

# 스타 그래프 연결망의 성능분석

金明均/全州又石大學

李吉行/運營體系研究室

## 〈요 약〉

다중 컴퓨터 연결망의 성능은 그 위상에 따라 크게 좌우되는데 현재까지 연구된 많은 연결망 중에서 특히 하이퍼큐브 연결망은 노드수에 비해 비교적 적은 차수와 지름을 갖고 symmetric 하며 순환적 구성(recursive decomposition structure) 특성을 갖고 있어 여러가지 알고리즘의 사상이 용이하여 많이 사용되고 있다.

여기서는 Akers<sup>[2]</sup>등에 의해 제안되어 하이퍼큐브에 못지않은 성능을 갖고 어느 면에서는 하이퍼큐브보다 더 우수한 성능을 갖고 있는 스타 그래프(star graph)에 대해 성능 분석을 하였다. 분석 척도로는 노드간 평균거리를

사용하였으며 메시지 분포는 Reed<sup>[1]</sup>가 사용한 분포를 사용하였다. 분석 결과 스타 그래프 연결망은 하이퍼큐브와 비슷한 성능을 보였으며 노드 수가 많아질수록 더 나은 성능을 보였다.

## I. 서 론

컴퓨터와 반도체 기술의 발달로 인해 많은 수의 프로세서들을 연결하여 시스템을 이루는 다중 컴퓨터(multi-computer) 시스템이 많이 연구 개발되어 왔다. 이 다중 컴퓨터에는 각 노드는 프로세서가 되고 노드사이에는 링크(edge)가 존재하여 노드 사이의 통신은 메시지 전송을 통해 한다. 이러한 다중 컴퓨터 시

스탑의 성능은 각 프로세서들을 연결하는 연결 통신망에 의해 크게 좌우된다.

다중 컴퓨터 연결망의 성능은 그 위상(topology)에 따라 크게 좌우되는데 성능 평가 척도로 많이 사용되는 것들은 지름(diameter), 차수(degree), 그리고 노드간 평균거리(mean internode distance) 등이 있다.<sup>[1]</sup>

현재까지 많은 연결망에 대해 연구하여 왔지만 그 중에서도 특히 하이퍼큐브 연결망은 노드수에 비해 비교적 적은 차수와 지름을 갖고 symmetric하며 순환적 구성(recursive decomposition structure) 특성을 갖고 있어 여러 가지 알고리즘의 사상이 용이하여 많이 사용되고 있다.

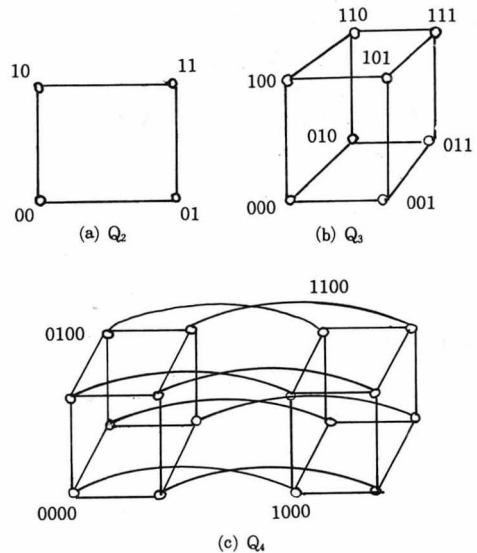
여기서는 Akers<sup>[2]</sup> 등에 의해 제안되어 하이퍼큐브에 못지 않은 성능을 갖고 어느 면에서 하이퍼큐브보다 더 우수한 성능을 갖고 있는 스타 그래프(star graph)에 대해 성능 분석을 하였다.

## II. 스타 그래프 연결망

### 1. 하이퍼큐브 연결망

이 절에서는 현재 많이 연구되어 사용되고 있는 하이퍼큐브 연결망에 대해 간단히 기술하였다.<sup>[5]</sup> n차 하이퍼큐브  $Q_n$ 은 0에서  $(2^n - 1)$  사이의 번호가 붙은  $2^n$ 개의 노드로 구성되어 있어 각 노드는 n비트 2진수로 나타내진다. 노드사이의 연결은 번호가 1비트 차이가 나는 노드끼리 연결한 구조를 갖고 있어 각 노드의 degree는 n이고 전체 연결망의 연결의 수는  $n \cdot 2^{n-1}$ 이다. 하이퍼큐브  $Q_n$ 의 지름은 n

