

〈論 文〉

균일분포 온도하의 두꺼운 복합 재료 적층판의 열적 좌굴 해석

이영신* · 이열화** · 양명석** · 박복선** · 이종수***
(1992년 11월 9일 접수)

Thermal Buckling of Thick Laminated Composite Plates under Uniform Temperature Distribution

Young-Shin Lee, Yeol-Wha Lee, Myung-Seog Yang,
Bock-Sun Park and Jong-Soo Lee

Key Words: Thermal Buckling(열적 좌굴), Thick Laminated Plate(두꺼운 적층판), Antisymmetric Laminates(역대칭적층판), Symmetric Laminates(대칭적층판), Shear Deformation Theory(전단변형이론)

Abstract

In this paper, the thermal buckling of thick composite angle-ply laminates subject to uniform temperature distribution is studied. For the plates of 4-edges simply supported condition and those of 4-edges clamped condition, the critical buckling temperature is derived, using the finite element method based on the shear deformation theory. The effects of lamination angle, layer number, laminate thickness, plate aspect ratio and boundary constraints upon the critical buckling temperature are presented.

기호설명

A	: 적층판의 면적 ($A = a \times b$)	N_i	: 보간함수
A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	: 적층판의 강성행렬	N_n	: 요소의 절점수
E_1, E_2	: 재료의 주축방향의 탄성계수	N_x, N_y, N_{xy}	: 판의 합응력
$\{F_t\}$: 하중벡터	Q_{ij}	: 재료 강성 행렬
k_c	: 전단보정계수 (=5/6)	\bar{Q}_{ij}	: 판의 좌표로 변환된 강성행렬
$[K_G], [\bar{K}_G]$: 판의 형상행렬	Q_x, Q_y	: 합 전단력
$[K_s], [\bar{K}_s]$: 판의 강성행렬	t, t_k	: 판의 두께와 k 번째 층의 두께
m	: 판의 요소수	T_{cr}	: 임계 좌굴온도 ($T_{cr} = \lambda \times \Delta T$)
M_x, M_y, M_{xy}	: 판의 합모멘트	ΔT	: 판의 온도와 기준 온도의 차이 ($\Delta T = T_a - T_o$)
n	: 판의 적층수	$[T]$: 변환 행렬
		u, v, w	: 판의 x, y, z 방향 변위
		u_o, v_o, w_o	: 판의 중립면에서의 변위
		$\{q_j\}$: 절점 변위 벡터
		U_s, U_p	: 판의 변형에너지와 위치에너지

* 정회원, 충남대학교 기계설계공학과

** 정회원, 충남대학교 대학원

*** 정회원, 국방과학연구소

z_k	: 판의 중립면에서 k 번째 층까지의 거리
a_1, a_2	: 재료의 열팽창계수
ϵ, γ	: 변형률 성분
λ	: 좌굴하중계수 ($\lambda = T_{cr}/\Delta T$)
ν	: 푸아송의 비
σ, τ	: 응력 성분
ψ_x, ψ_y	: xz, yz 평면에서의 기울기

1. 서 론

복합 재료는 그 무게에 비하여 강도(strength) 및 강성(stiffness)이 높고, 섬유의 비중이 낮으며, 마름질(tailoring)이 가능하여 유지비가 적게 들기 때문에, 실제 응용 분야에서 섬유 강화 재료의 사용이 증가되고, 중량 감소가 중요한 설계목표가 되고 있는 구조물 응용에서 매우 중요한 분야이다. 특히, 항공우주 분야 또는 원자로에 응용되는 구조물에서 표면온도의 급격한 상승으로 생기는 구조안정성 문제는 매우 중요하다. 특히 박판으로 외벽이 구성된 구조물에서 더욱 중요하여 최근에 외국에서 이분야에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으나, 국내의 연구는 일부 수행중이다.

등방성 평판에 대한 열적좌굴에 대한 연구는 1960년 Boley와 Weiner⁽¹⁾에 의하여 단순지지된 등방성 편판에 대한 이론적인 임계좌굴온도를 구하였으며, 1982년에 Chen⁽²⁾ 등은 초기응력이 있는 두꺼운 등방성 평판에 대하여 비선형 탄성이론으로 열적좌굴을 해석하였다. 1974년에 Prabhu와 Durvasula⁽³⁾는 단순지지된 역대칭 사각판과 원판에 대하여 Ritz법으로 열적좌굴 해석을 하였다. Bergmann⁽⁴⁾은 불균일 온도장을 갖는 초기 무응력 탄성판에 대한 explicit closed-form의 해를 구하였다. Tauchert와 Haung^(5,6)은 1986년에 Kirchhoff 이론에 의한 단순지지 역대칭 Angle-ply 적층박판을 해석하였고, 1987년에 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 단순지지 대칭 Angle-ply 적층박판을 해석하였으며, 또한 Tauchert⁽⁷⁾는 Reissner-Mindlin 이론을 도입하여 두꺼운 역대칭 Angle-ply 적층판에 대한 이론적인 해석을 하였다. Chen^(8,9,10)은 1987년에 Galerkin법으로 적층복합재료 판을 해석하였으며, 1989년에는 Isoparametric Hermitian요소를 사용한 유한요소법을 이용하여 불균일 온도분포에 의한

열적좌굴을 해석하였고, 1991년에는 동일한 방법으로 온도영향이 고려된 물성치를 갖는 적층 복합재료판에 대한 후좌굴 거동을 해석하였다. 또한 1991년에 Chen⁽¹¹⁾ 등은 불균일 온도분포를 받는 두꺼운 역대칭 적층판에 대하여 Mindlin판이론과 유한요소법⁽¹²⁾을 이용하여 단순지지, 완전고정 등의 조건에서 열적좌굴을 해석하고, 그 결과를 그림으로 제시하였다.

1991년에 Chen과 Leu⁽¹³⁾은 균일분포 온도를 받는 역대칭 Angle-ply적층판에 대한 변위를 삼각함수로 표현하여 전단변형이론과 고차변위이론으로 열적좌굴을 해석하였으며 같은 시기에 Chen⁽¹⁴⁾은 역대칭 Angle-ply적층판에 대하여 고차 변위이론이 도입된 유한요소법으로 열적좌굴해석을 하였다.

열적좌굴에 대한 국내의 연구로는 1990년에 이종석⁽¹⁵⁾은 혼합 유한요소법을 이용하여 적층판을 해석하였으며, 1993년에 이영신, 한태호⁽¹⁶⁾는 Rayleigh-Ritz법으로 혼합적층 복합재료판에 대한 해석을 하였다.

