Comm. Korean Math. Soc. 7 (1992), No. 2, pp. 375–388

수학교육과정에서 지도계열의 구성문제

신 현 성

1. 서론

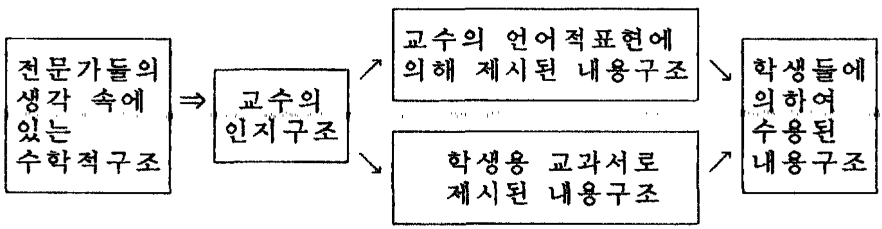
수학을 구조화해서 지도하는 일은 수학교육의 현대화 운동이후에 가장 관심이 집중된 연구분야였다. 여기서 구조화란 수학적인 개념이나 원리 법칙들의 모임과 그들의 관계를 논리적으로 연결한 것을 말하며 구조화를 통해 학생들은 과제를 깊게 이해하게 되고 보다 심화된 학습과제나 문제해결로 전이를 쉽게 하게 된다는 것이다(Shavelson, 1974). 이러한 관점이 가치 있는 이론적 배경임에도 불구하고 일부의 연구에서는 부정적인 결과를 보여 주었다. 프로이덴탈(Freudenthal. 1984)의 비판을 들어보면 "수학교육의 현대화 운동 기간에 일어났던 수학의 구조화는 학생들의 학습페턴을 고려하기 보다는 수학자들의 이론적인 관점이 주가되었다"는 것이다. 이러한 그의 비판은 수학자들에 의하여 만들어진 구조화가 의미없다는 것이 아니고 이것을 교재화(교과서, 교육자료)하는 과정에서 학생들의 학습페턴을 고려하지 않았다는 견해이다. 우리나라의 중등학교의 교육과정도 이러한 비판의 범주을 벋어나지 못하게 되었다. 따라서, 본 고에서는 학생들의 학습페턴에 기초를 둔 내용 구조화와 이를 바탕으로 한 내용의 지도계열(instr uctional hierarchy)을 구성하는 문제를 연구한다.

2. 이론적 배경

대부분의 수학자들은 수학을 구조를 연구하는 학문으로 본다. 수학내용은 구조화 되어야 하고 수학을 한다는 것은 구조를 조작하고 창조하는 일이 다는 것이다. 이러한 구조는 전문가들의 창조적인 작업과정을 거쳐 만들어 지게 되는데(예를 들면,

Received January 30, 1992. Revised March 14, 1992.

Bourbaki 의 대수구조, 순서구조, 위상구조)이를 수학적구조[1] (mathematical structure)라 부른다(Bourbaki, 1971). 교수는 이러한 수학적 구조를 자신의 인지구조에 알맞게 도입하여 교과서나 적당한 표현수단을 동원하여 학생들에게 전달하게 되는데, 이와 같이 수정이 된 구조를 내용구조(content structure)라고 한다. 이 과정을 도표로 나타내면 그림과 같다.



교수-학습의 현장에서 중요시 되는 구조가 내용구조 인데 이것을 조직하기 위해서는 학생들의 이해 과정에서 일어나는 여러사고의 패턴을 알고 내용구조를 구성해야 한다는 것이다. 그런데, 잘 조직된 내용구조를 구성하고 표현하는 구체적 연구방법은 제시되지 않고 있으며 다만 피아제가 어린아동들의 사고 패턴을 "삼각형의 세 내각의 합은 180° 이다" 라는 과제의 실험을 통해 포괄적으로 제시한바 있다(Resnick, 1981). 그러나, 그가 관찰한 아동의 사고패턴은 너무일반적인 수준이어서 고등학교에서 단원의 내용구조를 구체화 하는데는 그가 사용한 실험방법외에 도움이 되지 못한다. 한편 이해(understanding)는 수학과의 교육과정 연구에서 핵심이 되는 연구과제가 되었다. Skemp(1971)는 "어떤 과제를 이해한다는 것은 그것을 자기가 가지고 있는 적절한 스키머(schema)에 동화시키는 일"로 이해를 정의하면서 이해를 관계적이해와 도구적이해로 나누어 생각했다. 그가 제시한 적절한 스키머에 동화하는 과정을 어떻게 측정할 것인가는 지금까지도 많은 연구자들이 고민하고 있는 주제이다. 최근에 이러한 문제점에 대하여 Ginsburg(1990)

[1]여기서 말하는 수학적 구조는 Bourbaki의 수학의 3가지 기본구조를 말했을 뿐 정의는 아니다. Wade(1972)는 집합 $S(\neq \phi)$에 연산 0가 주어졌을때 이를 수학적 조직이라 했고 수학적 구조는 연산에 성질이 부여된 수학적 조직을 의미하는 것으로 했다. 어쨋든 서론에서 일반적인 용어로 제시한 "구조"와 별개의 것은 아니다.

