Journal of the KSQC
Vol. 20, No. 1, June. 1992

1992년 6월 韓國品質管理學會誌 제20권 제1호

혼합중도중단에 의한 Weibull분포의 신뢰도에 관한 검정의 연구+

A Study of Test for the Reliability of Weibull Distribution Using Hybrid Censoring

廉 俊 根 *
咸 炯 範 **

Abstract

This paper deals with a test procedures on reliablity using hybrid censoring when failure time follows two parameter Weibull distribution. In each case of single and two stage test with hybrid censoring, we construct a operating characteristic curve, and then obtain the censoring number and sample size which the producer's risk and the consumer's risk are both satisfied. This study suggests to determine the expected waiting time at a decision.

1. 序 論

신뢰성 이론에서 第1種 中途中斷(Type I Censoring)이나 第2種 中途中斷(Type II Censoring)에 의한 壽命試驗(Life Testing)을 여러 형태의 수명분포에 적용하여 추정 및 검정, 예측을 행하는 이론과 방법이 많은 연구자들에 의해 논의되어 왔으며, 특히 Mann, Schafer와 Singpurwalla[1974], Bain[1978], Sinha와 Kale[1979], Lawless[1982], Martz와 Waller[1982]등은 이 분야에 관한 절차를

+ 이 논문은 1991년도 교육부지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구 조성비에 의해서 연구 되었음.
* 동국대학교 통계학과
** 국제대학교 응용통계학과

정리하였다.

중도중단에 의한 수명시험은 기존에 알려진 바와 같이 많은 장점을 갖고 있으나 제1종 중도중단은 고장나는 아이템(item)의 갯수가 많아질 수 있고, 제2종 중도중단은 시험시간이 길어질 수가 있다. 이러한 경우에는 시험자가 이 두가지 중도중단을 혼합한 混合中途中斷(Hybrid Censoring)에 의한 수명시험을 고려할 수 있다. 혼합중도중단에 의한 수명시험은 Epstein[1954]에 의해 처음 제안된 것으로 그는 아이템의 수명이 지수분포를 따를 때 지수분포의 평균에 관한 가설검정에 이 방법을 적용하여 통계적결정을 내리게 될 때 까지 소요되는 기대시간과 기대표본수를 도출하였다.

가설 검정에서 많은 실제적 상황들이 시험자로 하여금 二段階檢定(Two Stage Test)을 사용하게 한다. 특히 수명시험에서 표본 아이템 시험에 드는 많은 비용이나 한번에 시험되는 아이템의 제한된 수와 같은 요인 등은 시험자로 하여금 이단계검정을 고려하게 해주는 계기가 된다. Zeigler와 Tietjen[1968]은 정규분포의 분산에 관한 가설검정에 이 방법을 적용하였으며 이들의 연구결과를 이용하여 Bulgren과 Hewett[1973], Fairbank[1988]등은 지수분포의 평균에 관한 가설검정에 이단계검정을 적용하였다. 이단계검정은 많은 상황에 응용되어지며, Hewett와 Spurrier([1983]는 이 절차가 적절한 여러가지 예를 들고 이단계 검정의 방법을 概說하였다.

신뢰성 이론에서 가장 폭넓게 사용되어지는 아이템의 수명모형인 Weibull 분포의 경우 제1종 중도중단이나 제2종 중도중단에 의한 모수 추론의 방법과 이론은 많은 연구자들에 의해 논의되어 왔으나 혼합중도중단이나 이단계검정절차를 적용한 연구는 Weibull 분포가 갖는 분석상의 복잡한 절차와 까다로움으로 인해 지금껏 그 연구가 미진하다. 본 연구의 목적은 아이템의 수명분포가 Weibull분포일 때 이 분포의 신뢰도에 관한 가설에 혼합중도중단에 의한 검정과 혼합중도중단에 의한 이단계검정절차를 적용하여 통계적결정을 내리는 방법을 제안하고, 각각의 방법에 대해 生産者 危險(Producer's Risk)과 消費者 危險(Consumer's Risk)을 동시에 만족하게 되는 표본수와 중도중단수를 구하고자 하는 것이다. 또한 통계적 결정에 이르기 까지 시험에 소요되는 아이템의 期待故障數(Eexpected Failure Number)와 期待待期時間(Expected Waiting Time)을 구하여 본 연구에서 제안되어지는 방법이 기존의 제1종 중도중단이나 제2종 중도중단에 의한 방법보다 시간과 경비를 절약하게 됨을 보이고자 한다.

2. 混合中途中斷에 의한 檢定

2.1 檢定의 基準

척도모수 θ, 형상모수 δ인 Weibull분포의 분포함수는

$$F_T(t) = 1 - \exp[-(t/\theta)^{\delta}] \quad t,\ \theta,\ \delta > 0 \quad \cdots(2-1)$$

과 같이 주어지며, Y=ln T는 다음과 같은 極端값 分布(Extreme Value Distribution)를 따르게 된다.

$$F_Y(y) = 1 - \exp\{-\exp[(y-u)/b]\},\ -\infty < y < \infty,$$
$$u = \ln\theta,\ b = 1/\delta \quad \cdots\cdots(2-2)$$

식(2-1)의 Weibull 분포는 확률변수 T가 부품이나 시스템의 고장시간일 때 고장 및 신뢰성 분석에 많이 응용되는 수명모형으로 어떤 특정한 임무시간 t_m에서 신뢰도는

$$\begin{aligned} R(t_m) &= \exp[-(t_m/\theta)^{\delta}] \\ &= \exp\{-\exp[(y_m-u)/b]\} \\ &= \gamma \qquad\qquad , \ y_m = \ln t_m \quad \cdots\cdots(2-3) \end{aligned}$$

으로 되며, 이때 다음과 같은 가설을 검정하고자 한다.

