laminated composite plates($a/b=1$, $a/t=20$, material of eqn(22))

Constraints	
angle	$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$
thickness coefficient	$0 \leq \eta \leq 1$
Convergence criteria,	$ \theta_{i+1} - \theta_i < 0.001$ $ \eta_{i+1} - \eta_i < 0.001$
1st step	
angle(θ°)	44.9885
$a_o T_{cr} \times 10^3$	2.0368
2nd step	
thickness coefficient	0.5934
$a_o T_{cr} \times 10^3$	2.0679
Final results	
$[\theta / -\theta]_a$	$[44.9885 / -44.9885]_a$
η^{opt}	0.5934

수 있다. Fig. 6은 역대칭 적층판의 적층각도에 대한 설계과정을 보이고 있으며 이들의 수렴상태를 보면 10번 정도의 반복계산에서 임계좌굴온도의 변화는 거의 없으며 적층각도도 45° 로 수렴하고 있음을 볼 수 있다. Fig. 5에서 최대 임계좌굴온도는 45° 와 -45° 에서 나타나고 있으나 Fig. 6에서의 결과가 45° 로된 것은 초기시작점을 어느쪽을 먼저 하느냐에 따라 변할 수 있으며, 여기서는 양의 값을 먼저 선정하였다.

적층두께계수를 설계변수로 하는 2번째 설계단계에서 설계결과는 두께계수가 0.5934로서, 이것의 의미는 $a=b=10\text{ cm}$, $t=0.5\text{ cm}$ 인 경우에 식(27)에 표현된 것과 같이 계산하여 첫번째 층의 두께가 0.1484 cm , 두번째 층의 두께가 0.1016 cm 인 것을

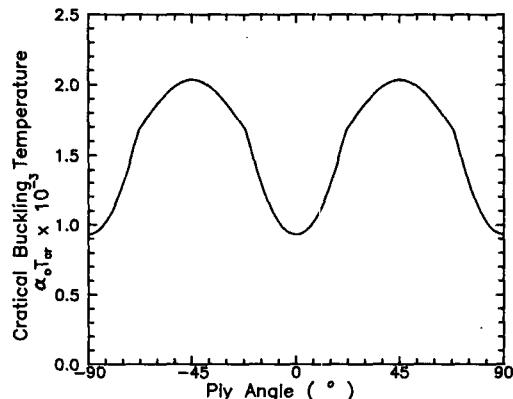


Fig. 5 Variation of the critical buckling temperature of antisymmetric laminate according to ply angle($a/b=1$, $a/t=20$)

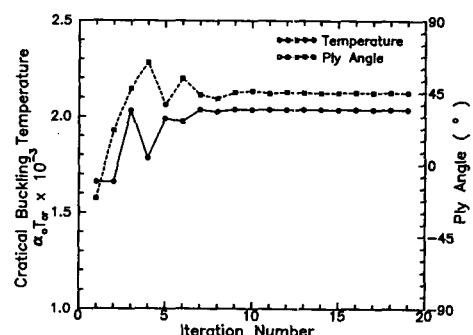


Fig. 6 Convergence test of the solution for antisymmetric laminate in unconstraint problem($a/b=1$, $a/t=20$)

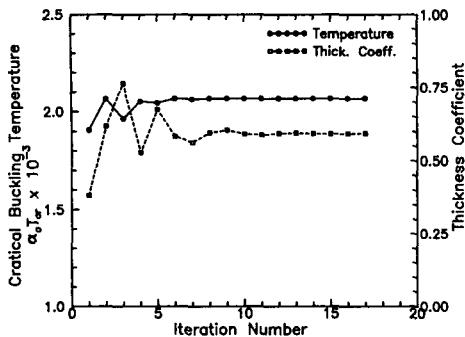


Fig. 7 Convergence test of the solution for antisymmetric laminate in unconstraint problem($a/b = 1$, $a/t = 20$)

뜻한다. Fig. 7은 반복계산회수에 따른 두께계수와 임계좌굴온도의 변화를 보이고 있으며 6번의 반복계산 후에는 임계좌굴온도의 변화는 거의 없으나 두께계수의 변화는 약간 지그제그로 변하면서 수렴하고 있다. 이는 앞서의 Fig. 6에서와 같이 설계변수의 작은 변화는 목적함수인 임계좌굴온도에 미치는 영향이 작음을 알 수 있고 필요에 따라 수렴조건의 완화가 요구된다.