본 연구에서는 Chen⁽¹¹⁾ 등과 같은 1차 전단변형이 고려된 Reddy⁽¹²⁾의 C^0 유한요소를 이용하여 균일 온도분포를 받는 역대칭 적층판의 해석 뿐만 아니라 두꺼운 대칭 적층판에 대한 해석도 수행하고 그 결과를 그림 및 표로서 제시하였다. 고려된 경계조건은 단순지지 및 완전고정 조건이며, 같은 방법으로 해석한 Chen⁽¹¹⁾의 해석결과는 그림으로만 제시되었고 사용한 재료의 물성치가 본 연구와 다르기 때문에 해석결과의 경향은 쉽게 알 수 있으나 비교를 하기 위한 수치값을 구하기는 어려웠다. Tauchert^(6,7) 등의 해석결과 역시 대부분 그림으로 제시되었으나, 특별한 몇개의 조건에 대한 수치값이 제시되어 있기 때문에 본 연구의 참고문헌으로 이용 하였으며, 이 경우는 단순지지 경계조건의 경우만 해석되었다.

본 연구에 사용된 재료는 해석결과의 비교를 위하여 Tauchert 등^(6,7)과 같은 해석을 하였으며 단순지지 경계조건 뿐만 아니라 완전고정 경계조건에 대한 해석결과를 표로서 제시하였다. 등방성 재료에 대한 해석결과는 Boley⁽¹¹⁾의 해와 비교하였고, 대칭적층판 및 역대칭 적층판의 경우에 대하여 임계좌굴비와의 관계, 적층각도에 따른 임계좌굴온도의 변화를 보였고, 적층수 및 종횡비(a/b)가 임계좌굴온도에 미치는 영향도 고찰되었다.

2. 적층판의 열적좌굴해석

2.1 기본 이론

본 논문에서 연구 대상으로 선정한 적층 복합재료판의 기하학적 형상은 Fig. 1에 보인 바와 같고, 적층판에 대하여 전단변형 이론과 회전 관성효과를 고려하기 위한 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u &= u_o(x, y) + z\psi_x(x, y), \\ v &= v_o(x, y) + z\psi_y(x, y), \\ w &= w_o(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u, v, w 는 각각 x, y, z 축 방향 변위이며, u_o, v_o, w_o 는 중립면의 x, y, z 방향 변위이고, ψ_x, ψ_y 는 굽힘 만에 의해 발생되는 xz, yz 평면의 회전 각이다. 이 때 변형률과 변위의 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_o}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_o}{\partial y} + z \frac{\partial \psi_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} + z \left[\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right], \\ \gamma_{xz} &= \psi_x + \frac{\partial w_o}{\partial x}, \end{aligned}$$

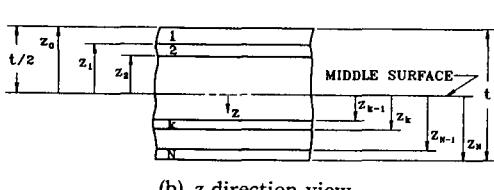
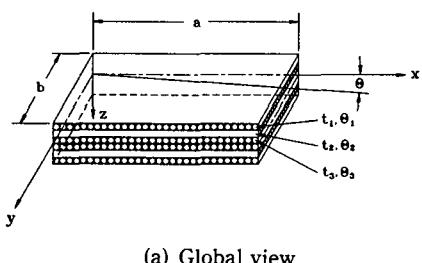


Fig. 1 Geometry and coordinate system of a plate and its section of a laminate

$$\gamma_{yz} = \psi_y + \frac{\partial w_o}{\partial y} \quad (2)$$

또한, k 번째 층의 섬유 주축에서의 응력변형률 관계를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{22} & Q_{22} & Q_{66} \\ & & \text{Symm.} \\ & & Q_{44} \\ & & Q_{55} \end{bmatrix}_k \times \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_{11}\Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_{22}\Delta T \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix}_k, \quad (3)$$

여기서

$$\begin{aligned} (Q_{11})_k &= \left[\frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ (Q_{12})_k &= \left[\frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k \\ &= \left[\frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ (Q_{22})_k &= \left[\frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right]_k, \\ (Q_{66})_k &= (G_{12})_k, \\ (Q_{44})_k &= (G_{13})_k, \\ (Q_{55})_k &= (G_{23})_k, \end{aligned} \quad (4)$$

섬유 방향이 x 축에 대하여 θ (Fig. 1 참고) 만큼 기울었을 때 적층판 좌표계에 대한 응력-변형률 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{66} \\ & & \text{Symm.} \\ & & \bar{Q}_{44} \bar{Q}_{45} \\ & & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}_k \times \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x\Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y\Delta T \\ \gamma_{xy} - 2\alpha_{xy}\Delta T \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}_k, \quad (5)$$

여기서

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q] [T]^{-T}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & S^2 & 2CS & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & -2CS & 0 & 0 \\ -CS & CS & C^2 - S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (C = \cos\theta, S = \sin\theta), \quad (7)$$

또, 단위 길이당 합응력과 합모멘트는 다음과 같아 나타낸다.

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) dz, \\ (Q_x, Q_y) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) dz, \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) z dz. \end{aligned} \quad (8)$$

따라서, 식(8)에 식(2)과 식(5)를 대입하면 합응력과 합모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & 0 & 0 & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & A_{55} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \text{Symm.} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u_o}{\partial x} \\ \frac{\partial v_o}{\partial y} \\ \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \\ \frac{\partial w_o}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial w_o}{\partial y} + \psi_y \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ 0 \\ 0 \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix}.$$

식(9)에서

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (i, j = 1, 2, 6),$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}^{ij})_k z_k t_k \quad (i, j = 1, 2, 6),$$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 t_k + \frac{t_k^3}{12}) \\ &\quad (i, j = 1, 2, 6), \\ A_{ij} &= k_c \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k t_k \quad (i, j = 4, 5), \end{aligned} \quad (10)$$

이고, k_c 는 전단 보정 계수로 $5/6$ 를 취하였으며, (17,18) 열에 의한 합응력과 합모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (N_x^T, N_y^T, N_{xy}^T) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^T, \sigma_y^T, \tau_{xy}^T) dz \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij})_k (\alpha_x, \alpha_y, 2\alpha_{xy})_k \Delta T dz, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (M_x^T, M_y^T, M_{xy}^T) &= \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^T, \sigma_y^T, \tau_{xy}^T) z dz \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{z_k}^{z_{k+1}} (\bar{Q}_{ij})_k (\alpha_x, \alpha_y, 2\alpha_{xy})_k \Delta T z dz. \end{aligned} \quad (12)$$

온도 분포가 균일할 경우 판전체에는 열응력만 발생하고 초기응력에 의한 변위는 발생하지 않는다. (1) 그러므로 초기응력이 없는 균일분포 온도를 받는 판에 대하여 식(9)의 합응력과 합모멘트는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} N_x &= -N_x^T, \quad N_y = -N_y^T, \quad N_{xy} = -N_{xy}^T, \\ M_x &= -M_x^T, \quad M_y = -M_y^T, \quad M_{xy} = -M_{xy}^T, \\ Q_x = Q_y &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

2.2 유한요소 해석모델

유한 요소 해석을 위한 판 요소로 Reddy⁽¹²⁾가 제안한 벌칙 함수를 적용한 판의 굽힘 요소를 사용하였으며, Fig. 2에서와 같이 $u_o, v_o, w_o, \phi_x, \phi_y$ 를 갖는 5-자유도 문제로 수식화 하였고, 변위장 보간 함수(interpolation function)는 다음과 같이 정한다.