는 Vygotsky의 견해를 수용하면서 이해를 센스를 만드는 과정(sence-making procedures)으로서 다음을 포함해야 한다고 말하고 있다.

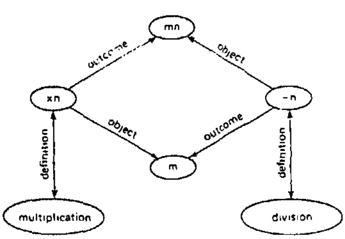
· 비형식적인 지식, 형식적인 지식, 또는 이들 두 요인간의 관계

· 전이를 위한 규칙, 일반화, 수학적 지식의 응용

· 잠재능력 및 신념체계

그의 시각은 이해를 넓은 심리학적인 관점에서 볼려고 노력했지만 중요한점은 수학의 어떤 과제를 놓고 볼때 간단한 질문(또는 테스트)에 대한 답을 보고 이해를 "했다" "안했다"라고 말 할 수 없으며 단순하고 기계적인 질문에서 사고력(일반화, 심화된 관계파악, 활동적 학습상태 등등)이 있는 질문을 여러형태로 제시해야 한다는 것이다. 이러한 Ginsburg 관점은 본 연구에서 이해의 수준을 정할때 직접 응용이 된다.

지금까지 진술된 이해는 구조와 밀접 한 관련이 있다. 수학자가 수학적구조를 창조할때 그의 사고는 과제에 대한 충분한 이해바탕에서 나온것이고, 수학교육에서 관심이 되는 내용구조는 학습자들의 이해수준을 고려한 교과서 저자(또는 교사)들의 구조화 작업인 것이다. 프로이덴탈의 지적도 학습자들의 이해수준을 배제한 수학구조를 직접전달한다는 것은 무리가 된다는 것이다. 그러면, 내용구조를 표현할 방법은 없을까? 하는 문제가 제기되었다. 정보처리 과정에서는 인간의 지식구조를 단위(unit)와 단위가 가지는 성질들은 위계화한 모델로 제시했다(Collins, 1972). 오른쪽 그림은 Greeno(1978)가 곱셈과 나눗셈에 대한 내용구조를 나타낸 것이다. 가네의 위계분석 방법과는 틀림을 알수 있다. 여기서 만일 곱셈과 나눗셈을 별개로 분리해서 나타냈다면 두요소의 역관계를 이해못한 것으로 생각했다.



3. 연구의 목적

서론에서 간단하게 기술한 연구방향을 구체화 할 수 있는 몇가지 목적으로 세분해 보면, 첫째는 학생들의 이해를 측정할 수 있는 도구로서 오류패턴, 사용된 전략 및 이해수준별 성취도를 조사하고, 둘째는 이결과를 바탕으로 교과서에 제시된 내

용구조를 수정하여 잘 조직된 내용구조로 제시하고, 세째는 수정된 내용구조를 가지고 수학내용의 지도계열을 구성하는데 있다.

4. 연구방법

본 연구는 테스트 문항을 만들고 인터뷰 방법과 필답고사 방법을 사용하여 학생들의 개념이해에서 생기는 오류, 성취도 및 사고방법을 조사하는 연구였다. KNU 팀은 현제교과서에 제시된 내용구조를 분석하고 이것을 배운 학생들을 표본으로 하여 성취도, 오류분석 및 사용된 사고전략을 면담기법을 통해 조사했다. 이러한 조사자료는 잘조직된 내용구조를 만드는데 이용되었으며 최종작업은 수학내용의 지도계열을 구성하는 일이었다. 자세한 연구방법은 다음과 같다.