이고 각 노드는 symmetric하며 n차 하이퍼큐브  $Q_n$ 은 2개의  $Q_{n-1}$ 로 구성할 수 있는 순환적 구성(recursive decomposition) 구조를 갖고 있다.(그림 1) 또한 하이퍼큐브 연결망은 많은 다른 형태의 연결망 구조, 즉 링(ring), 트리(tree), 메쉬(mesh) 등의 구조를 잘 포함(embed) 할 수 있어 많은 알고리즘들을 쉽게 상상할 수 있다. 현재 대표적인 하이퍼큐브 시스템으로는 Cosmic Cube<sup>[6]</sup>, NCube/10<sup>[7]</sup>, iPSC시스템<sup>[8]</sup> 등이 있다.



(그림 1) 하이퍼큐브 연결망

### 2. 스타 그래프 구조

N차 스타 그래프  $S_n$ 은 다음과 같이 무방향 그래프로 정의된다.<sup>[4]</sup> n개의 심볼의 집합  $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$ 과 이들 n개의 심볼들로 생성되는 순열(permutation)  $p (p = (p_1, p_2, \dots, p_n), p_i \in \langle n \rangle$  그리고  $i \neq j$ 이면  $p_i \neq p_j$ )가 있을 때, n차 스타그래프  $S_n$ 은  $S_n = (V_n, E_n)$ 이고

$$V_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) \mid p_i \in \langle n \rangle, p_i \neq p_j \text{ for } i \neq j\}$$

$$E_n = \{((p_1, \dots, p_n), (p_1, p_2, \dots, p_1, \dots, p_n))$$

$$\mid (p_1, \dots, p_n) \in V_n \text{ and } 2 \leq j \leq n\}$$

으로 정의된다.

즉  $S_n$ 은  $n$ 개의 심볼로 구성되는  $n!$ 개의 노드로 구성되고 노드 사이의 연결은 첫번째 심볼과  $i$ 번째 심볼과 교환하여 생성되는 노드 사이에 연결된다. 첫번째 심볼과  $i$ 번째 심볼 간의 교환을 전위(transposition)라 하고  $g_i$ 로 표시한다. 전위  $g_i$ 의 역은 자신이므로 그래프  $S_n$ 은 무방향 그래프가 된다.

스타 그래프  $S_n$ 은 차수가  $(n-1)$ , 지름이  $\lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor$ 인 정규(regular) 그래프이고  $|V_n|$

$=n!$ ,  $|E_n| = \frac{(n-1)n!}{2}$ 인 symmetric 그래프이다.<sup>[2]</sup>

$S_n$ 에서 임의의 노드  $p$ 에서 노드  $q$ 까지 경로(path)가  $e_1, e_2, \dots, e_i$ 인 링크의 집합이 존재하고 이에 해당하는 전위의 집합이  $g_{a1}, g_{a2}, \dots, g_{ai}$ 일 때

$$q = p \cdot g_{a1} \cdot g_{a2} \cdots g_{ai}$$

로 나타낼 수 있다. 또한 노드  $(q^{-1}p)$ 에서  $I$  (identity permutation)사이의 경로,  $g_{a1}, \dots, g_{ai}$ 가 존재하면 역시  $p$ 에서  $q$ 사이의 경로,  $g_{a1}, \dots, g_{ai}$ 가 존재한다.<sup>[3]</sup> 따라서 임의의 노드  $p$ 에서 노드  $q$ 사이의 경로찾기는  $(q^{-1}p)$ 에서  $I$  사이의 경로찾기로 생각할 수 있고  $p = I(g_{a1} \cdots g_{ai})$ 일 때  $p$ 에서  $I$ 사이의 경로는

$$\text{Path}(p) = g_{a1}, \dots, g_{ai}$$

로 전위의 집합으로 나타낼 수 있다.