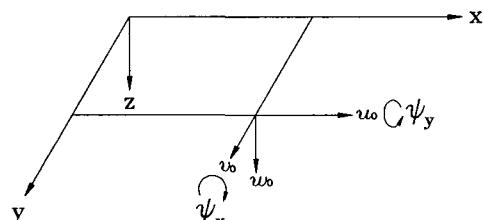


Fig. 2 Definition of coordinates, displacements and rotations of a plate

$$\begin{aligned}
 u_o^e &= \sum_{i=1}^{Nn} u_i^e N_i^e, \\
 v_o^e &= \sum_{i=1}^{Nn} v_i^e N_i^e, \\
 w_o^e &= \sum_{i=1}^{Nn} w_i^e N_i^e, \\
 \phi_x^e &= \sum_{i=1}^{Nn} \phi_{xi}^e N_i^e, \\
 \phi_y^e &= \sum_{i=1}^{Nn} \phi_{yi}^e N_i^e,
 \end{aligned} \tag{14}$$

여기서, N_i^e 는 보간 함수를 나타내고, N_n 은 요소의 절점수이다.

유한 요소 해석법의 적용을 위하여 판의 총 위치 에너지 (total potential energy)를 표시하면 다음과 같다.

$$\pi = U_s + U_p, \tag{15}$$

여기서, U_s 는 변형률 에너지, U_p 는 외력에 의한 위치 에너지로서 응력, 변형률로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 U_s &= \frac{1}{2} \int_A [N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy} + Q_x \gamma_{xz} \\
 &\quad + Q_y \gamma_{yz}] dx dy \\
 &= \sum_{e=1}^m \left\{ \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K_s^e] \{q^e\} - \{q^e\}^T [F_t^e] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^T [K_s] \{q\} - \{q\}^T [F_t], \tag{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_p &= \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right. \\
 &\quad \left. + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
 &= \sum_{e=1}^m \frac{1}{2} \{q^e\}^T [K_c^e] \{q^e\} \\
 &= \frac{1}{2} \{q\}^T [K_c] \{q\}, \tag{17}
 \end{aligned}$$

여기서 요소 강성 행렬 $[K_s^e]$ 와 요소 형상 행렬 $[K_c^e]$, 요소 열하중 벡터 $[F_t^e]$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 [K_s^{11}] &= A_{11}[S^x] + A_{16}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) \\
 &\quad + A_{66}[S^y], \\
 [K_s^{12}] &= A_{12}[S^{xy}] + A_{16}[S^x] + A_{26}[S^y] \\
 &\quad + A_{66}[S^{xy}]^T, \\
 [K_s^{14}] &= A_{11}[S^x] + A_{16}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) \\
 &\quad + A_{66}[S^y], \\
 [K_s^{15}] &= B_{12}[S^{xy}] + B_{16}[S^x] + B_{26}[S^y] \\
 &\quad + B_{66}[S^{xy}]^T, \\
 [K_s^{22}] &= A_{22}[S^y] + A_{26}([S^{xy}]^T + [S^{xy}]) \\
 &\quad + A_{66}[S^x],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_s^{24}] &= B_{12}[S^{xy}]^T + B_{26}[S^y] + B_{16}[S^x] \\
 &\quad + B_{66}[S^{xy}], \tag{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_s^{25}] &= B_{22}[S^y] + B_{26}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) \\
 &\quad + B_{66}[S^x],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_s^{33}] &= A_{44}[S^x] + A_{45}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) \\
 &\quad + A_{55}[S^y],
 \end{aligned}$$

$$[K_s^{34}] = A_{44}[S^{xy}] + A_{45}[S^{yo}],$$

$$[K_s^{35}] = A_{45}[S^{xo}] + A_{55}[S^y],$$

$$\begin{aligned}
 [K_s^{44}] &= D_{11}[S^x] + D_{16}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) + D_{66}[S^y] \\
 &\quad + A_{44}[S^o],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_s^{45}] &= D_{12}[S^{xy}] + D_{16}[S^x] + D_{26}[S^y] \\
 &\quad + D_{66}[S^{xy}]^T + A_{45}[S^o],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_s^{55}] &= D_{26}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) + D_{66}[S^x] + D_{22}[S^y] \\
 &\quad + A_{55}[S^o],
 \end{aligned}$$

$$[K_s^{13}] = [K_s^{23}] = 0,$$

$$[K_s^{33}] = n_x[S^x] + n_{xy}([S^{xy}] + [S^{xy}]^T) + n_y[S^y],$$

$$[K_c^{11}] = [K_c^{12}] = [K_c^{13}] = [K_c^{14}] = [K_c^{15}] = 0,$$

$$[K_c^{22}] = [K_c^{24}] = [K_c^{25}] = 0, \tag{19}$$

$$[K_c^{34}] = [K_c^{35}] = 0,$$

$$[K_c^{44}] = [K_c^{45}] = 0,$$

$$[K_c^{55}] = 0,$$

$$[F_t^1] = N_x[S^{xo}] + N_{xy}[S^{yo}],$$

$$[F_t^2] = N_y[S^{yo}] + N_{xy}[S^{xo}],$$

$$[F_t^3] = 0, \tag{20}$$

$$[F_t^4] = M_x[S^{xo}] + M_{xy}[S^{yo}],$$

$$[F_t^5] = M_y[S^{yo}] + M_{xy}[S^{xo}],$$

$$\text{여기서 } [S^{ei}] = \int_{A_e} N_{i,\xi} N_{j,\zeta} d\xi dy (\xi, \zeta = 0, x, y)$$

이고, 요소 열하중계수 n_x , n_{xy} , n_y 는 다음과 같다.

$$n_x = \frac{N_x}{4T}, \quad n_y = \frac{N_y}{4T}, \quad n_{xy} = \frac{N_{xy}}{4T}. \tag{21}$$

또한 초기좌굴의 변위장에 대하여 판의 변형 에너지, 식(16)를 최소화 하면 다음의 식을 얻는다.

$$[K_s] \{q\} = [F_t] \tag{22}$$

중립 평형조건에 부합하는 일계 좌굴 상태에 대하여 판 전체 위치에너지의 2차변분 (second variation)을 0이 되게 하면 다음의 고유치 문제를 얻는다.