표본

연구에 이용된 수학내용은 현재 고등학교 수학II에 있는 미적분의 내용중에서 기본개념이 되는 극한, 도함수 및 적분 이었으며 개념위주의 연구이기 때문에 문제해결을 최소화 했다. 연구의 골격은 개념의 이해수준을 면접이나 테스트를 통해 측정하는 내용이 주가 되므로 표본선정에 주의를 했다. 우선 표본을 A 집단, B 집단 및 C 집단으로 나누었으며 A 집단의 성격은 대학에서 수학 또는 사범계 수학을 전공하는 30명의 학생으로 구성되었으며 고등학교에서 배운 3가지 개념에 관련된 지식이 전이된 상태를 관찰하기 위한 집단이었다. B 집단 과 C 집단은 고등학교에서 표집이 되었는데 B 집단은 비평균화 지역에서 선발된 60명의 학생으로 구성된 매우 우수한 집단이었으며 C 집단은 평균화 지역에서 표집된 학력수준이 보통인 60명의 학생으로 구성이 되었다. 능력수준이 다른 집단을 선정한 이유는 학생들의 개념이해에서 보이는 오류와 전략이 일관성이 있는가를 관찰하기 위한 것이었다.

테스트 구성

테스트는 극한, 도함수, 부정적분 및 정적분에서 학생들의 개념이해 과정을 크게 비형식적 지식과 형식적 지식으로 나누어 조사함으로서 그들이 사용한 사고의 전략, 오류페턴 및 성취도를 잴수 있도록 구성되었다. 따라서, 테스트의 문항형식은 인터뷰와 필기검사를 할 수 있도록 구성되었고 각 개념은 5단계 이해수준을 측정할

수 있도록 비형식적인 수준의 문항으로 부터 형식적 수준의 문항까지 짜여졌다. 총 70개의 문항으로 구성되었기 때문에 본고에서는 모두 소개할 수 없고 다음장에서 진술하게 되는 이해수준에서 핵심문항을 소개하였다.

지도내용의 계열문제

수학의 지도내용은 수학에 논리적 구성에 의해 계열화가 이루어진다. 예를들면, 미분다음에 적분이 온다든지 미분에서도 미분계수 다음에 도함수가 온다든지 하는 것 등이다. 이러한 내용구조의 위계는 중 고등학교의 교육과정의 내용구성에서 가장 고려되는 요인이 된다. 그러나, 수학내용 중에는 이러한 논리적인 구성방법에 영향을 별로 받지 않고 교사의 경험과 학교가 정하는 교수세목(syllabus)에 의해 계열화 된다든지, 또 논리적인 구성에 의해 주토픽(major topic)이 결정되었다해도 소토픽이 결정되어야 하는 경우가 많다. 이러한 때는 학생들의 개념이해 과정을 적절한 테스트를 통해 파악해 봄으로써 수학적인 논리적 구성방법의 약점을 메꿀수 있다. 문제는 이러한 요구에 알맞게 문항을 만들고 인터뷰하는 방법을 개발하는 일이 최근의 연구과제가 되었으며 본 연구도 이 범주에 속한다. 연구에 사용된 테스트의 문항은 필답형(written form)과 구두질문형(oral question form)으로 나누어 졌고 이들은 다음의 조건에 알맞게 구성되었다.

(1) 테스트는 비형식적인 지식을 묻는 쉬운문항부터 형식적인 지식을 묻는 어려운 문항까지 각 개념에 대한 문항군(items group)으로 구성된다.

(2) 각 문항군에서 문항들사이에는 수학적인 밀착(coherence)이 성립되어야 한다.

(3) 각 문항은 현재 주어진 내용구조 속에 있는 수학내용을 가지고 이해 수준에 알맞게 형태(form)을 결정한다.

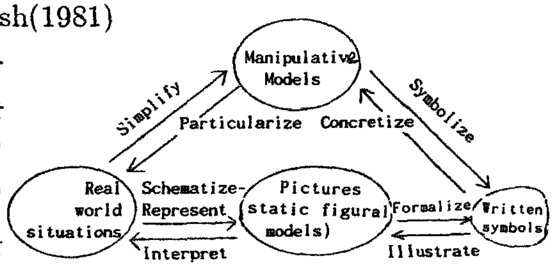
따라서, 학생들의 이해과정과 이해수준은 연구에서 사용한 테스트의 결과를 통해 결정되고, 이 자료가 기존의 내용구조를 수정한다거나 지도내용의 계열구성에 사용되었다.

5. 내용구조와 이해수준의 결정

여기에서는 현행교육과정에 있는 내용구조를 정보처리모형에서 제시한 방법으로 모델화 해 보고 테스트 구성에 필요한 이해수준을 결정해 본다.