(2) 대칭적층판의 설계 예

4층으로 적층된 대칭적층판에 대한 설계에서 적층각도의 설계변수는 항상 2차원이지만 다단계 설계기법으로 각각의 적층에 대한 해를 1차원 문제로 구할 수 있다. 적층두께를 구하는 문제는 역대칭 적층판의 경우와 같이 식(27)의 두께계수의 설계변수를 이용함으로써 쉽게 구할 수 있다. 앞서의 식(26)과 식(28)은 4층으로 구성된 대칭적층판의 최적설계에도 이용된다. 먼저 임계좌굴온도를 최대로 하는 최적의 적층각도를 식(26)에서 구하기 위하여 2번의 1차원 탐색이 필요하다. 첫번째 단계에서 두 번째 층은 임의의 값으로 하고 첫번째 층을 설계변수로하여 첫번째 층을 구한 후, 두번째 단계에서 앞서의 결과인 첫번째 층의 값을 고정하고 두번째 층을 설계변수로 하여 두번째 층을 구한다. 다음으로 적층두께를 구하는 단계로서 식(28)를 이용하여 최적의 두께계수를 구하는 방법으로 최적화를 수행하였다. 계산된 결과는 Table 5에서 보이고 있다.

Fig. 8은 두번째 층의 값을 -45° 로 고정하고 첫번째 층을 구하는 반복계산의 결과를 보이고 있으며 역대칭 적층판의 결과에서와 유사하게 8번의 반복계산후에는 임계좌굴온도의 변화는 거의 없으나

Table 5 Design results for symmetric angle-ply laminated composite plates($a/b = 1$, $a/t = 20$, material of eqn(22))

Constraints	
angle	$-90^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$
thickness coefficient	$0 \leq \eta \leq 1$
Convergence criteria,	$ \theta_{i+1} - \theta_i < 0.001$
	$ \eta_{i+1} - \eta_i < 0.001$
1st step	
level 1	
angle(θ_1)	45.0337
$\alpha_0 T_{cr} \times 10^3$	1.8609
level 2	
angle(θ_2)	-44.9883
$\alpha_0 T_{cr} \times 10^3$	1.8609
2nd step	
thickness coefficient	0.9088
$\alpha_0 T_{cr} \times 10^3$	1.9273
Final results	
$[\theta_1/\theta_2]_s$	[45.0337/-44.9883] _s
η^{opt}	0.9088

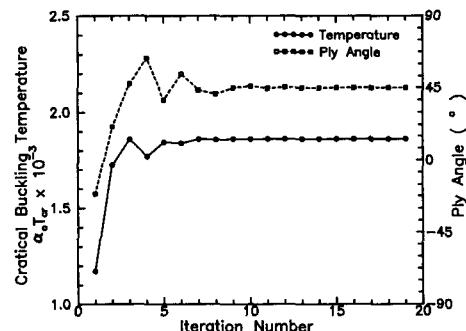


Fig. 8 Convergence test of the solution for antisymmetric laminate in unconstraint problem($a/b = 1$, $a/t = 20$, $\theta_2 = -45^\circ$)

적층각도는 약간 움직이고 있으며 Table 5의 level 1의 계산결과인 $\theta_1 = 45.0337^\circ$ 로 진행하고 있다. 이 결과의 이해는 Fig. 4의 (b)에서 적층각도가 45° 부근에서 임계좌굴온도는 완만하게 변하고 있으며 45° 부근에서 약간의 적층각도 변화는 임계좌굴온도의 변화에 미치는 영향이 적기 때문이다.

Fig. 9은 첫번째 층의 값을 앞서의 설계결과인

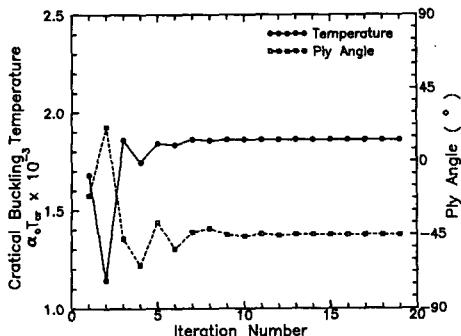


Fig. 9 Convergence test of the solution for antisymmetric laminate in unconstraint problem($a/b = 1$, $a/t=20$, $\theta_1=45.0337^\circ$)

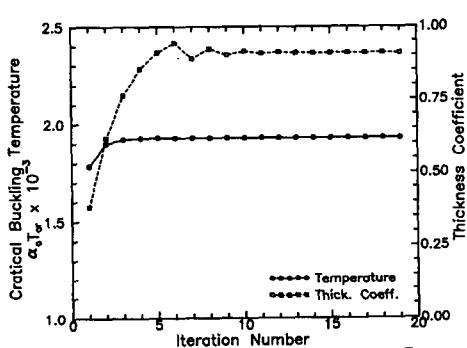


Fig. 10 Convergence test of the solution for antisymmetric laminate in unconstraint problem($a/b = 1$, $a/t=20$, $[45.0337^\circ/-44.9883^\circ]$)