$$[K_s] \{q\} + \lambda [K_c] \{q\} = [0], \tag{23}$$

위식의 변위 벡터, $\{q\} = \{u_o, v_o, w_o, \phi_x, \phi_y\}$ 를 $\{\bar{q}\} = \{w_o : u_o, v_o, \phi_x, \phi_y\}$ 로 구성되는 방정식으로

분리하여 정리하면

$$\begin{bmatrix} K_{s1} & K_{s2} \\ \dots & \dots \\ K_{s3} & K_{s4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_o \\ \dots \\ u_o \\ v_o \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} \bar{K}_c & O \\ \dots & \dots \\ O & O \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_o \\ \dots \\ u_o \\ v_o \\ \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (24)$$

이고, 그러면 특성방정식은 최종적으로 다음과 같아 더욱 간단한 식으로 표현된다.

$$[\bar{K}_s] \{w_o\} + \lambda [\bar{K}_c] \{w_o\} = \{0\} \quad (25)$$

여기서, $[\bar{K}_s] = [K_{s1}] - [K_{s2}] [K_{s4}]^{-1} [K_{s3}]$ 이고⁽¹⁹⁾, λ 는 하중계수로서 초기응력이 없이 균일분포 열하중을 받는 경우에서는 열하중 계수이며, 초기온도와 λ 의 합이 임계좌굴온도 T_{cr} 이다.

3. 수치해석 및 토론

본 연구에서 수치해석은 단순지지 경계조건과 완전고정 경계조건에 대하여 수행되었으며, 사용된 경계조건은

Table 1 Comparison between the FEM solution and the results of Ref[1] for isotropic plates

Nondimensional critical buckling temperature for a simply supported aluminum plates, $E=10 \times 10^6$ psi, $a/t=100$, $\nu=0.3$, $\alpha=1.0 \times 10^{-6}$ in/in/ $^{\circ}$ K

a/b	Ref[1]	Present	
		9-nodes (2x2 elements)	9-nodes (3x3 elements)
0.25	0.672	0.682	0.674
0.5	0.791	0.801	0.793
1.0	1.265	1.281	1.268
1.5	2.056	2.081	2.060
2.0	3.163	3.201	3.168
2.5	4.587	4.641	4.591
3.0	6.327	6.398	6.327

(1) 단순지지 경계조건

$$x=0, a \text{ 일때 } u_o=w_o=\phi_y=0$$

$$y=0, b \text{ 일때 } v_o=w_o=\phi_x=0 \quad (26)$$

(2) 완전고정 경계조건

$$x=0, a \text{ 일때 } u_o=v_o=w_o=\phi_x=\phi_y=0$$

$$y=0, b \text{ 일때 } u_o=v_o=w_o=\phi_x=\phi_y=0 \quad (27)$$

이고, 고려된 적층판의 재료물성치는 다음과 같다.^(6,7,11)

$$E_1/E_o=181, E_2/E_o=10.3, G_{12}/E_o=0.717,$$

Table 2 Comparison between the FEM solution and results of Ref[7] and Ref[11] for antisymmetric angle-ply laminated plates

Nondimensional critical buckling temperature ($=\alpha_o T_{cr} \times 10^3$) for a simply supported laminated plates ($a/b=1$), $E_1/E_o=181$, $E_2/E_o=10.3$, $G_{12}/E_o=0.717$, $G_{13}/E_o=0.598$, $G_{23}/E_o=0.239$, $a/t=20$, $\nu=0.28$, $\alpha_1/\alpha_o=0.2$, $\alpha_2/\alpha_o=22.5$, $E_o=1.0$ Gpa, $\alpha_o=1.0 (\mu\text{m}/\text{m})/{}^{\circ}\text{K}$, B. C. ($x=0, a$; $u=w=\phi_y=0, y=0, b$; $v=w=\phi_x=0$)

No of layers	ply-angle	References			Present	
		Ref[7] *	Ref[11] **	Ref[11] ***	9-nodes (2x2)	9-nodes (3x3)
2	(45°/-45°)	1.055	0.992	-	1.021	1.012
4	(45°/-45°) ₂	2.228	2.032	2.038	2.053	2.037
8	(45°/-45°) ₄	2.522	2.275	2.278	2.296	2.278

Note * Based on classical thin plate theory

** Based on Reissner-Mindlin plate theory

*** FEM solutions

Table 3 Comparison between the FEM solution and results of Ref[6] for symmetric angle-ply laminated plates

Nondimensional critical buckling temperature $\{=\alpha_0 T_{cr} \times 10^3\}$ for a simply supported laminated plates ($a/b=1$), $E_1/E_0=181$, $E_2/E_0=10.3$, $G_{12}/E_0=0.717$, $G_{13}/E_0=0.598$, $G_{23}/E_0=0.239$, $a/t=20$, $\nu=0.28$, $\alpha_1/\alpha_0=0.2$, $\alpha_2/\alpha_0=22.5$, $E_0=1.0 \times 10^6$ Gpa, $\alpha_0=1.0 (\mu\text{m}/\text{m})/^\circ\text{K}$ B. C. ($x=0$, α ; $u=w=\psi_y=0$, $y=0$, b ; $v=w=\psi_x=0$)

Ply angle	No. of Layers	References		Present	
		Ref[6]*	Ref[15]*	9-nodes (2×2)	9-nodes (3×3)
11.25°	1	1.038	1.033	1.090	0.993
	3	1.130	—	1.125	1.039
	5	1.236	1.236	1.199	1.136
45°	1	1.097	—	1.252	1.077
	3	1.666	—	1.557	1.445

Note * Based on classical theory

Table 4 Nondimensional critical buckling temperature for a simply supported laminated plates ($a/b=1$), $E_1/E_0=181$, $E_2/E_0=10.3$, $G_{12}/E_0=0.717$, $G_{13}/E_0=0.598$, $G_{23}/E_0=0.239$, $a/t=20$, $\nu=0.28$, $\alpha_1/\alpha_0=0.2$, $\alpha_2/\alpha_0=22.5$, $E_0=1.0 \times 10^6$ Gpa, $\alpha_0=1.0 \times 10^{-6} (\mu\text{m}/\text{m})/^\circ\text{K}$

No. of layers	Ply-angle (θ)							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	
1	0.930	1.036	1.097	1.077	1.097	1.036	0.930	
3	0.930	1.122	1.395	1.445	1.395	1.122	0.930	
5	0.930	1.292	1.881	2.040	1.881	1.292	0.930	
2	0.930	0.979	0.998	1.012	0.998	0.979	0.930	
4	0.930	1.294	1.864	2.037	1.864	1.294	0.930	
8	0.930	1.370	2.070	2.278	2.070	1.370	0.930	