내용구조

이론적 배경에서 제시된 구조와 그 표현방법을 이용하여 현재 교육과정에 있는 미적분에서 극한, 도함수 및 적분의 개념에 대한 내용구조를 각각 모델화 했으나 여기서는 지면관계상 극한은 도함수의 내용구조(표 - 1)에 핵심구조를 포함시키고 적분(부정적분, 정적분)은 생략하고 도함수의 내용구조만 제시한다. 이 모델은 수학적인 토픽들이 서로 어떻게 관계를 맺고 있는가를 나타내고 있는데, 두가지의 관계, 즉, 대상관계(object relation)와 산출관계(outcome relation)로 이루어 졌다. 또, 전시학습인 경우는 실선으로 연결이 되며 중요한 점은 동그라미속에 들어가는 토픽중에서 수학의 과정토픽이 구조에서 핵심역할을 하게된다. 그런데, 내용구조를 학생들이 교과서(교수포함)를 통해서 이해하게 되는 교수-학습에서는 번역과정(translation process)이 들어가게 되기 때문에 위의 구조모델은 표현모드를 포함해야 마땅하다. 오른쪽 도표는 Lesh(1981)가 제시한 표현모드이다. 여기서는 가설적인 구조모델에 이들을 나타내지는 않고 연구의 결론 부분에서 수정된 내용구조에 학생들의 이해과정에서 의미있게 발견된 표현모드를 첨가하기로 한다.



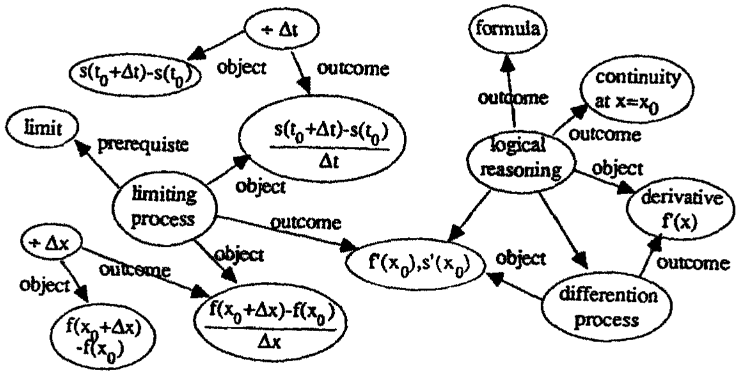


표 1

잘조직된 내용구조

프로이덴탈이나 하우손(Howson, 1986)등이 지적한 것처럼 수학적인 구조를 내용구조로 바꾸는 과정에서 학습자들의 학습페턴(이해구조)을 고려하는 일은 중요한 연구과제가 된다. 그러면, 잘 조직된 내용구조는 어떤 조건을 가진 것인가? 또는, 잘 조직된 내용구조를 만들기 위하여 어떤 연구절차가 필요한가? 하는 것이 연구의 관심이 된다.

Greeno(1978)는 수학적 구조가 학생들의 이해과정에서 다음 몇 가지 조건을 갖추었을때 잘 조직된 인지구조로 된다고 했다.

· 인지구조 속에 지식은 수학적으로 명확해야 된다.

· 인지구조속에 있는 수학적인 개념, 기능 및 과정은 강한 밀착을 가져야 한다.

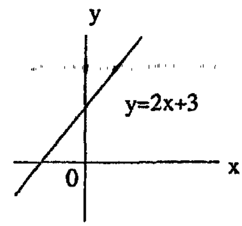
· 두 조건을 만족한 구조는 새로운 수학적 장면(new situation)에 응용이 되어 다른지식으로 전이가 되어야 한다.

3가지 조건은 포괄적인 진술이기때문에 수학에서는 학습자가 어떻게 조건들을 만족하는지를 알아보는 연구방법등이 개발되어야 한다(아직 미개발 상태임). 한편 위의 3가지 수학내용 및 수학적인 능력을 주로 진술하고 있지만 Lesh(1981)등이 제시한 표현모드(representation mode)는 내용구조를 구체화 하는데 보조조건이 된다. 문제는 어떤 방법으로 학습자에 인지구조를 바르게 파악하여 내용구조를 만들 것인가이다. 이 분야에 대해 일부 연구한 결과 (Shavelson, 1974)도 있으나 본 연구에 알맞은 내용도 아니기 때문에 몇 가지 연구방법을 동원해서 이 문제를 풀기로 했다. 하나는 학생들의 이해측정을 통해 이해수준을 관찰하는 일이고 다른 하나는 측정과정에서 발생하는 사고의 전략과 오류를 조사함으로써 위에서 제시한 3가지 구조조건을 만족하고 있는가를 관찰하는 일이었다.