$H_0 : R(t_m) \geq \gamma_0, \quad H_1 : R(t_m) \leq \gamma_1 (\gamma_0 > \gamma_1)$

본 연구에서는 이 가설을 검정하기 위하여 n개의 아이템에 대한 수명시험에서 $r(\leq n)$개의 제2종 중도중단 자료

$$T_{1,n} < T_{2,n} < \cdots T_{r,n} \quad \cdots\cdots (2-4)$$

을 사용하되 최대 시험 시간을 고정시키기 위해 中斷 時間(Truncation Time) t_0을 규정함으로써 제1종 중도중단을 허용하기로 한다. 여기서 $T_{r,n}$은 r번째 아이템의 고장시간이고, 절단시간 t_0은 더 이상 시험을 하지않는 종료시간 이다. 이가설에 대한 통계적 결정은 $\min(T_{r,n}, t_0)$에서 이루어 지도록 하되 t_0이전에 r개의 고장이 발생하면 H_0을 기각하고, 그렇지 않으면 채택하기로 한다.

2. 2 標本數와 中途中斷 및 中斷時間의 決定

제안되어진 신뢰도 $R(t_m)$에 관한 가설에 사용되어 질수 있는 식(2-4)의 순서 통계량의 함수로 이루어지는 통계량으로

$$d = \frac{\hat{u} - Y_m}{\hat{b}}, \quad Y_m = \ln t_m \quad \cdots\cdots (2-5)$$

을 생각할 수 있다. 여기서 $\hat{u}$, $\hat{b}$는 각각 u, b의 추정량으로 본 연구에서는 $R(t_m)$에 관한 가설검정에 소요되는 n과 r의 값을 구하기 위해 Engelhardt와 Bain[1977]에 의해 제안되어진 절차를 응용하기로 한다. 그들은 제2종 중도중단의 경우에 일련의 논문들 Bain[1972], Engelhardt[1975], Engelhardt와 Bain[1973, 1974, 1977]에서 제안한 u와 b의 추정량(Good Linear Unbiased Estimator : GLUE) $\hat{u}$, $\hat{b}$에 근거해서 d의 모든 값에 대하여

$$W(d) = \frac{\hat{u} - u}{b} - d\frac{\hat{b}}{b} \quad \cdots\cdots (2-6)$$

을 $\log-\chi^2$분포에 적합시켜 근사적으로

$$W(d) \sim \ln[g\chi^2(\ell)/\ell] \quad \cdots\cdots (2-7)$$

임을 보였고, 이것을 이용하여 신뢰계수 $1-\alpha$일 때 $R(t_m)$의 신뢰하한을

$$\begin{aligned} R_L(t_m) &= \exp\{-\exp[w(d;1-\alpha)]\} \\ &= \exp[-g\chi^2(\ell;1-\alpha)/\ell], \\ &\text{단, } \Pr[W(d) \leq w(d;p)] = p \quad \cdots (2-8) \end{aligned}$$

과 같이 도출하였다. 여기서 g와 ℓ은 W(d)의 기대값과 분산이 $\ln[g\chi^2(\ell)/\ell]$의 기대값, 분산과 같도록 연립해서 구한 값으로 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} v = {} & \mathrm{Var}(\hat{u}/b) + d^2\,\mathrm{Var}(\hat{b}/b) \\ & -2d\,\mathrm{Cov}(\hat{u}/b, \hat{b}/b) \quad \cdots\cdots (2-9) \end{aligned}$$

$$\ell = \frac{8v+12}{v^2+6v} \quad \cdots\cdots (2-10)$$

$$H(\ell) = \frac{15\ell^2+5\ell+6}{15\ell^3+6\ell} \quad \cdots\cdots (2-11)$$

$$g = \exp[-d+H(\ell)] \quad \cdots\cdots (2-12)$$

이 식들을 이용하여 $R(t_m)$에 관한 가설은 식(2-8)로부터

$$\ln[\ell n(1/\gamma_0)] < \ln[g\chi^2(\ell;\alpha)/\ell] = C \quad \cdots\cdots (2-13)$$

이면 H_0을 기각하게 된다.