Table 5 Nondimensional critical buckling temperature for a laminated plates with clamped edge condition ($a/b=1$), $E_1/E_0=181$, $E_2/E_0=10.3$, $G_{12}/E_0=0.717$, $G_{13}/E_0=0.598$, $G_{23}/E_0=0.239$, $a/t=20$, $\nu=0.28$, $\alpha_1/\alpha_0=0.2$, $\alpha_2/\alpha_0=22.5$, $E_0=1.0 \times 10^6$ Gpa, $\alpha_0=1.0 \times 10^{-6} (\mu\text{m}/\text{m})/^\circ\text{K}$

No. of layers	Ply-angle (θ)							
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	
1	2.067	2.040	2.094	1.867	2.094	2.040	2.067	
3	2.067	2.185	2.678	2.605	2.678	2.185	2.067	
5	2.067	2.388	3.514	3.704	3.514	2.388	2.067	
2	2.067	2.005	2.245	2.140	2.245	2.005	2.067	
4	2.067	2.390	3.624	3.789	3.624	2.390	2.067	
8	2.067	2.477	3.880	4.153	3.880	2.477	2.067	

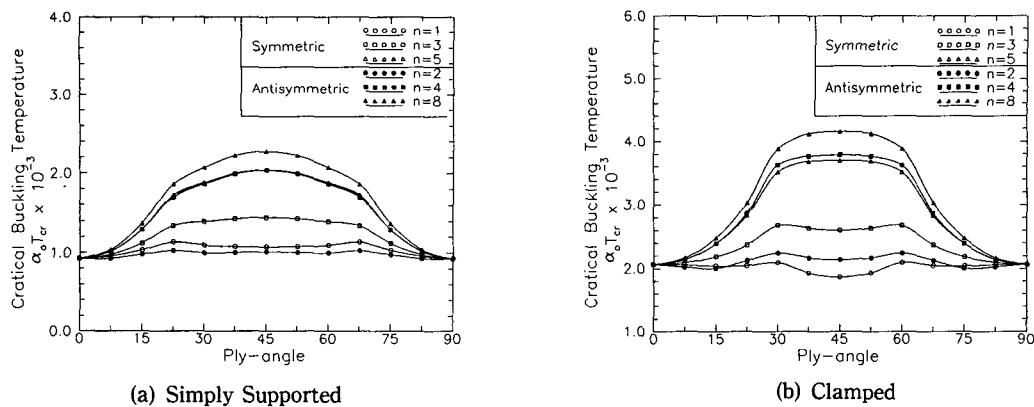


Fig. 3 Effect of ply-angle on the critical buckling temperature of laminates($a/b=1$, $a/t=20$, $\theta=45^\circ$)

Table 6 Nondimensional critical buckling temperature for a simply supported laminated plates($a/b=1$), $E_1/E_0=181$, $E_2/E_0=10.3$, $G_{12}/E_0=0.717$, $G_{13}/E_0=0.598$, $G_{23}/E_0=0.239$, $\nu=0.28$, $\alpha_1/\alpha_0=0.2$, $\alpha_2/\alpha_0=22.5$, $E_0=1.0 \times 10^6$ Gpa, $\alpha_0=1.0 \times 10^{-6}$ ($\mu\text{m}/\text{m}$) / $^\circ\text{K}$

No of layers	Ply-angle	Thickness Ratio(a/t)					
		5	10	20	30	50	100
1	15°	7.043	3.262	1.036	0.485	0.180	0.045
	30°	6.890	3.478	1.097	0.512	0.189	0.048
	45°	6.552	3.378	1.077	0.504	0.187	0.047
3	15°	2.959	1.557	1.122	1.035	0.989	0.969
	30°	4.382	2.130	1.395	1.237	1.151	1.114
	45°	4.694	2.262	1.445	1.266	1.167	1.123
5	15°	2.012	1.445	1.292	1.263	1.248	1.242
	30°	3.023	2.124	1.881	1.835	1.812	1.802
	45°	3.285	2.306	2.040	1.989	1.963	1.952
2	15°	4.531	1.907	0.979	0.789	0.690	0.648
	30°	6.917	2.505	0.998	0.694	0.535	0.468
	45°	7.406	2.676	1.012	0.673	0.496	0.420
4	15°	2.373	1.527	1.294	1.250	1.227	1.218
	30°	3.580	2.231	1.864	1.795	1.759	1.744
	45°	3.902	2.438	2.037	1.961	1.922	1.905
8	15°	1.656	1.428	1.370	1.359	1.354	1.351
	30°	2.518	2.161	2.070	2.053	2.045	2.041
	45°	2.767	2.378	2.278	2.260	2.250	2.246

$$\begin{aligned} G_{13}/E_0 &= 0.598, \quad G_{23}/E_0 = 0.239, \\ \nu &= 0.28, \quad \alpha_1/\alpha_0 = 0.2, \quad \alpha_2/\alpha_0 = 22.5, \\ E_0 &= 1.0 \text{ Gpa}, \quad \alpha_0 = 1.0 (\mu\text{m}/\text{m})/^\circ\text{K} \end{aligned} \quad (28)$$

또한 수치예에서 고려된 판의 종횡비는 $0.25 \leq a/b \leq 3$ 이고, 두께비는 $5 \leq a/t \leq 100$ 이다.

본 연구에서 사용한 유한요소법의 확인을 위하여 기존 연구결과와 비교 검토를 하였는데 먼저 등방성 재료에 대하여 단순지지 경계조건의 경우 참고문헌⁽¹⁾의 엄밀해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} N^T_{cr} &= (1-\nu) \left\{ 1 + \frac{a^2}{b^2} \right\} \frac{\pi^2 D}{a^2}, \\ D &= \frac{Et^3}{12(1-\nu)}, \end{aligned} \quad (29)$$

여기서 임계 좌굴응력, N^T_{cr} 은 무차원 임계좌굴

온도 $\{=\alpha T_{cr}(a^2/t^2)\}$ 로 변환을 하여 계산한 결과이며, Table 1에서 본 연구의 유한요소 해석 결과는 대체로 Boley의 연구결과⁽¹⁾와 잘 일치하는데, 2×2 요소의 해석결과보다 3×3 요소의 해석결과가 더욱 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 이는 3×3 요소의 경우가 판 모서리의 영향을 적게 받기 때문이다.