특히, 오류와 전략은 학생들이 이해하는데 어떤 사고 방법을 쓰는지 또는 이해의 약점이 어떤 것인지 파악하는데 도움이 되는 자료가 된다. 다시는 말하면, 수학적인 개념, 기능 및 과정의 밀착성, 수학적인 전이 정도를 파악하는데 정보를 제공해 준다. 결국, 3가지 연구방법을 구체화 하기 위해서는 테스트문항의 구성이 필요하고 기본준거로서 이해수준을 결정하는 일이 본 연구의 핵심이 되었다.

이해의 수준

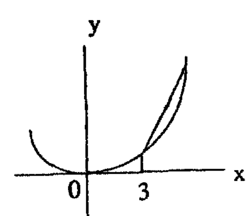
수학적인 과제(예를들면, 도함수)를 이해하는 정도를 5개 수준으로 나누어 진술했다. 각 수준에는 그 수준에 도달하기 위한 수학적 활동이 기술되었고, 이것은 학교에서 교수-학습활동으로 연결이 될 수 있으나 여기에서는 이러한 수학적인 활동을 측정할 수 있는 문항구성의 기준이 된다 (Hart, 1981). **수준1** : 측정하려는 과제의 전시 학습의 획득여부를 확인하는 단계이다. 따라서, 수학내용이 단순하고 비형식적인 상황으로 제시되며 학생들이 사용하는 사고전략도 세기(counting)와 같이 단순하다. 일반화된 문제상황은 제외된다. 오른쪽 그래프에서 x 값이 a 에서 b 까지 변하면 y 값은 어떻게 변하는가? 이때 y 변화량/x 변화량은 얼마인가? 또한 함수 $f(x) = x^2$ 의 그래프에서 $\frac{(3+0.2)^2-9)}{0.2}$ 의 뜻을 설명하여라.



수준2 : 이 수준에서 제시되는 과제도 전시학습이 된다. 그러나, 문제상황의 구조가 좀더 복잡하고 학생들이 사용하는 사고전략도 단순치 않다. 표현모드는 비형식과 형식을 혼합하며 기호를 덜 쓰면서 일반화되는 과정을 묻는 문제상황이 제기된다. 표를 보고 $h \to 0$ 일때 $\frac{(3+h)^2-9}{h}$ 의 접근값을 구한 과정을 설명하라.

h	$f(h)=\frac{(3+h)^2-9}{h}$	h	$f(h)=\frac{(3+h)^2-9}{h}$
1	1.75	-1	5
0.5	6.5	-0.5	5.5
0.1	6.1	-0.1	5.9
0.01	6.01	-0.01	5.99
0.001	6.001	-0.001	5.999
0.00001	6.00001	-0.00001	5.99999

수준3 : 이 수준에서 제시되는 수학내용은 선수학습이 아니다. 학생들은 개념을 비형식적인 모드를 사용하여 설명해야 한다. 수학적인 과정지식이 필요하며 일반화된 문제상황을 해결할 수 있어야한다. 그러나 형식적인 표현 방법을 크게 강조하지 않으나 수준은 2보다 훨씬 발달된 사고전략을 가진다. 함수 $f(x) = x^2$ 의 그래프를 그리고 이 그래프에서 $f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$ 의 뜻을 h 값을 적당히 잡아가면서 수열을 만들고, 이 수열이 의미하는 것을 기하학적으로 설명하여라.



수준4 : 학생들은 수학적인 기호나 식(형식적 표현모드)을 이용하여 개념을 정의할 수 있어야 하며 이정의를 문제상황에서 명료하게 설명할 수 있어야 한다. 제시되는 수학적인 소재는 추상화된 기호등을 이용하게 되고 사용되는 사고전략은 형식성을 띄게 된다. 함수 $f(x)$가 주어졌을때 $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 를 설명해 보고 이함수의 정의역과 치역이 주어진 함수 $f(x)$와 다른지 말하여라. 또 이 정의를 이용하여 $\frac{d}{dx}(\sin x)$ 를 구하여라.

수준5 : 이 수준은 수준4를 새로운 수학의 문제상황에 전이시킬수 있어야 한다. 따라서, 개념과 개념사이의 강한 밀착성을 제시할 줄 알아야한다. 전이되는 새로운 문제상황은 복합구조를 가지고 있으며 때로는 반례의 경우도 포함한다. 함수 $f(x) = |x|$의 도함수 $f'(x)$는 $x = 0$에서 존재하는가? 이결과를 이용하여 다음 명제의 참, 거짓을 말하여라. (A)함수 $f(x)$가 x_0에서 연속이면, 그 지점에서 도함수가 존재한다. (B)함수 $f(x)$가 x_0에서 도함수가 존재하면, $f(x)$는 그 점에서 연속이다.