생산자 위험 α와 소비자 위험 β를 만족하는 표

본수 n과 중도중단 수 r의 값을 구하기 위해 檢査特性曲線(Operating Characteristic Curve)이 다음과 같은 성질을 갖는 ($\ell=\ell^*$, $C=C^*$)의 값을 찾고자 한다.

$$1-\alpha = P_r(\text{accpept } H_0 \mid R(t_m)=\gamma_0)$$
$$= P_r[W(d)\geq C^* \mid R(t_m)=\gamma_0] \quad \cdots(2-14)$$
$$\beta = P_r[W(d)\geq C^* \mid R(t_m)=\gamma_1] \quad \cdots(2-15)$$

그런데 W(d)는 식 (2-7)과 같은 $\log-\chi^2$ 분포를 따르므로 식 (2-14)는

$$1-\alpha = \Pr[\ln(1/\gamma_0)\geq g\,\chi^2(\ell\,;\alpha)/\ell] \quad \cdots\cdots(2-14a)$$

이 된다. 따라서

$$C^*=\ln[g\,\chi^2(\ell\,;\alpha)/\ell] \quad \cdots\cdots(2-14b)$$

임을 알수 있다. C^*의 값을 수치적으로 규정하기 전에 ℓ의 값을 찾는 절차가 필요하다. 식(2-15)는 식(2-14a)와 같은 방법에 의하여

$$\beta=P_r[\ln(1/\gamma_1)\geq g\,\chi^2(\ell\,;1-\beta)/\ell] \quad \cdots(2-15a)$$

임을 의미하므로

$$C^*=\ln[g\,\chi^2(\ell\,;1-\beta)/\ell] \quad \cdots\cdots(2-15b)$$

과 같이 된다. 따라서 식(2-14)와 (2-15)를 동시에 만족하는 $\ell=\ell^*$의 값은

$$\ln\gamma_0/\ln\gamma_1=\chi^2(\ell^*\,;\alpha)/\chi^2(\ell^*\,;1-\beta) \quad \cdots\cdots(2-16)$$

에 의하여 얻을 수 있다. 여기서 $\ln\gamma_0/\ln\gamma_1$의 크기는 ℓ^*의 값을 결정하는데 영향을 미치며 식(2-16)에 있는 ℓ^*의 값은 Wilson-Hilferty[1931] 근사

$$\chi^2(\ell^*\,;p)/\ell^*=(1-2/9\ell^*+z_p\sqrt{2/9\ell^*})^3 \quad \cdots\cdots(2-17)$$

을 사용해서 구할 수 있다. 단, z_p는 N(0, 1)의 100p 분위수.

이렇게 구하여진 ℓ^*의 값을 식(2-10)에 대입하여 $v(\geq 0)$의 값을 얻을 수 있고, 구한 v의 값을 식(2-9)와 연립해서 α와 β를 만족하는 n과 r의 값을 결정할 수 있다. 또한 이값들을 본 연구에서 제안된 검정기준에 사용하기 위해서는 절단시간 t_0을 적절하게 선택하는 절차가 필요하다. $R(t_m)$의 검정기준에서 H_0이 참일 때 H_0이 채택되어질 확률은 다음과 같이 주어진다.

$$1-\alpha=\sum_{i=0}^{r-1}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}(1-p_0)^i(p_0)^{n-i},$$

$$p_0=\gamma_0^{(t_0/t_m)^\delta} \quad \cdots\cdots(2-18)$$

본 연구에서는 α의 값을 작게하고, 절단시간이 $t_0\geq t_m$이 되는 t_0의 값을 선택하고자 한다. 따라서, 이항분포표에 의해 식(2-18)을 만족하는 p_0의 값을 찾아 δ의 下限(Lower Bound) 값 δ_0을 가정하면

$$t_0=t_m\left[\frac{\ln p_0}{\ln\gamma_0}\right]^{1/\delta_0} \quad \cdots\cdots(2-19)$$

과 같이 중단시간 t_0을 결정할 수 있다.

3. 混合中途中斷에 의한 二段階檢定

3. 1 檢定의 基準 및 檢査特性曲線

n개의 아이템에 대한 수명시험에서 시험시간 t_1

$t_2<t_3$를 미리 정하고, 고장갯수 r_1, r_2를 고정시킨다. 1단계에서 $T_{r1,n}\geq t_1$이면 H_0을 기각하고, $T_{r1,n}>t_2$이면 H_0을 채택하고, 시험을 끝내되 $t_1\leq T_{r1,n}<t_2$이면 r_2개의 표본 아이템을 더 관찰하여 2단계에서 통계적결정을 한다. 2단계에서는 $r_3=r_1+r_2$라 두어

$T_{r3,n}<t_3$이면 H_0을 기각하고, $T_{r3,n}\geq t_3$이면 H_0을 채택한다. 제안되어진 혼합중도중단에 의한 이단계검정에서 검사특성곡선을 도출하기 위해 우선 다음의 확률들을 구한다.