또한 Table 2는 역대칭 적층판에 대한 열적 좌굴 해석 결과를 기존의 연구 결과와 비교 검토한 것인데 3×3 요소의 경우 참고문헌⁽¹¹⁾의 결과와 잘 일치하고 있다. Table 2에서 참고문헌⁽⁷⁾의 *는 참고문헌에서 제시된 수식으로 계산한 값이며, **는 제시된 그림을 읽은 값이다. 이 경우 적층판은 $(\theta/\theta/\theta/\theta/\cdots)$ 으로 구성되는 역대칭 판으로 각 층의 두께는 서로 같게 하였고, 해석은 9개의 절점 을 가진 요소를 사용하여 4개의 요소(2×2)의 경우

Table 7 Nondimensional critical buckling temperature for a laminated plates with clamped edge condition ($a/b=1$), $E_1/E_0=181$, $E_2/E_0=10.3$, $G_{12}/E_0=0.717$, $G_{13}/E_0=0.598$, $G_{23}/E_0=0.239$, $\nu=0.28$, $\alpha_1/\alpha_0=0.2$, $\alpha_2/\alpha_0=22.5$, $E_0=1.0 \times 10^6 \text{ Gpa}$, $\alpha_0=1.0 \times 10^{-6} (\mu\text{m}/\text{m})/^\circ\text{K}$

No. of layers	Ply-angle	Thickness Ratio (a/t)					
		5	10	20	30	50	100
1	15°	7.431	4.869	2.040	1.050	0.412	0.107
	30°	6.941	4.891	2.094	1.081	0.426	0.111
	45°	6.644	4.585	1.867	0.946	0.368	0.095
3	15°	4.559	2.818	2.185	2.052	1.981	1.951
	30°	6.494	3.797	2.678	2.420	2.278	2.216
	45°	7.286	3.936	2.605	2.296	2.124	2.048
5	15°	3.396	2.614	2.388	2.344	2.322	2.312
	30°	5.087	3.876	3.514	3.444	3.408	3.392
	45°	5.594	4.128	3.704	3.622	3.580	3.562
2	15°	6.190	3.361	2.005	1.691	1.519	1.445
	30°	7.660	4.711	2.245	1.654	1.329	1.188
	45°	7.667	4.894	2.140	1.513	1.173	1.025
4	15°	3.865	2.736	2.390	2.322	2.287	2.272
	30°	5.883	4.164	3.624	3.518	3.463	3.439
	45°	6.584	4.431	3.789	3.665	3.600	3.573
8	15°	2.894	2.564	2.477	2.461	2.452	2.449
	30°	4.514	4.013	3.880	3.855	3.842	3.836
	45°	4.914	4.311	4.153	4.123	4.108	4.102

와 9개의 요소(3×3)의 경우에 대하여 수행하였으며, 3×3 가우스(Gauss) 적분법을 사용하였다.

Table 3에서는 대칭 적층판의 해석 결과와 기존

의 연구결과와의 비교를 제시하고 있으며 이경우 역대칭판과 같은 조건을 사용하였고, 적층방법은 $(\theta_1 - \theta_2 \cdots)_s$ 으로 하였는데, 이경우의 결과는 서로

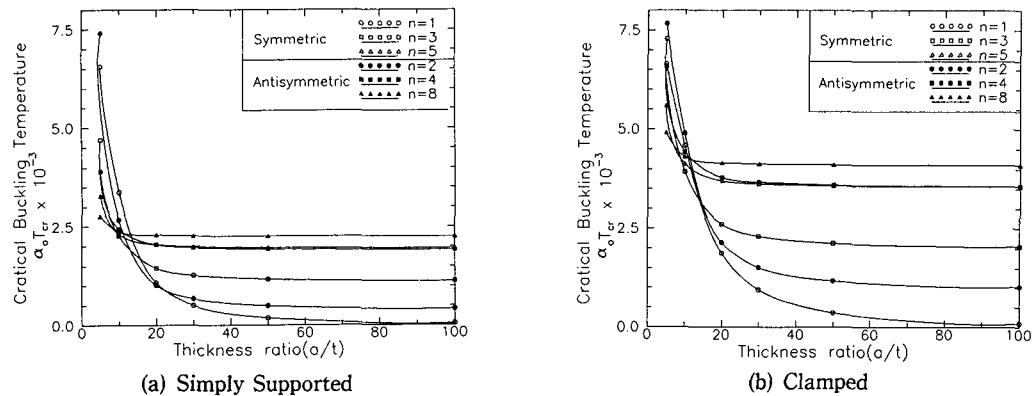


Fig. 4 Effect of plate thickness on the critical buckling temperature of laminates($a/b=1, \theta=45^\circ$)

Table 8 Nondimensional critical buckling temperature for a simply supported laminated plates,
 $E_1/E_0=181, E_2/E_0=10.3, G_{12}/E_0=0.717, G_{13}/E_0=0.598, G_{23}/E_0=0.239, a/t=20, \nu=0.28, \alpha_1/\alpha_0=0.2, \alpha_2/\alpha_0=22.5, E_0=1.0 \times 10^6 \text{ Gpa}, \alpha_0=1.0 \times 10^{-6} (\mu\text{m/m})/^\circ K$

No. of layers	Ply-angle	Aspect Ratio(a/b)						
		0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	15°	1.252	1.038	1.036	1.082	1.123	1.271	1.478
	30°	1.057	0.971	1.097	1.319	1.644	2.041	2.495
	45°	0.662	0.698	1.077	1.651	2.408	3.319	4.248
3	15°	1.337	1.131	1.122	1.159	1.182	1.319	1.518
	30°	1.316	1.277	1.395	1.598	1.908	2.291	2.731
	45°	0.757	0.886	1.445	2.181	3.084	4.138	5.290
5	15°	1.501	1.311	1.292	1.311	1.309	1.426	1.610
	30°	1.780	1.821	1.881	2.083	2.372	2.730	3.141
	45°	0.859	1.168	2.040	2.985	4.001	5.102	6.263
2	15°	1.108	0.981	0.979	0.951	0.966	1.092	1.285
	30°	0.911	0.928	0.999	1.134	1.364	1.663	2.012
	45°	0.423	0.574	1.012	1.532	2.135	2.824	3.589
4	15°	1.481	1.313	1.294	1.291	1.283	1.395	1.575
	30°	1.707	1.741	1.864	2.061	2.334	2.670	3.058
	45°	0.790	1.135	2.037	2.968	3.933	4.956	6.031
8	15°	1.571	1.393	1.370	1.374	1.360	1.467	1.643
	30°	1.900	1.937	2.070	2.277	2.555	2.896	3.288
	45°	0.880	1.270	2.278	3.296	4.331	5.414	6.538

약간의 차이를 보이고 있다. 즉 3×3 요소의 유한요소해석 결과가 참고문헌의 결과보다 작은 값을 보인다. 이 차이는 전단변형 효과에 의한 것으로 보이며 $a/t \leq 20$ 인 경우 적층판이 더욱 두꺼워지므로 더욱 중대한 의미를 갖는다.

Table 4, Table 5는 두꺼운 ($a/t=20$) 복합재료 적층 정사각판의 적층각 변화에 따른 임계좌굴 온도 변화의 계산 결과를 나타내고 있는데 Table 4는 경계조건이 단순지지일 경우이고 Table 5는 완전 고정지지일 경우이다. 또 Table에서 적층수가 1, 3, 5인 경우는 대칭으로 적층된 경우이고 2, 4, 8은 역대칭으로 적층된 경우를 나타낸다.