위에서는 각 수준별로 문제를 한개씩만 제시했으나 본 연구에서는 다양한 소재로 여러 문제를 앞에서 진술한 내용구조에 기초하여 구성하였다. 주의할 점은 교과서에 있는 문제 뿐 아니라 연구자가 독특하게 만든 문항들도 사용했다.

6. 결과분석

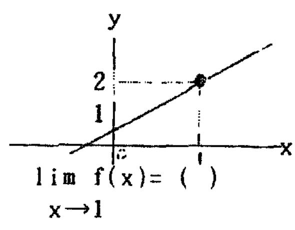
고등학교의 미적분의 영역이 방대하기 때문에 극한의 개념, 도함수의 개념 및 적분의 개념을 선택하여 인터뷰와 주관식 테스트를 실시하였다. 결과로써 학생들의 이해수준별, 성취도, 오류의 종류 및 사고전략을 조사했다. 그러나, 여기서는 3가지 조사에서 얻어진 중요한 분석만을 제시하고 이들자료를 바탕으로 수정된 내용구조와 내용의 지도계열을 구성해 본다.

(1) 사고전략과 오류형태

여기에서는 학생들이 사용한 사고과정과 방법에서 어떤오류가 발생했는지를 살펴본다. 물론, 오류는 일부학생이 발생시킨 것 보다 많은 학생들이 보여준 것이 내용구조를 수정하는데 의미있는 자료가 된다. 특히, 표본집단중 우수집단(A, B집단)에서 보여준 오류는 보다 심각하게 받아 주어야 한다. 다음에서는 본 연구에서 발견된 매우 중요한 결과만 기술해 본다.

극한의 개념

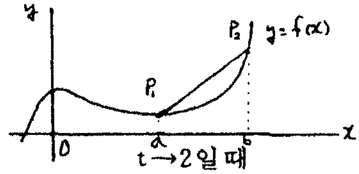
표본 B와 C에서 수열의 극한에 대한 의미있는 오류가 발생했는데 수열 $\{(-1)^n\}$, $\{3,2,1,000\cdots\}$에서 전자에 극한이 존재하고 극한값은 $1, -1$이라고 대답했고(오류 5%), 후자에는 $\infty, 1, -1$과 같이 대답한 우수학생의 수가 많았다(오류 21%). 이것과 비슷한 다른 문제들에 대하여도 위의 결과와 비슷한 현상을 보였다. 이렇게 틀린 학생들은 함수의 극한에서도 $\lim_{x\to a} f(x) = b$의 의미를 파악하지 못했다. 예를 들면, $x_n \to 2$을 만들고 이에 대응하는 $f(x_n) \to 5$(단, $f(x) = 2x+1$)을 만들도록 유도 했는데 생소하게만 생각했다. 즉, 수열의 극한과정을 함수의 극한 과정에 연결시키지 못하는 점이 관찰되었고 이는 현재의 내용구조의 취약점을 말하는 것이 기도 하다. 동일표본에서 많은 학생들이 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$와 같이 $x = a$를 함수에 대입함으로써 극한값을 구하는 경향이 강했다. 오른쪽과 같은 질문에서 표본 B에서 온 많은 학생들이 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이 아니므로 극한은 존재하지 않은다고 대답했다. 결론적으로 현행교과서나 학교의 지도가 학생들의 "approximating process"를 강조하고 있지 않는다는 것을 의미한다. 이러한 과정은 $\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$와 같이 형식과정(formal limit process)이 도입되기 전에 강조되어져야 한다. 우극한(좌극한)에 관한 6개의 문항에서도 똑같은 양상을 보였다.



도함수의 개념

표본 B, C에서 온 학생들은 변화율과 직선의 기울기와 관계를 맺지못했으며 다음과 같이 물리적현상에서 증분과 변화율을 이해하지 못했다 (A집단 20%, B집단 40%). 따라서, 미분계수(derivative at a point)의 표에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 뜻을 명확히 잡지못하거나 오른쪽 그래프에서 p_1, p_2의 기울기와 관련시키지 못했다(B집

단 37%). 따라서, 표본 B, C의 많은 학생들이 $\frac{(3+0.2)^2-9}{0.2}$ 와 $\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}$ 와 같은 두식의 차이을 구분하지 못했다. 특히한점은 극한값을 교과서의 계산법에 의해 구했으나 계산과정의 뜻을 기하학적으로 설명하지 못했으며 단순히 평균변화율이라했다. $f'(2) = f'(x)$ 은 참이다고 말하는 학생이 많았고 재미있는 것은 $f(x) = x^2$ 의 도함수를 옳게 대답한 학생이 이 함수의 그래프를 주고 도함수를 그려라 했을때 정의역과 치역은 물론 그래프로 바르게 그리지 못했다(A 집단 45%, B 집단 58%)