$P_{1i}^* = P_r((0,\ t_1]$에서 아이템 고장)

$$= 1-\gamma_i^{(t_1/t_m)^\delta},\ i=0,\ 1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3-1)$$

$P_{2i}^* = P_r((0,\ t_2]$에서 아이템 고장)

$$= 1-\gamma_i^{(t_2/t_m)^\delta},\ i=0,\ 1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3-2)$$

$P_{2i} = P_r((t_1,\ t_2]$에서 아이템 고장)

$$= 1-\gamma_i^{[(t_2/t_m)^\delta-(t_1/t_m)^\delta]},\ i=0,\ 1 \quad\cdots\cdots(3-3)$$

$P_{3i} = P_r((t_2,\ t_3]$에서 아이템 고장)

$$= 1-\gamma_i^{[(t_3/t_m)^\delta-(t_2/t_m)^\delta]},\ i=0,\ 1 \quad\cdots\cdots(3-4)$$

1단계에서 H_0이 채택되어 지려면 구간 $(0,\ t_2]$에서 고장이 r_1개 보다 적게 발생되어야 하므로

$$P_r(\text{1단계에서 } H_0 \text{ 채택}) = \sum_{w=0}^{r1-1} b(w;\ n,\ p_{2i}^*) \quad\cdots\cdots(3-5)$$

으로 된다. 단, $b(x;n,\ p)=\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix} p^x(1-p)^{n-x}$ 2단계에서 H_0의 채택은 $t_1\leq T_{r1,n}<t_2$이어서 r_2개의 아이템을 더 관찰하여 $T_{r3,n}\geq t_3$일 때 발생되어지므로 X, Y, Z를 $X=(0,\ t_1]$에서 고장의 수, $Y=(t_1,\ t_2]$에서 고장의 수, $Z=(t_2,\ t_3]$에서 고장의 수라고 하면 H_0의 채택확률은 X, Y, Z가 $X=0,\ 1,\ \cdots,\ r_1-1$, $Y=r_1-x,\ r_1-x+1,\cdots,\ r_1-x+(r_2-1)$, $Z=0,\ 1,\cdots,\ (r_3-1)-(x+y)$의 값을 취할 때 다음과 같이 구해진다.

P_2(2단계에서 H_0 채택)

$$=P_r(0\leq X\leq r_1-1,\ r_1-X\leq Y\leq r_3-1-X,\ 0\leq Z\leq r_3-1-X-Y)$$

$$=P_r(0\leq X\leq r_1-1)\ P_r(r_1-X\leq Y\leq r_3-1-X \mid 0\leq X\leq r_1-1)$$

$$\cdot P_r(0\leq Z\leq r_3-1-X-Y \mid 0\leq X\leq r_1-1,\ r_1-X\leq Y\leq r_3-1-X)$$

$$= \sum_{x=0}^{r1-1}\ \sum_{y=r1-x}^{r3-1-x}\ \sum_{z=0}^{r3-1-x-y} P_r(X=x)\ P_r(Y=y \mid X=x)\ P_r(Z=z \mid X=x,\ Y=y)$$

$$= \sum_{x=0}^{r1-1}\ \sum_{y=r1-x}^{r3-1-x}\ \sum_{z=0}^{r3-1-x-y} b(x;\ n,\ p_{1i}^*)\ b(y;\ n-x,\ p_{2i})\ b(z;\ n-x-y,\ p_{3i}),$$

$$i=0,\ 1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3-6)$$

따라서 2단계검정에서 검사특성곡선은 식(3-5)와 식(3-6)의 합으로 이루어진다.

3. 2 標本數와 中斷時間의 決定

혼합중도중단에 의한 이단계검정에서 H_0이 채택될 확률은 n, r_1, r_2, t_1, t_2, t_3의 함수로 된다. 여기서 r_1과 r_2는 Zeigler-Tietjen[1968]의 방법에 따라 규정 하기로 한다. 그들은 r_1은 0.5r보다 약간 작거나 크게, r_2는 $r_3=r_1+r_2$가 r보다 약간 크게 되어지는 선택을 하였다.(예를 들면 $r_1+r_2=1.2r$) 단, r은 일단계검정에서 결정되는 아이템의 수이

다.

본 연구에서는 이단계검정의 검사특성곡선을 넓게 퍼져있는 3개의 확률점 $p_0=1-\alpha$, $p_1=\beta$, $p_2=0.5$에서 일단계검정의 검사특성곡선과 대응시켜서 n, t_1, t_2의 값을 찾고자 한다. 먼저 최대시험시간 t_3의 값을 식(2-18), (2-19)와 같은 절차에 의해 규정한다. 즉,

$$P'=\gamma_0^{(t_3/t_m)^\delta} \cdots\cdots (3-7)$$

로 두어

$$1-\alpha=\sum_{i=0}^{r_3-1}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}(1-P')^i\,(P')^{n-i} \cdots\cdots (3-8)$$

를 만족하는 P'의 값을 이항분포표로부터 구해서 δ의 하한값 δ_0을 가정하여

$$t_3=t_m(\ln P'/\ln \gamma_0) \cdots\cdots (3-9)$$

와 같이 결정한다. 이렇게 구하여진 t_3의 값을 다음의 식(3-10)에 대입하여

$$0.5-\lambda_2=\sum_{i=0}^{r_3-1}\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}\left[1-\lambda_2^{(t_3/t_m)^{\delta_0}}\right]^i \left[\lambda_2^{(t_3/t_m)^{\delta_0}}\right]^{n-i} \cdots\cdots (3-10)$$

을 만족하는 γ_2의 값을 찾는다. 결정되어진 r_1, r_2, r_3, t_3, γ_2의 값을 검사특성곡선

$$P_i=\sum_{w=0}^{r1-1} b(w;n,p_{2i}^*)+\sum_{x=0}^{r1-1}\sum_{y=r1-x}^{r3-x-1}\sum_{z=0}^{r3-x-y-1}$$

$$\cdot\, b(x;n,p_{1i}^*)\,b(y;n-x,p_{2i})$$
$$b(z;n-x-y,p_{3i}),\ i=0,1,2 \cdots\cdots (3-11)$$

에 대입하여 컴퓨터 프로그램에 의한 格子探索(Grid Search)에 의해 n, t_1, t_2의 값을 구할 수 있다.