2종류의 경계조건에서 두꺼운 복합재료 적층판의 임계 좌굴온도는 대체적으로 적층각이 45° 일 때 최대이고 $0^\circ, 90^\circ$ 일 때 최소이었으나, 완전고정의 경

계조건을 갖는 대칭적층판에서 종횡비가 1이고 단일적층의 경우에 섬유방향이 45° 일때 오히려 최소가 되었다. 이는 Fig. 3에서도 확실히 알 수 있다. 또 단순지지 경계조건인 경우보다 완전 고정지지일 경우의 임계 좌굴온도가 높으며 적층수가 많아질수록 임계 좌굴온도에 미치는 적층각의 영향은 큰 것을 알 수 있다. 왜냐하면 두께가 일정할 때 적층수가 많아짐에 따라 굽힘강성 계수 D_{16}, D_{26} 가 감소하여 굽힘-비틀림 연계성이 감소하는 경향을 보이기 때문이다.⁽²⁰⁾ 그러나 적층각을 0.5° 씩 변화시키면서 계산된 결과에 의하면 단순지지된 두꺼운 적층 정사각판의 경우 단일적층이면 임계좌굴온도는 적층각이 $23.5^\circ, 66.5^\circ$ 일 때 최대로서 고전판이론으로 해석한 참고문헌⁽⁷⁾의 $22.5^\circ, 67.5^\circ$ 의 약간의 차이를 보이며, 또한 완전고정 경계조건에서는 29.5° ,

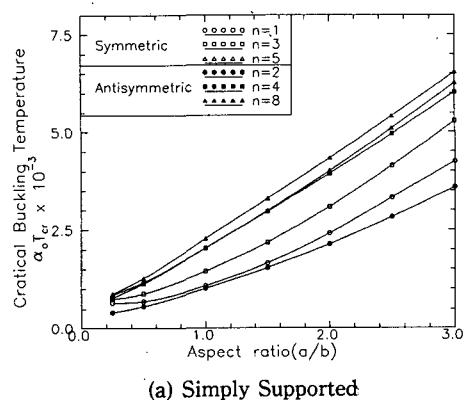
Table 9 Nondimensional critical buckling temperature for a laminated plates with clamped edge condition, $E_1/E_0=181, E_2/E_0=10.3, G_{12}/E_0=0.717, G_{13}/E_0=0.598, G_{23}/E_0=0.239, a/t=20, \nu=0.28, \alpha_1/\alpha_0=0.2, \alpha_2/\alpha_0=22.5, E_0=1.0 \times 10^6 \text{ Gpa}, \alpha_0=1.0 \times 10^{-6} (\mu\text{m/m})/K$

No of layers	Ply-angle	Aspect Ratio (a/b)						
		0.25	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
1	15°	3.650	2.389	2.040	2.338	2.485	2.870	3.369
	30°	2.911	2.050	2.094	2.332	2.990	3.810	4.543
	45°	1.644	1.549	1.867	2.926	3.955	4.936	5.669
3	15°	3.790	2.549	2.185	2.519	2.633	2.999	3.489
	30°	3.348	2.543	2.678	2.920	3.600	4.471	5.137
	45°	2.058	2.125	2.605	4.031	5.674	7.010	7.565
5	15°	4.000	2.773	2.388	2.735	2.815	3.150	3.620
	30°	4.018	3.317	3.514	3.728	4.378	5.247	5.179
	45°	2.717	2.791	3.704	5.546	7.580	7.614	7.636
2	15°	3.035	2.217	2.005	2.288	2.444	2.834	3.338
	30°	2.426	2.147	2.245	2.490	3.116	3.933	4.822
	45°	1.459	1.537	2.140	3.388	5.040	6.842	7.613
4	15°	3.881	2.748	2.390	2.742	2.809	3.143	3.612
	30°	3.992	3.398	3.624	3.776	4.406	5.265	5.190
	45°	2.550	2.738	3.789	5.668	7.615	7.638	7.654
8	15°	4.070	2.868	2.477	2.813	2.892	3.213	3.674
	30°	4.322	3.663	3.880	4.052	4.680	5.375	5.194
	45°	2.805	3.014	4.153	6.148	7.625	7.645	7.659

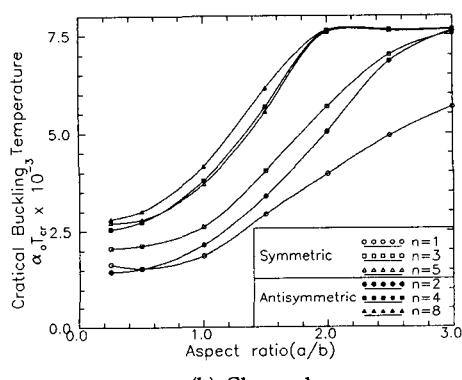
60.5°에서 최대값을 보인다.

또한 역대칭적층판의 경우 단순지지의 경계조건을 갖는 2층으로 적층된 경우에 19.5°에서 최대값을 보이고 있으며, 이는 Tauchert⁽⁷⁾의 20.1°와 잘 일치하고 있고, 완전고정 경계조건을 갖는 2층으로 적층된 경우는 27°에서 최대값을 갖는다.

Table 6, Table 7에서는 복합재료 적층 정사각판의 두께 변화에 따른 임계좌굴온도 변화의 계산 결과를 나타내고 있는데 두 가지 경계조건은 모두 두께비(a/t)가 클수록 즉, 복합재료 적층판이 얇을수록 임계 좌굴온도는 점근적으로 감소하고 두께비가 작을 경우 즉 두꺼운 복합재료 적층판인 경우 임계 좌굴온도에 미치는 두께비의 영향이 아주 큼을 Fig. 4에서 알 수 있고, 두께비가 20보다 적을 때 임계 좌굴온도에 미치는 두께비의 영향이 더욱 심하게 나타난다.



(a) Simply Supported



(b) Clamped

Fig. 5 Effect of aspect ratio on the critical buckling temperature of laminates($a/t=20$, $\theta=45^\circ$)

또 Fig. 4에서 대체적으로 두께가 같을 경우 단순지지 복합재료 적층판보다는 고정지지 적층판의 임계 좌굴온도가 높고 적층수가 많아질수록 임계좌굴온도가 높음을 알 수 있다.