하나의 순열  $p$ 는 아래와 같이 두 가지 서로 다른 형태로 나타낼 수 있다.

$$p = p_1 p_2 \cdots p_n$$

$$p = c_1 c_2 \cdots c_k e_1 \cdots e_l$$

$$c_i : |c_i| \geq 2 \text{인 사이클}$$

$$e_i : \text{invariant}$$

### 3. 거리 $d$ 인 노드수

임의의 순열  $p$ 에서  $I$ 로의 경로찾기는  $p$ 의 심볼들의 정렬 문제와 같다.<sup>[2]</sup> [2]의 경로찾기 알고리즘에 따라 경로찾기를 하면 최단경로 찾기가 되고 그 거리  $D_p$ 는

$$D_p = c + m \quad (p_1 = 1 \text{인 경우})$$

$$c + m - 2 \quad (p_1 \neq 1 \text{인 경우})$$

$c$  : 길이가 2 이상인 사이클 수

$m$  : 길이가 2 이상인 사이클에 속하는 심볼 수

이다. 따라서  $I$ 에서 거리가  $d$ 인 노드(순열)수를  $\text{Reach}(d, S_n)$ 이라 하면

- $p_1 = 1$ 이며  $c + m = d$ 인 순열의 수 :  $N_A$ 이고
- $p_1 \neq 1$ 이며  $c + m = d + 2$ 인 순열수 :  $N_B$ 이면
- $\text{Reach}(d, S_n) = N_A + N_B$ 이다.

가.  $p_1 = 1$ 이며  $c + m = d$ 인 노드의 수

$$2c \leq m \leq n-1 \text{이므로 } \max\{1, d-n+1\} \leq$$

$c \leq \lfloor \frac{d}{3} \rfloor$ 이다. 따라서  $c=i, m=d-i$ 인 순열의

수는

$$\binom{n-1}{d-i} \cdot \text{num\_perms}(d-i, i)$$

인데 여기서  $\binom{n-1}{d-i}$ 는 크기가 2 이상인 사이클을 이루는 (d-i)개의 심볼을 선택하는 가짓수이고, num\_perms(d-i, i)는 (d-i)개의 심볼이 크기 2 이상인 i개의 사이클을 이루는 가짓수이다.

(d-i)개의 심볼이 이루는 크기 2 이상인 i개의 사이클을  $c_1, c_2, \dots, c_i (|c_1| \leq |c_2| \leq \dots \leq |c_i|)$ 라 하고 같은 크기를 갖는 사이클들의 수를 각각  $b_1, \dots, b_i$ 이라 할 때 num\_perms(d-i, i)는

- (d-i)개의 심볼을 길이가 2 이상인 i개의 사이클로 나누는 가짓수는

$$\binom{d-i}{|c_1|} \binom{d-i-|c_1|}{|c_2|} \dots \binom{d-i-\sum_{l=1}^{i-1}|c_l|}{|c_i|} \frac{1}{b_1!} \frac{1}{b_2!} \dots \frac{1}{b_i!}$$

- i개의 사이클이 가질 수 있는 서로 다른 순열의 수는  $\prod_{|c_1|} \cdot \prod_{|c_2|} \dots \prod_{|c_i|}$ 이다. 여기서  $\prod_i$ 는 i개의 심볼로 구성된 사이클이 가질 수 있는 서로 다른 순열의 수로 (i-1)!이다.
- 따라서

$$\text{num\_perms}(d-i, i) \binom{d-i}{|c_1|} \dots \binom{d-i-\sum_{l=1}^{i-1}|c_l|}{|c_i|} \frac{\prod_{|c_1|} \cdot \prod_{|c_2|} \dots \prod_{|c_i|}}{b_1! \cdot b_2! \dots b_i!}$$

이다.

예를 들어 num\_perms(10, 4)는

- $|c_1| = |c_2| = |c_3| = 2, |c_4| = 4$  일 경우 :  $b_1 = 3$ 이므로

$$\binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{4} \cdot \frac{\prod_2 \cdot \prod_2 \cdot \prod_2 \cdot \prod_4}{3!} = 18900$$

- $|c_1| = |c_2| = 2, |c_3| = |c_4| = 3$  일 경우 :  $b_1 = 2, b_2 = 2$ 이므로

$$\binom{10}{2} \binom{8}{2} \binom{6}{3} \binom{3}{3} \cdot \frac{\prod_2 \cdot \prod_2 \cdot \prod_3 \cdot \prod_3}{2! \cdot 2!} = 25700$$

- 따라서 num\_perms(10, 4) = 18900 + 25700 = 44600가지이다.

따라서  $N_A$ 는 다음과 같다.

$$N_A = \sum_{\max\{1, d-n+1\}}^{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor} \binom{n-1}{d-i} \text{num\_perms}(d-i, i) \dots \dots \dots (1)$$

나.  $p_1 \neq 1$ 이고  $c+m=d+2$ 인 경우

$2c \leq m \leq n$ 이므로  $\max\{1, d-n+2\} \leq c \leq \lfloor \frac{d+2}{3} \rfloor$ 이다.