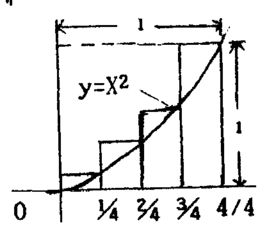


평균변 화율은?

t초	S=4.9t²	△S
1.999	19.5804049	-
2	19.6	0.019595
2.001	19.6196049	0.0196049

적분의 개념

몇 가지의 개념에서 표본 A, B, C의 학생들은 의미있는 오류를 범했다. 첫번째는 분할 $[a, b]$ 과 기둥의 높이 $f(x_i)$ 를 못구해 상합(upper sum)을 구하지 못했고, 둘째는 면적의 근사값 $\sum f(x_i)\Delta x_i$ 과 $\lim_{\Delta x\to 0}\sum(f_i{}^*)\Delta x_i$ 을 연결을 시키지 못하고 두 과정을 이용하여 $\int_1^2 x\,dx$ 를 구하지도 못했다(오류 70% 이상), 또, 분할된 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 에서 $x_i{}^*$ 를 임의로 잡을수 있는가에 대하여도 대부분 알지 못했다. 결론적으로 면적의 근사값 구하는 과정과 극한 값을 구하는 과정사이에 연결이 이루어지고 있지 않다. 따라서, 현교과서의 적분개념에 구분구적법으로 부터 정적분의 정의까지에 대한 내용구조는 약간의 수정을 거쳐야 한다.



(2) 이해수준의 성취도

그림-2은 3가지 개념에서 각 이해수준에 대한 표본집단 B, C의 성취도를 범위로 나타낸것이다. 분석을 위해서 모든 문항을 각 개념별로 모아 문제군을 만들고 각 문제군은 다시 5단계 이해수준에 알맞게 KNU 팀이 문항 조정을 하였다.

문항들은 개념이해를 묻는 것들이 었는데 표본집단의 능력에 비해 이는 현재 교과서의 내용구조나 학교의 개념지도가 취약함을 말해주고 있다고 볼수 있다. 그림에서 볼때 성취도 경향은 이해수준이 높을 수록 낮아지는데 어떤 수준에서는 그 반대의 현상을 보인경우가 있다. 이는 전략과 오류의 분석에서 보여준 학생들의 오류가 그원인이 된다. 예를들면, 수열의 극한, $x_n \to a$ 일때 $f(x_n) \to b$의 이해, 불연속 지점의 극한존재여부, 물리적인 현상에서 평균 변화율과 속도개념의 혼동, $(3+0.2)^2-9/0.2$의 뜻을 그래프에서 설명하고 $\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 과 구분하기, $f(x)=x^2$ 의 도함수 그래프 그리기, 정적분에서 근사면적 구하기, 정적분의 정의에 따른 값계산 등 등이다.

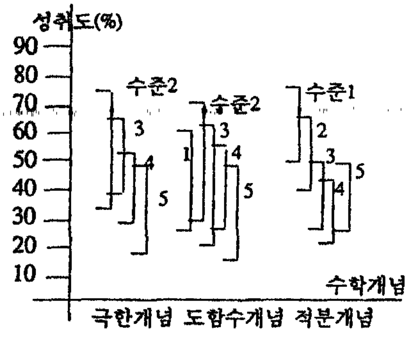


그림 2

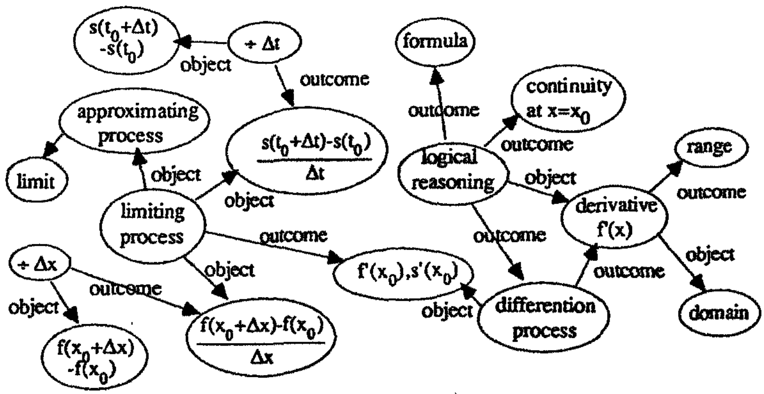


표 3

(3) 수정된 내용구조와 지도계열의 구성문제

지금까지 조사한 자료(오류분석, 사용된 전략, 이해수준 성취도)를 보면 학생들의 인지구조가 교과서에 제시된 내용구조와 일치하지 않음을 알수 있기 때문에 내용구조를 수정하게 된다. 지면관계상 3가지 개념에 대한 수정된 내용구조를 모두 담을 수 없으므로 도함수의 개념에 대한 내용구조를 수정하면 표 -3과 같다. 이표에

서 굵은원으로 둘러쌓인 단위가 새로더해지는 것이며 각단위에서 지식의 표현 방법으로 RF(표현모드), TF(변환모드)등이 첨가되었다.