4. 期待故障數와 期待待期時間

4. 1 混合中途中斷에 의한 一段階檢定

4. 1. 1 期待故障數

2장에서 제안되어진 신뢰도 $R(t_m)$에 관한 가설검정에서 통계적 결정에 도달하기까지 고장나는 아이템의 수를 K라 할때 K의 기대값 E(K)는 다음과 같이 K의 분포에 근거하여 얻어진다.

중단시간 t_0이전에 아이템이 고장나는 확률은

$$p=1-\gamma^{(t_0/t_m)^\delta} \cdots\cdots (4-1)$$

이므로 K=k의 분포는 k<r일 때는

$$P_r(K=k)=b(k;n,p),\ k=0,1,\cdots,r-1 \cdots\cdots (4-2)$$

와 같이 주어진다. 식(4-2)로부터 K=r인 경우에는

$$P_r(K=r)=1-\sum_{k=0}^{r-1} b(k;n,p) \cdots\cdots (4-3)$$

으로 된다. 따라서 식(4-2)와 (4-3)으로부터 K의 기대값은

$$E(K)=\sum_{k=0}^{r-1} k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}p^k(1-p)^{n-k} + r\left[1-\sum_{k=0}^{r-1}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}p^k(1-p)^{n-r}\right] \cdots\cdots (4-4)$$

와 같이 구할 수 있다.

4. 1. 2 期待待期時間

T를 주어진 가설에서 통계적결정에 도달하기까지 기다리게 되는 시험의 대기시간이라 할때, T의 기대값 E(T)는 고장갯수 K의 분포에 근거하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(T) = \int t\ f(t)\ dt$$

$$= \int t \sum_{k=0}^{r} P_r(T=t \mid K=k)\ P_r(K=k)\ dt$$

$$= \sum_{k=0}^{r} E(T \mid K=k)\ P_r(K=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} E(T \mid K=k)\ P_r(K=k) + E(T \mid K=r)\ P_r(K=r) \quad \cdots\cdots(4-5)$$

그런데 K=k가 k r−1 일 때는 $T=t_0$이므로 식(4−5)의 첫번째 항은

$$\sum_{k=0}^{r-1} E(T \mid K=k) \cdot P_r(K=k) = t_0 \sum_{k=0}^{r-1} b(k\,;\,n,\ p) \quad \cdots\cdots(4-6)$$

와 같이 된다. K=r인 경우에는 $T=t_{r,n}$이므로

$$E(T \mid K=r)\ P_r(K=r) = E(T \mid K=r,\ T_{r,n}<t_0)\ P_r(K=r,\ T_{r,n}<t_0)$$

$$= \int_0^{t_0} t_{r,n}\ f(t_{r,n})\ dt_{r,n} \quad \cdots\cdots(4-7)$$

여기서 $f(t_{r,n})$은 Weibull분포의 r번째 순서통계량의 확률밀도함수이므로 식 (4−7)은

$$E(T \mid K=r)\ P_r(K=r)$$

$$= \int_0^b \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} \cdot t_m(-\ln\gamma)^{-1/\delta} \cdot (Z)^{1/\delta}\,[1-\exp(-z)]^{r-1}\ [\exp(-z)]^{n-r+1}\ dz \quad \cdots\cdots(4-8)$$

같이 나타낼 수 있다. 단, $b=(-\ln\gamma)(t_0/t_m)^\delta$, $z=(x/\theta)^\delta$

따라서 E(T)는 식(4−6)과 식(4−8)의 합으로 구해지게 된다.

4. 2 混合中途中斷에 의한 二段階檢定

4. 2. 1 期待故障數

신뢰도 $R(t_m)$에 관한 이단계검정에서 기대고장수 E(K)를 구하기 위해 먼저 다음과 같이 K의 분포를 도출한다. 1단계에서 H_0이 채택되는 경우는 아이템의 고장수가 r_1-1개 이하로 발생될 때이므로 K의 분포는

$$p(K=k)=b(k\,;\,n,\ p_2^*),\ k=0,\ 1,\cdots r_1-1 \quad \cdots\cdots(4-9)$$

으로 된다. 단, p_2^*는 식(3−2)에 있는 값이다. $K=r_1$일 때는 1단계에서 H_0이 기각되지만 2단계에서는 H_0이 채택되어 질수도 있는 고장 갯수이므로

$P_r(K=r_1)=P_r(K=r_1,$ 1단계에서 H_0 기각$)+P_r(K=r_1,$ 2단계에서 H_0 채택$)$

$=P_r[(0,\ t_1)$에서 최소한 r_1개 고장$]$

$+P_r[(0,\ t_1)$에서 k개 고장, $k=0,\ 1,\cdots\cdots,\ r_1-1$;