따라서  $c=i$  이고  $m=d-i+2$ 인 노드의 수는 1을 뺀 나머지 (d-i+1)개의 심볼을 (n-1)개에서 선택하는 가짓수가  $\binom{n-1}{d-i+1}$ 이므로

$$\binom{n-1}{d-i+1} \text{num\_perms}(d-i+2)$$

이 된다. 따라서

$$N_B = \sum_{\max\{1, d-n+2\}}^{\lfloor \frac{d+2}{3} \rfloor} \binom{n-1}{d-i+1} \text{num\_perms}(d-i+2; i) \dots \dots \dots (2)$$

이다.

식 (1)과 (2)에 의해 I에서 거리가 d인 노드의 수  $Reach(d, S_n)$ 는

$$\begin{aligned}
 Reach(d, S_n) &= N_A + N_B \\
 &= \sum_{\max(1, d-n+1)}^{\lfloor \frac{d}{3} \rfloor} \binom{n-1}{d-i} num\_perms(d-i, i) \\
 &+ \sum_{\max(1, d-n+2)}^{\lfloor \frac{d+2}{3} \rfloor} \binom{n-1}{d-i+1} num\_perms(d-i+2, i)
 \end{aligned}$$

가 된다.

### III. 성능 분석 척도

다중 컴퓨터 연결망의 성능 분석 척도로서 가장 잘 나타낼 수 있는 것으로 노드간 평균 거리(mean internode distance)가 있는데 이것은 하나의 평균 메시지(average message)가 거치는 링크의 수로서 다음과 같이 표시된다.<sup>[1]</sup> 즉, 평균 링크 방문 수(link visits) LV는

$$LV = \sum_{l=1}^{lmax} l \cdot \Phi(l) \left( \begin{array}{l} lmax : \text{지름} \\ \Phi(l) : \text{메시지 전송 분포} \end{array} \right)$$

이다.

노드간 평균거리는 각 태스크들의 통신 유형에 따라 다른데 많은 알고리즘들에서 보이는 메시지 전송 분포는 균등 메시지 분포(uniform message routing distribution), 구심형 메시지 분포(sphere of locality message distribution), 그리고 거리 반비례 분포(decreasing probability message distribution) 등이 있다.<sup>[1]</sup>

#### 1. 균등 메시지 분포

임의의 두 노드  $i, j (i \neq j)$ 에 대해 메시지를 전송할 확률이 모두 같은 경우로

$$\Phi(l) = \frac{Reach(l, Net)}{K-1}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 LV^{UMD} &= \frac{\sum_{l=1}^{lmax} l \cdot Reach(l, Net)}{K-1} \\
 &\left( \begin{array}{l} K : \text{전체 노드수} \\ lmax : \text{지름} \end{array} \right) \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

이다.

#### 2. 구심형 메시지 분포

메시지 교환횟수가 많은 태스크들이 인접 노드에 위치하도록 사상하였을 때, 반경  $l$ 이 내의 노드는  $\Phi$  확률로, 나머지는  $(1-\Phi)$  확률로 메시지를 전송한다. 반경  $l$ 이내의 노드수는

$$locsize(L, Net) = \sum_{l=1}^L Reach(l, Net)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}
 \Phi(l) &= \Phi \cdot \frac{Reach(l, Net)}{locsize(L, Net)} \quad (1 \leq l \leq L) \\
 (1-\Phi) &\cdot \frac{Reach(l, Net)}{K-1-locsize(L, Net)} \\
 &\quad (L \leq l \leq lmax)
 \end{aligned}$$

이므로

$$LV^{SOL} = \sum_{l=1}^{lmax} l \cdot \Phi(l)$$

$$= \frac{\phi \sum_{l=1}^L l \cdot \text{Reach}(l, \text{Net})}{\text{Locsize}(L, \text{Net})} + \frac{1 - \phi}{K - 1 - \text{Locsize}(L, \text{Net})} \times \sum_{l=2}^L l \cdot \text{Reach}(l, \text{Net}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

이다.