Table 8, Table 9는 두꺼운 복합재료 적층판의 임계좌굴 온도 변화에 미치는 종횡비(a/b)의 영향을 보여주고 있다. 단순지지 적층판일 경우 Fig. 5에서도 확실히 알 수 있듯이 종횡비가 증가할수록 임계좌굴온도는 계속적인 증가를 보였는데 이는 두께비가 일정하므로($a/t=20$) 종횡비가 증가하는 것은 복합재료 적층판의 크기가 상대적으로 작아져 열적좌굴에 대한 저항력이 커지기 때문이다. 이것은 외부하중이 작용하는 경우 복합재료 적층판의 좌굴 거동과 유사하다.⁽²⁰⁾

그러나 완전 고정지지된 두꺼운 복합재료 적층판의 경우는 단순지지 두꺼운 복합재료 적층판과 다른 거동을 하였다. 즉, 적층수가 4이상일 때 종횡비가 2이상이면 임계 좌굴온도는 거의 일정하였으며 적층수가 3이하이면 종횡비가 증가할수록 복합재료 적층판의 임계좌굴온도는 증가하였다. 또 모든 종횡비에서 적층수가 증가할수록 복합재료 적층판의 임계좌굴온도는 증가하였다.

4. 결 론

균일 분포 온도하에서 단순지지 및 완전고정 경계조건을 갖는 두꺼운 대칭적층판 및 역대칭 적층판에 대한 열적 좌굴 해석을 수행하였으며, 그 결과를 표로서 제시하였다. 단순지지 및 완전고정 경계조건을 갖는 대칭 적층판 및 역대칭 적층판의 임계 좌굴온도에 미치는 섬유방향, 적층수, 두께비, 종횡비의 영향을 연구하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 임계 좌굴온도의 섬유방향에 따른 영향은 두께비가 20, 종횡비가 1일때 단순지지 경계조건과 완전고정 경계조건 모두 적층수가 1 및 2인 경우를 제외하고 섬유 방향이 45°일때 최대값을 보이나, 단일적층 대칭판에서 단순지지 경계조건의 경우에는 23.5°, 66.5°에서 최대값을 보인다. 그리고 대체적으로 45°일때 임계 좌굴온도는 최대이고, 0°, 90°일때 최소가 되었으나, 완전고정의 경계조건에서 섬유 방향이 45°일때 오히려 최소가 되었다. 또한 2층으로 적층된 역대칭 적층판의 경우 단순지지 경계조건에서 19.5°에서 최대값을 보이고, 완전고

정 경계조건에서 27° 에서 최대값을 갖는다.

(2) 적층 두께비의 영향은 두가지 경계조건 모두 두께비가 클수록 적층수가 많을수록 임계 좌굴온도는 점근적으로 감소하고, 두께비가 20 이상인 앎은 적층판일 경우 임계 좌굴온도에 미치는 두께의 영향은 작게 나타나고 감소하는 경향을 보였다.

(3) 종횡비에 대한 영향은 단순지지 적층판일 경우 종횡비가 증가할수록 임계 좌굴온도는 계속적인 증가를 보이며, 외부하중이 작용할 때의 복합재료 좌굴거동⁽²⁰⁾과 유사하다. 그러나 완전고정 경계조건의 경우는 적층수가 4이상일때 종횡비가 2이상이면 임계 좌굴온도는 거의 일정하다.

참고문헌

- (1) Boley, B. A. and Weiner, J. H., 1960, "Theory of Thermal Stresses," John Wiley, New York, pp. 410~449.
- (2) Chen, L. W., Brunelle, E. J. and Chen, L. Y., 1982, "Thermal Buckling of Initially Stressed Thick Plates," J. Mechanical Design, Vol. 104, pp. 557~564.
- (3) Prabhu, M. S. and Durvasula, S., 1974, "Thermal Buckling of Restrained Skew Plates," J. Engng Mech., ASCE, Vol. 100, pp. 1292~1295.
- (4) Bargmann, H. W., 1985, "Thermal Buckling of Elastic Plates," J. Thermal Stresses, Vol. 8, pp. 71~98.
- (5) Tauchert, T. R. and Huang, N. N., 1986, "Thermal Buckling and Postbuckling Behavior of Antisymmetric Angle-ply Laminates," Proc. Int. Symp. Composite Materials and Structures, Beijing, pp. 357~362.
- (6) Tauchert, T. R. and Huang, N. N., 1987, "Thermal Buckling of Symmetric Angle-ply Laminated Plates," 4th Int. Conf. on Composite Structures, Elsevier Applied Science Publishers, U. K., pp. 1424~1435.
- (7) Tauchert, T. R., 1987, "Thermal Buckling of Thick Antisymmetric Angle-ply Laminates," J. Thermal Stresses, Vol. 10, pp. 113~124.
- (8) Chen, L. W., and Chen, L. Y., 1987, "Thermal Buckling of Laminated Composite Plates," J. Thermal Stresses, Vol. 10, pp. 345~356.
- (9) Chen, L. W. and Chen, L. Y., 1989, "Thermal Buckling Analysis of Composite Laminated Plates By the Finite-element Method," J. Thermal Stresses, Vol. 12, pp. 41~56.
- (10) Chen, L. W. and Chen, L. Y., 1991, "Thermal Postbuckling Behaviors of Laminated Composite Plates with Temperature-Dependent Properties," Composite Structures, Vol. 19, pp. 267~283.
- (11) Chen, W. J., Lin, P. D. and Chen, L. W., 1991, "Thermal Buckling Behavior of Thick Composite Laminated Plates under Nonuniform Temperature Distribution," Comput. & Struct., Vol. 41, No. 4, pp. 637~645.
- (12) Reddy, J. N., 1980, "A Penalty Plate-Bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plates," Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 15, pp. 1187~1206.
- (13) Chen, J. S. and Leu, S. Y., 1991, "Thermal Buckling Analysis of Antisymmetric Angle-ply Laminates Based on a High-Order Displacement Field," Composite Science and Technology, Vol. 41, pp. 109~128.
- (14) Chang, J. S., 1990, "FFM Analysis of Buckling and Thermal Buckling of Antisymmetric Angle-ply Laminates According to Transverse Shear and Normal Deformable High Order Displacement Theory," Comput. & Struct., Vol. 37, No. 6, pp. 925~946.
- (15) 이종석, 1990, "열하중에 의한 복합 적층 판의 좌굴," 한국과학기술원, 석사논문.
- (16) 이영신, 한태호, 1992, "혼합 적층판의 열적 좌굴해석," 대한기계학회논문집, 제17권, 제4호, pp. 890~901.
- (17) Whitney, J. M., 1973, "Shear Corection Factors for Orthotropic Laminates under Static Load," J. Appl. Mech. ASME, Vol. 40, pp. 302~307.
- (18) Bert, C. W., 1973, "Simplified Analysis of Static Shear Factors for Beams of Non-homogeneous Cross Section," J. Compos. Mater., Vol. 7, pp. 525~529.
- (19) Bathe, K. J. and Wilson, E. L., 1976, "Numerical Methods in Finite Element Analysis,"

- Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. Materials," Scripta Book Company, Washington, D. C.
388~391.
- (20) Jones, R. M., 1975, "Mechanics of Composite