$[t_1,\ t_2)$에서 r_1-k개 고장 ; $[t_2,\ t_3)$에서 고장 없음$]$

$$=\sum_{k=r1}^{n} b(k\,;\,n,\ p_1^*) + \sum_{k=0}^{r1-1} b(k\,;\,n,\ p_1^*)\ b(r_1-k\,;\,n-k,\ p_2)(1-p_3)^{n-r1} \quad \cdots\cdots(4-10)$$

여기서, p_1^*, p_2, P_3은 각각 식(3−1), (3−3), (3−4)에 있는 값들이다. 또한 K=k의 값이 $k=r_1+1,\ r_1+2,\cdots,\ r_3-1$일 때는 2단계에서 H_0이 채택에 해당되는 값이므로 $K=r_1+j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ r_2-1$로 두면

$P_r(K=r_1+j)=P_r[(0,\ t_1)$에서 k개 고장, $k=0,\ 1,\cdots,\ r_1-1$;
$[t_1,\ t_2)$에서 m개 고장, $m=r_1-k,\ r_1-k+1,\cdots,\ r_1-k+j$
; $[t_2,\ t_3)$에서 $r+j-k-m$개 고장]

$$=\sum_{k=0}^{r1-1}\sum_{m=r1-k}^{r1-k+j} b(k\,;\,n,\ p_1^*)b(m\,;\,n-k,\ p_2)b(r_1+j-k-m\,;\,n-k-m,\ p_3) \quad\cdots\cdots(4-11)$$

와 같이 된다. $K=r_3$일 때는

$$P_r(K=r_3)=1-P_r(K<r_3) \quad\cdots\cdots(4-12)$$

임을 알수 있다. 따라서 식(4-9)~(4-12)로부터 기대고장수 E(K)는

$$E(K)=\sum_{k=0}^{r3} k\cdot P_r(K=k) \quad\cdots\cdots(4-13)$$

와 같이 주어지며, 컴퓨터 프로그램에 의해 이 값을 구할 수 있다.

4. 2. 2 期待待期時間

제안되어진 이단계검정에서 통계적결정에 이르기까지 기다리게 되는 시험시간의 기대값 E(T)는 다음과 같이 K=k가 $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ r_1-1)$, $(k=r_1)$, $(k=r_1+1,\ r_1+2,\ \cdots,\ r_3-1)$, $(k=r_3)$의 값을 취할 때 k의 분포에 근거하여 구할 수 있다. 즉,

$$E(T)=\int t\ f(t)\ dt$$

$$=\int t\sum_{k=0}^{r3} P(T=t\ \ K=k)\ P(K=k)\ dt$$

$$=\sum_{k=0}^{r3} E(T\mid K=k)\ \ P(K=k)\quad\cdots(4-14)$$

이다. 식(4-14)는

$$E(T)=\sum_{k=0}^{r1-1} E(T\mid K=k)\ P_r(K=k)+\sum_{k=r1}^{r3} E(T\mid K=k)\ P_r(K=k)$$

$$=\sum_{k=0}^{r1-1} t_2\ P_r(K=k)+\sum_{k=r1}^{r3} E(T\mid K=k)\ P(K=k)\quad\cdots\cdots(4-15)$$

와 같이 나타낼 수 있으며, 식(4-15)의 두번째 항은 $K=r_1$인 경우에는

$$E(T\mid K=r_1)\ P_r(K=r_1)=E(T\mid K=r_1,\ T_{r1,\,n}\geq t_1)\ P_r(K=r_1,\ T_{r1,\,n}\geq t_1)$$
$$+E(T\mid K=r_1,\ T_{r1,\,n}<t_1)\ P_r(K=r_1,\ T_{r1,\,n}<t_1)$$
$$=t_3\ P_r(K=r_1,\ T_{r1,\,n}\geq t_1)+\int_0^{t_1} t_{r1,\,n}\ f(t_{r1,\,n})\ dt_{r1,\,n}\quad\cdots\cdots(4-16)$$

이 되고, 식(4-16)에서 첫번째 항의 두번째 요인은 식(4-10)에 의하여

$$P_r(K=r_1,\ T_{r1,\,n}\geq t_1)=P_r(K=r_1)$$
$$-\sum_{k=r1}^{n} b(k\,;\,n,\ p_1^*)$$
$$=\sum_{k=0}^{r1-1} b(k\,;\,n,\ p_1^*)\ b(r_1-k\,;\,n-k,\ p_2)\ (1-p_3)^{n-r1}\quad\cdots\cdots(4-17)$$

과 같이 얻어진다. 만일 대기시간 T가 $T=t_3$일 때에는 K가 $K=r_1+1,\ r_1+2,\cdots,\ r_3-1$의 값을 취하게 되므로

$$\sum_{k=r1+1}^{r3-1} E(T\mid K=k)\ P_r(K=k)$$
$$=t_3\sum_{k=r1+1}^{r3-1} P_r(K=k)\quad\cdots\cdots(4-18)$$

이고 이값은 식(4-11)로부터 구할 수 있다. 또,

$K = r_3$ 일 때는

$$E(T \mid K=r_3)\ P_r(K=r_3)$$
$$= E(t_{r3,n} \mid t_1 \le T_{r1,n} < t_2,\ T_{r3,n} < t_3)\ P_r(K=r_3) \quad \cdots\cdots (4-19)$$