### 3. 거리 반비례 메시지 분포

노드 사이의 거리가 멀수록 메시지 전송 확률이 감소하는 것으로

$$\phi(l) = \text{Decay}(l, l_{\max}) \cdot d^l \quad (0 < d < 1)$$

이다. 여기서  $\text{Decay}(l, l_{\max})$ 는  $\sum_{l=1}^{l_{\max}} \phi(l) = 1$ 이 되도록 하기 위한 정규화 상수(normalizing constant)로서  $\text{Decay}(l, l_{\max}) = \frac{(d-1)d^{l-1}}{d^{l_{\max}} - 1}$ 이고  $d$ 는 집약성인자(locality parameter)로서  $d$ 가 1에 가까워질수록 균등 메시지 분포에 가까워지고 0에 가까워질수록 인접노드 사이의 통신 유형에 가까워진다. 따라서

$$\begin{aligned} LV_{\text{DPD}} &= \sum_{l=1}^{l_{\max}} l \cdot \phi(l) \\ &= \frac{d-1}{d^{l_{\max}} - 1} \sum_{l=1}^{l_{\max}} l \cdot d^{l-1} \\ &= \frac{(d \cdot l_{\max} - l_{\max} - 1) \cdot d^{l_{\max}} + 1}{(d-1)(d^{l_{\max}} - 1)} \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

이다.

## IV. 스타 그래프의 성능 분석

이 장에서는 스타그래프의 각각의 메시지 분포에 있어서의 노드의 평균 거리를 하이퍼큐브와 비교하여 분석하였다.

$n$ 차 하이퍼큐브  $Q_n$ 은 노드 수는  $2^n$ , 링크의 수는  $\frac{n}{2}2^n$ , 지름이  $n$ , 그리고 한 노드에서 거리가  $l$  ( $1 \leq l \leq n$ )인 노드의 수  $\text{Reach}(l, Q_n)$ 은

$$\begin{aligned} \text{Reach}(l, Q_n) &= \binom{n}{l} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{l(l-1)\dots 1} \end{aligned}$$

이다.

### 1. 균등 메시지 분포

하이퍼큐브  $Q_n$ 의 균등 메시지 분포에서의 노드간 평균거리  $LV_{Q_n}^{\text{UMD}}$ 는

$$\begin{aligned} LV_{Q_n}^{\text{UMD}} &= \sum_{l=1}^n l \cdot \phi(l) \\ &= \frac{1}{2^n - 1} \sum_{l=1}^n l \cdot \text{Reach}(l, Q_n) \end{aligned}$$

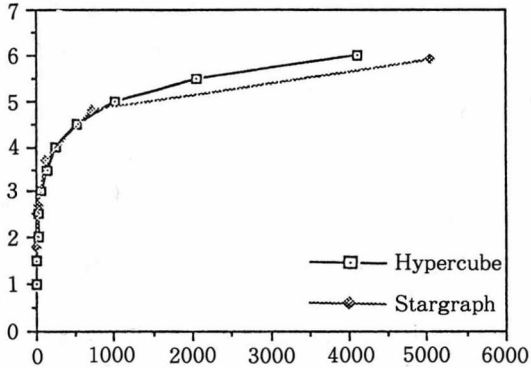
이다.

스타그래프의 노드간 평균거리  $LV_S^{\text{UMD}}$ 는

$$\begin{aligned} LV_S^{\text{UMD}} &= \sum_{l=1}^{l_{\max}} l \cdot \phi(l) \\ &= \frac{1}{n! - 1} \sum_{l=1}^{l_{\max}} l \cdot \text{Reach}(l, S_n) \\ &\quad (l_{\max} = \lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor) \end{aligned}$$

이다.

(그림 2)는 균등 메시지 분포일 때 두 연결망의 노드간 평균거리를 비교한 것이다.



(그림 2) 균등 메시지 분포에서의 노드간 평균거리

## 2. 구심형 메시지 분포

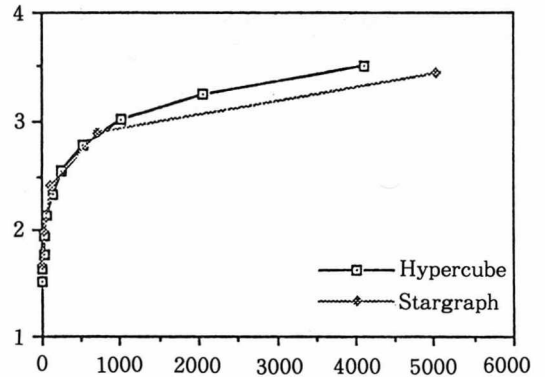
식 (4)에서 반경  $L=1$ ,  $\phi=0.5$ 일 때

$$LV_Q^{SOL} = \sum_{l=1}^n l \cdot \Phi(l) = 0.5 + \frac{1}{2(2^n - n - 1)} \sum_{l=2}^n l \cdot \text{Reach}(l, Q_n)$$

이고

$$LV_S^{SOL} = \sum_{l=1}^{l_{\max}} l \cdot \Phi(l) = 0.5 + \frac{1}{2(n! - n)} \sum_{l=2}^{l_{\max}} l \cdot \text{Reach}(l, S_n) \quad (l_{\max} = \lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor)$$

이다. (그림 3)은  $L=1$ ,  $\phi=0.5$ 일 때 구심형 메시지 분포에서의 두 연결망의 노드간 평균거리를 비교한 것이다.