45.0337° 로 고정하고 두 번째 층을 구하는 반복계산의 결과를 보이고 있으며 앞서의 계산결과와 유사하게 8번의 반복계산 후에는 임계좌굴온도의 변화는 거의 없고 적층각도는 약간 움직이고 있으며 Table 4의 level 2의 계산 결과인 $\theta_2=-44.9883^\circ$ 로 진행하고 있으며 -45° 로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

대칭적층판의 마지막 설계단계로서 적층각도를 $[45.0337^\circ/-44.9883^\circ]$ 로 고정하고 두께계수를 설계변수로 하는 설계에서의 설계결과는 $\eta=0.9088$ 를 얻었으며 반복계산 과정에서 두께계수의 변화와 임계좌굴온도의 변화는 Fig. 10에서 보이고 있다. 대칭적층판의 경우 두께계수의 민감도는 앞서의 결과들보다 더욱 작아 4번의 반복계산 후에는 목적함수인 임계좌굴온도의 변화는 거의 없음을 알 수 있다.

4. 결론

단순지지된 역대칭 적층판과 대칭적층판에 대한 최적설계 결과가 제시되었다. 설계변수로는 적층각도와 적층 두께계수가 사용되었고, 동일한 무게를 갖는 역대칭 적층판에서 유한요소법을 이용한 최적화 프로그램을 구성하여 최대 임계좌굴온도를 갖는 최적의 적층각도와 적층 두께계수를 구하였다. 적층 두께계수의 도입으로 2차원 문제를 1차원 문제로 변환하여 1차원 탐색법으로 문제를 해결할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Boley, B. A. and Weiner, J. H., 1960, "Theory of Thermal Stresses," John Wiley, New York, pp. 410~449.
- (2) Chen, L. W., Brunelle, E. J. and Chen, L. Y., 1982, "Thermal Buckling of Initially Stressed Thick Plates," J. Mechanical Design, Vol. 104, pp. 557~564.
- (3) Rrabhu, M. S. and Durvasula, S., 1974, "Thermal Buckling of Restraiaed Skew Plates," J. Engng Mech., ASCE, Vol. 100, pp. 1292~1295.
- (4) Tauchert, T. R. and Huang, N. N., 1986, "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Antisymmetric Angle-ply Laminates," Proc. Int. Symp. Composite Materials and Structures, Beijing, pp. 357~362.
- (5) Tauchert, T. R. and Huang, N. N., 1987, "Thermal Buckling of Symmetric Angle-ply Laminated Plates," 4th Int. Conf. on Composite Structures, Elsevier Applied Science Publishers, U. K., pp. 1424~1435.
- (6) Tauchert, T. R., 1987, "Thermal Buckling of Thick Antisymmetric Angle-ply Laminates," J. Thermal Stresses, Vol. 10, pp. 113~124.
- (7) Chen, W. J., Lin, P. D. and Chen, L. W., 1991, "Thermal Buckling Behavior of Thick Composite Laminated Plates under Nonuniform Temperature Distribution," Comput. & Struct., Vol. 41, No. 4, pp. 637~645.
- (8) Chen, J. S. and Leu, S. Y., 1991, "Thermal

- Buckling Analysis of Antisymmetric Angle-ply Laminates Based on a High-Order Displacement Field," Composite Science and Technology, Vol. 41, pp. 109~128.
- (9) Chang, J. S., 1990, "FEM Analysis of Buckling and Thermal Buckling of Antisymmetric Angle-ply Laminates According to Transverse Shear and Normal Deformable High Order Displacement Theory," Comput. & Struct., Vol. 37, No. 6, pp. 925~946.
- (10) 이종석, 1990, "열하중에 의한 복합적층판의 좌굴," 한국과학기술원, 석사논문.
- (11) 이영신, 한태호, 1993, "혼합 적층판의 열적 좌굴해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제4호, pp. 890~901.
- (12) Adali, S. and Duffy, K. J., 1990, "Optimal Design of Antisymmetric Hybrid Laminates against Thermal Buckling," J. Thermal Stresses, Vol. 13, pp. 57~71.
- (13) Reddy, J. N., 1980, "A Penalty Plate-Bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates," Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 15, pp. 1187~1206.
- (14) Bathe, K. J. and Wilson, E. L., 1976, "Numerical Methods in Finite Element Analysis," Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 388~391.