다음과제는 이렇게 수정된 내용규조를 이용하여 내용의 지도계열을 구성하는 문제였다. 연구방법에서도 진술한바와 같이 수학적인 위계방법과 학습자의 학습패턴을 종합한 것이 지도계열 문제였는데 도함수의 개념 영역에서 이러한 지도계열을 구성해 보면 다음과 같다.

수학적 또는 물리적 상황에서 양의증감 $(\triangle x, \triangle y, \triangle s)$ → 직선의 기울기와 그래프에서 평균변화율 $\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$ → 수치해석적인 근사과정 (approximation procdure) approx $\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$ →

기하학적인 방법의 근사과정 approx. $\dfrac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}$ → 미분계수 계산법 → 도함수 및 미분과정 (정의역, 치역, 공변역) →

물리적인 문제 상황에서 변화율 $\dfrac{s(t_0+\triangle x)-s(t_0)}{\triangle t}$ → 수치해석적 및 기하적인 근사과정 appr. $\dfrac{s(t_0+\triangle t)-s(t)}{\triangle t}$ → 물리적상황에서의 도함수 → 미분법칙

$(s(t)$: 거리함수$)$

6. 결론 및 토론

이 연구는 교과서 저자(또는 교사)들이 제시한 내용구조를 학습자의 학습패턴(또는 이해구조, 인지구조라고 했음)에 알맞게 수정하여 지도계열의 구성문제를 논의해 본 것으로서 연구방법으로 오류분석, 사용된 사고 전략 및 성취도의 분석을 이용하였다. 이 연구의 진행도중에 관찰된 흥미있는 사실은 우리나라의 고등학생들은 교과서에 제시된 수학내용의 형식적 표현 방법에 익숙치 않고 있음을 알수 있었다. 즉, 학생들 나름대로 비형식적인 과정(informal procedures)을 만들어서 교과서의 형식적인 표현을 이해하려 했다는 점이다. 지금까지는 고등학교에서 비형식적 과정으로서의 수학적인 활동을 억제한 점을 생각해 볼때 이러한 관찰은 앞으로 고등학교 및 대학수학교육에서 연구될 소재가 된다. 즉, 우리나라의 학생(대학생 포함)들은 언제, 어떤종류의 비형적 과정을 사용하여 수학의 정의, 정리, 및 기능을 이해

하는가 이며 이러한 관찰은 대학교에서 더 좋은 교재를 구성하는데 필수적인 연구 문제이다.

References

[1] Bourbaki N., *The architecture of mathematics*, In Lionnais, F.(Eds.) Grant Currents of Mathematical Thought, New York, Dover P. Inc., 1971.

[2] Frudenthal H., *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, 1983.

[3] Ginsburg H.P., *Assessing understandings of arithmetic*, The test of early math. ability, Astin, TX: ProEd., 1990.

[4] Greeno J.G., *Understanding and procedural knowledge in mathematics education*, Educational psychologist, 1978.

[5] Hart K. M., *Children's Understanding of Mathematics: 11–16*, London John Murray.

[6] Howson A. G., *Perspectives on Mathematics Education*, Dordercht D. reidel publishing Co, 1986.

[7] Howson A. G., *Curriculum development in mathematics*, Cambridge Cambridge university press, 1981.

[8] Lesh R., *Conceptual Models and applied mathematical problem-soling Research*, Acquisition of Mathematics concepts and processes, Academic press Inc, 1981.

[9] Resnick. L. B., *The psychology of mathematics for instruction*, New Jersey Lea, 1981.

[10] Shavelson R.J., *Methods for examining reprsentations of a subject-Matter structure in a student's Memory*, Journal of Research in Scince Teaching **11** (1974).

[11] Skemp R.R., *The psychology of linear mathematics*, Penguin book, 1971.

[12] Shin H.S., *Developing the mathematics curriculum by error and strategy*, Journal of the korea society of Mathematical Education **xxviii** (1989).

강원대학교 수학교육과