으로 되는데

$$f(t_{r3,n} \mid t_1 \le T_{r1,n} < t_2,\ T_{r3,n} < t_3)$$
$$= f(t_{r3,n} \mid K=r_3)$$
$$= \int_{t_1}^{c} f(t_{r1,n},\ t_{r3,n})\ dt_{r1,n} / P_r(K=r_3) \cdots (4-20)$$

으로 된다. 여기서 c는

$$c = t_{r3,n}, \quad t_{r3,n} < t_2$$
$$= t_2, \quad t_{r3,n} \ge t_2$$

이고 $f(t_{r1,n},\ t_{r3,n})$은 Weibull 분포의 r_1번째와 r_3 번째 순서통계량의 결합확률 밀도함수이다. 따라서

$$E(T_{r3,n} \mid t_1 \le T_{r1,n} < t_2,\ T_{r3,n} < t_3)\ P_r(K=r_3)$$
$$\int_{t_1}^{t_2} t_{r3,n} \int_{t_1}^{t_{r3,n}} f(t_{r1,n},\ t_{r3,n})\ dt_{r1,n}\ dt_{r3,n}$$
$$+ \int_{t_2}^{t_3} t_{r3,n} \int_{t_1}^{t_2} f(t_{r1,n},\ t_{r3,n})\ dt_{r1,n}\ dt_{r3,n} \quad \cdots\cdots (4-21)$$

이고 식(4-14)~(4-21)로부터 기대시간 E(T)는

$$E(T) = t_2 \sum_{k=0}^{r1-1} P_r(K=k)$$
$$+ \int_0^{t_1} t_{r1,n}\ f(t_{r1,n})\ dt_{r1,n}$$
$$+ t_3 \sum_{k=0}^{r1-1} b(k\,;\,n, p_1^*)\ b(r_1-k\,;\,n-k,\ p_2)\ (1-p_3)^{n-r1}$$
$$+ t_3 \sum_{k=r1+1}^{r3-1} P_r(K=k)$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} t_{r3,n} \int_{t_1}^{t_{r3,n}} f(t_{r1,n},\ t_{r3,n})\ dt_{r1,n}\ dt_{r3,n}$$
$$+ \int_{t_2}^{t_3} t_{r3,n} \int_{t_1}^{t_2} f(t_{r1,n},\ t_{r3,n})\ dt_{r1,n}\ dt_{r3,n} \quad \cdots\cdots (4-22)$$

와 같이 구할 수 있다.

4. 3 例題

제안되어진 Weibull분포에 대한 신뢰도의 가설에서 $\gamma_0=0.95$, $\gamma_1=0.90$, $t_m=1$이라 하고, $\alpha=0.05$, $\beta=0.05$라 하자. 또한 시험되어지는 아이템은 마모성이 있다고 가정하여 δ의 값을 2라고 하자(δ의 가정된 값은 E(K)와 E(T)의 값을 구할 때 사용되어진다). 아이템이 마모성을 가지므로 δ의 하한값은 $\delta_0=1$로 사용할 수 있다.

혼합중도중단에 의한 일단계검정의 경우에는 주어진 α, β에 대해 $\ln\gamma_0 / \ln\gamma_1 = 0.4868$이므로 식(2-17)의 Wilson-Hilferty 근사에 의해 $\ell^*=42.6246$의 값을 얻는다. ℓ^*의 값을 식(2-10)에 대입하면 $\nu=0.04804$로 되는데 이 값을 만족하는 표본수 n과 중도중단수 r의 값은 식(2-9) 로부터 각각 $n=45$, $r=26$으로 결정되어진다. 중단시간 t_0의 값은 식(2-18)에 의해 $p_0=0.556$을 얻게 되어 식(2-19)로부터 중단시간 $t_0=11.4$로 선택된다. 따라서 가설의 통계적 결정은 $\min(T_{26,45},\ 11.4)$에서 이루어지며, 식(4-4)에 의하여 통계적 결정에 이르기까지 시험에 소요되는 기대고장갯수는 $E(K)=25.9$의 값을 구할 수 있다. 또한 식(4-6)과 (4-8)로부터 기대시간 $E(T)=4.1$로 주어진다.

이단계검정의 경우에는 Zeigler-Tietjen[1968]이 제안한 방법에 따라 $r_1=0.4r$, $r_3=r_1+r_2=1.2r$로 두면 $r_1=10$, $r_2=21$로 결정할 수 있고, 식(3-9)와 식(3-10)을 사용하여 $t_3=15.8$, $\gamma_2=0.9314$를 얻을

수 있다. 이 값들을 식(3-11)의 검사특성곡선에 대입하여 컴퓨터 프로그램에 의한 격자탐색으로부터 $n=43$, $t_1=2.6$, $t_2=8.6$의 값을 구할 수 있다. 또한 식(4-13)과 (4-22)로부터 기대고장갯수와 기대시간의 값은 $E(K)=14.1$, $E(T)=3.3$으로 주어지게 되어 일단계검정의 경우 보다 좋은 결과를 얻게 된다. 위의 내용을 〈표 4-1〉과 같이 요약할 수 있으며, 만일 $\alpha=0.05$, $\beta=0.1$이면 같은 방법에 의해 〈표 4-2〉와 같은 결과를 얻을 수 있다.