(그림 3) 구심형 메시지 분포에서의 노드간 평균거리

## 3. 거리 반비례 분포

식 (5)에서 집약성 인자  $d=0.5$ 일 때

$$LV_Q^{DPD} = \sum_{l=1}^n l \cdot \Phi(l) = \frac{1 - 0.5^n(1 + 0.5^n)}{0.5(1 - 0.5^n)}$$

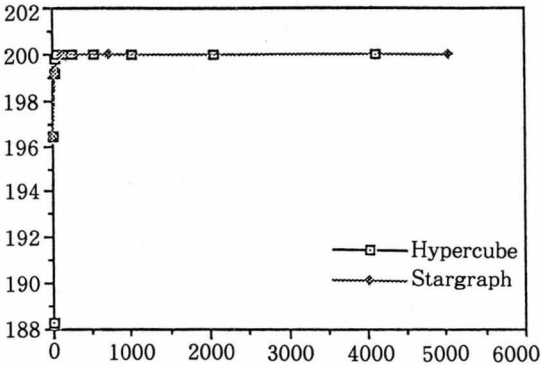
이고

$$LV_S^{DPD} = \sum_{l=1}^{l_{\max}} l \cdot \Phi(l) = \frac{1 - 0.5^{l_{\max}}(1 + 0.5^{l_{\max}})}{0.5(1 - 0.5^{l_{\max}})} \quad (l_{\max} = \lfloor \frac{3(n-1)}{2} \rfloor)$$

이다. (그림 4)는  $d=0.5$ 일 때 거리 반비례 분포에서의 두 연결망의 노드간 평균거리를 비교한 것이다.

## V. 결론

본 논문에서는 최근 Akers 등<sup>[2]</sup>에 의해 제안되어 많이 연구가 되고있는 스타 그래프의



(그림 4) 거리반비례 분포에서의 노드간 평균거리

노드간 평균거리에 대해 분석하였다. 노드간 평균거리는 연결망의 정적인 측면이 아닌 알고리즘의 통신유형 등을 고려한 분석 방법으로 차수, 지름 등과는 다른 연결망의 동적인 측면을 분석하는 척도로서 많이 사용되고 있다. 본 논문에서는 Reed 등<sup>[1]</sup>에 의해 사용된 3가지 통신유형에 대해 분석하였다.

분석 결과를 하이퍼큐브 연결망과 비교하여 본 결과 하이퍼큐브와 거의 같은 성능을 보였으며 노드수가 많아질수록 스타 그래프가 더 나은 성능을 보였다.

### 참 고 문 헌

1. D.A.Reed and D.C.Grunwald, "The Performance of Multicomputer Interconnection Networks," *IEEE Computer*, June 1987, pp.63-73.
2. S.B.Akers, D.Harel and B.Krishnamurthy, "The Star-Graph : An Attractive Alternative to the n-Cube," *Proc. Int'l Conf. on Parallel Processing*, 1987, pp.393-400.
3. S.B.Akers and B.Krishnamurthy, "A Group Theoretic Model for Symmetric Interconnection Networks," *IEEE Trans. on Computer*, 1989, pp.555-565.
4. J.S.Jwo, S.Lakshmirarahan and S.K.Dhall, "Characterization of Node Disjoint(Parallel) Path in Star Graphs," *IEEE Symp. on Parallel and distributed Processing*, 1991, pp.404-409.
5. Y.Saad and M.H. Shultz, "Topological Properties of Hypercubes," *IEEE Tr. on Computer*, Jul 1988, pp.867~872.
6. C.L. Seitz, "The Cosmic Cube," *CACM*, Vol. 28, 1985, pp.22~33.
7. J.P. Hayes, et al., "Architecture of a Hypercube Supercomputer," *Proc. Int'l Conf. Parallel Processing*, 1986, pp.653~660.
8. Intel Corp., "A New direction in Scientific Computing," Order 28009-001, Beaverton, OR, 1985.