[표 4-1] $\gamma_0=0.95$, $\gamma_1=0.90$, $\alpha=0.05$, $\beta=0.05$, $t_m=1$, $\delta=2$, $Z_0=1$

	표본수	중도중단수	중단시간	기대값
1단계검정	$n=45$	$r=26$	$t_0=11.4$	$E(K)=25.9$ $E(T)=4.1$
2단계검정	$n=43$	$r_1=10$ $r_3=31$	$t_1=2.6$ $t_2=8.6$	$E(K)=14.1$
			$t_3=15.8$	$E(T)=3.3$

[표 4-2] $\gamma_0=0.95$, $\gamma_1=0.90$, $\alpha=0.05$, $\beta=0.1$, $t_m=1$, $\delta=2$, $Z_0=1$

	표본수	중도중단수	중단시간	기대값
1단계검정	$n=40$	$r=19$	$t_0=7.9$	$E(K)=18.7$ $E(T)=3.5$
2단계검정	$n=38$	$r_1=8$ $r_3=23$	$t_1=2.2$ $t_2=7.2$	$E(K)=13.3$
			$t_3=10.8$	$E(T)=3.0$

5. 結　論

본 연구에서는 아이템의 수명모형이 Weibull분포일 때 이 분포의 신뢰도에 관한 가설에 혼합중도중단에 의한 일단계검정과 이단계검정절차를 적용하여 통계적 결정을 내리는 방법을 제안하고, 각각의 방법에 대해 생산자 위험과 소비자 위험을 동시에 만족시키는 표본수와 중도중단 수를 구하는 문제를 다루었다. 또한 통계적 결정에 이르기까지 시험에 소요되는 아이템의 기대고장수와 기대대기시간의 식을 일단계검정과 이단계검정의 각각의 경우에 대하여 도출하였다.

혼합중도중단에 의한 일단계검정과 이단계검정은 기존의 제1종 중도중단이나 제2종 중도중단을 사용한 검정보다 시험시간과 경비를 절감하게 되며, 또한 혼합중도중단에 의한 이단계검정은 일단계검정보다 시간과 경비를 더 절약할 수 있음을 수치 예제를 통해 알 수 있다.

시험자는 본 연구에서 제안한 혼합중도중단에 의한 일단계검정이나 이단계검정절차를 적용하여 주어진 α, β, γ_0, γ_1에 대하여 적절한 표본수, 중도중단수와 중단시간을 결정할 수 있으며, 시험시간이 길어지는 것과 아이템의 고장수가 많아지는 것을 제한할 수 있는 결과를 얻을 수 있다.

參考文獻

1. Bain, L. J. (1972). "Inferences Based on Censored Sampling from the Weibull or Extreme Value Distribution", Technometrics, 14, 693-720.
2. Bain, L. J. (1978), Statistical Analysis of Reliability and Life Testing Model, Marcel Dekker, New York.
3. Bulgren, W. G. and Hewett, J. E. (1973), "Double S.sample Tests for Hypotheses about the Mean of an Exponential Distribution", Technometrics, 15, 187-190.
4. Engelhardt, M. (1975), "On Simple Estimation of the Parameters of the Weibull or Extreme Value Distribution", Technometrics, 17, 369-74.
5. Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1973), "Some Complete and Censored Sampling Results for the Weibull or Extreme Value Distribution", Technometrics, 15, 541-549.
6. Engelhardt, M, and Bain, L. J. (1974), "Some Results on Point Estimation for the Two Parameter Weibull or Extreme Value Distribution". Technometrics, 16, 49-56.
7. Engelhardt, M. and Bain. L. J. (1977), "Simplified Procedures for the Weibull or Extreme Value Distribution", Technometrics, 19. 323-331.
8. Epstein, B. (1954), "Truncated Life Tests in the Exponential Case", Ann. Math. Statist., 25, 555-564.
9. Fairbanks, K. (1988), "A Two Stage Life Test for the Exponential Parameter", Technometrics, 30, 175-180.
10. Hewett, J. E. and Spurrier, J. D. (1983), "A Survey of Two Stage Tests of Hypotheses : Theory and Application", Cmmunications in Statistics, Theory and Methods, 12, 2307-2425.
11. Lawless, J. F. (1982), Statistical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley & Sons, New York.
12. Mann, N. R., Schafer, R. E. and Singpurwalla, N. D. (1974), Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, John WIley and Sons, New York.
13. Matz, H. F. and Waller, R. A. (1982), Bayesian Reliability Analysis, John Wiley & Sons, New York.
14. Sinha, S. K. and Kale, B. KL. (1979), Life Testing and Reliability Estimation, John Wiley & Sons, New York.
15. Wilson, E. B. and Hilferty, M. M. (1931), "The Distribution of Chi-Square". Proceedings of the National Academy of Science, 17, 684-688.
16. Zeigler, R. and Tietjen, G. (1968), "Double Sample Plan Where the Acceptance Criterion is the Variance", Technometrics, 10, 99-106.