Comm. Korean Math. Soc. 7 (1992), No. 2, pp. 365-373

실 대수 G 다양체의 부동점 집합의 정규성에 대하여

서 동 엽

1. 서론

아담한 (compact) Lie 군 G 가 매끈한 (smooth) 다양체 M 에 매끈하게 작용 (smoothly act) 할 때 임의의 닫힌군 $H \subseteq G$ 의 부동점 집합 $M^H = \{x \in M \mid$ 모든 $h \in H$ 에 대해 $hx = x\}$ 중 같은 차원의 연결요소 (connected components) 의 합 집합은 매끈한 다양체이다, [Br]. 한편 임의의 정규 실 또는 복소 대수다양체 (nonsingular real or complex algebraic variety) 는 매끈한 다양체이다, [Wh]. 역으로 매끈한 다양체인 복소 대수다양체는 정규적이다, [Mi]. 따라서 정규 복소 대수다양체에 군 G 가 대수적으로 작용한다면 임의의 닫힌군 $H \subseteq G$ 의 부동점 집합중 같은 차원의 연결요소의 합집합은 정규 복소 대수다양체임을 쉽게 알 수 있다.

그러나 일반적으로 매끈한 실 대수다양체가 정규적인 것은 아니다, [Mi]. 따라서 정규 실 대수다양체에 군 G 가 대수적으로 작용한다면 임의의 닫힌군 $H \subseteq G$ 의 부동점 집합중 같은 차원의 연결요소의 합집합은 정규 대수 다양체인가 하는 질문을 할 수 있다. 본 논문에서는 이 질문에 대한 답이 긍정적인 것을 밝히고자 한다. 즉,

정리. 아담한 *(compact) Lie* 군 G 가 정규 실 대수다양체에 대수적으로 작용한다면 임의의 닫힌군 $H \subseteq G$ 의 부동점 집합 중 같은 차원의 연결요소의 합집합은 정규 실 대수다양체이다.

이 정리의 증명을 위하여는 주어진 G 실 대수 다양체를 복소화 한다. 복소 대수다양체에서는 매끄러움과 정규성이 같으므로 원하는 결과를 복소 대수다양체에서

Received January 15, 1992.

얻은 다음 다시 이 복소 대수다양체의 실수부분을 취함으로써 실 대수다양체에서의 원하는 결과를 얻는 방법을 사용하였다.

2. 대수 다양체의 기본 성질

본 절에서는 대수 다양체의 몇가지 기본적 성질 특히 정규성에 대하여 논하고자 한다. 또한 군이 대수다양체에 작용한다는 의미와 이에 따른 몇가지 초보적 사실들에 대해 논하고자 한다.

우선 군의 작용이 없을 때 (즉, $G = 1$) 를 생각하자. 체 (field) F 를 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$ 라 하자.

정의. 부분공간 $V \subset F^n$ 이 대수 다양체 (algebraic variety) 란 V 가 F^n 에서 정의된 다항식 함수들의 모임의 공통 해집합일 때를 말한다. 필요에 따라 F 가 $\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$ 일 경우 각각 실 대수다양체 또는 복소 대수다양체라 한다. 대수다양체가 불가분 (irreducible) 이란 진 부분 대수다양체의 합집합으로 표시할 수 없을 때를 이른다. 임의의 대수다양체 V 는 불가분 다양체의 합집합 $V = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ 로 표시할 수 있고 서로 다른 i 와 j 에 대해 $S_i \not\subseteq S_j$ 라는 조건하에서는 이와 같은 표현이 유일하다([Ha] Proposition 1.5 참조). 이 경우 S_i 들을 V 의 불가분 요소라 한다.

정의. 대수다양체 $V \subset F^n$ 가 $x \in V$ 에서 d 차원 정규적 (nonsingular) 이란 다음을 만족하는 적당한 다항식 $q_1, \ldots, q_{n-d} \in \mathcal{I}(V)$ 가 존재하는 경우를 말한다.

(1) 적당한 x 의 F^n 내에서의 근방 U 에 대해 $V \cap U = U \cap q_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap q_{n-d}^{-1}(0)$
(2) 행렬$(\partial q_i(x)/\partial x_j)$의 $x \in V$ 에서의 rank 는 $n-d$ 이다.

정의. 대수다양체 V 의 차원은 $\dim V = \max\{d \mid d$ 차원 정규적인 $x \in V$가 존재 $\}$ 로 정의한다.

정의. 대수다양체 V 에 대해

$$\operatorname{Nonsing} V = \{x \in V \mid \ x \text{ 가 } \dim V \text{ 차원 정규적}\}$$

$$\operatorname{Sing} V = V - \operatorname{Nonsing} V$$

로 정의하고 $\operatorname{Nonsing} V$ 와 $\operatorname{Sing} V$ 를 각각 V 의 정규집합과 특이집합이라 한다. $\operatorname{Nonsing} V = V$ 이면 V 를 정규적이라 한다.

F^n 상의 다항식 환 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 의 ideal $\mathcal{I}(V)$ 는 V 상에서 0 이 되는 모든 다항식의 모임으로 정의하자. Hilbert basis 정리에 의해 $\mathcal{I}(V)$ 는 유한개의 다항식에 의해 생성된다. 집합 $\{g_1, \ldots, g_k\}$ 을 $\mathcal{I}(V)$ 의 임의의 생성원 (generator) 집합이라 하고 다음을 정의하자.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rk}_x^F(V) = k \times n \text{ 행렬 } (\partial g_i/\partial x_j)|_x \text{ 의 rank}\\
&\operatorname{rk}^F(V) = \max\{\operatorname{rk}_x^F(V) \mid x \in V\}\\
&V^0 = \{x \in V \mid \operatorname{rk}_x^F(V) = \operatorname{rk}^F(V)\}\\
&V^- = V - V^0
\end{aligned}$$

위의 정의들이 생성원의 선택에 불변함은 쉽게 알 수 있다. 위의 정규성의 정의는 [Mi] 나 [Wh] 에서와는 약간 다른점에 유의 바란다. [Mi] 나 [Wh] 에서는 V^0 를 정규집합 V^- 를 특이집합으로 정의하고 있다. 그러나 우리의 정의가 좀 더 위상적 직관에 가깝다 할 수 있다. 즉, V_1 과 V_2 가 각각 정규 대수 다양체이며 $\dim V_1 < \dim V_2$ 이라 하자. 만약 $V = V_1 \cup V_2$ 이라 하면 $\operatorname{Nonsing} V = V_2 - V_1$ 이지만 $V^0 = V_1 - V_2$ 이다. 한편 V^0 는 $\dim V$ 차원의 매끈한 다양체이고 V^- 는 대수다양체가된다, [Wh].

다음의 기초정리들은 $\operatorname{Nonsing}(V)$ 와 V^0 그리고 $\operatorname{Sing}(V)$ 와 V^- 간의 관계를 설명한다.

기초정리 2.1. ([AK] *Proposition 2.2.5)* 불가분 대수다양체 $V \subset F^n$ 에 대해

(1) $\mathrm{Nonsing}(V) = V^0 \neq \emptyset$
(2) $\dim V = n - \mathrm{rk}^F(V)$
(3) $\mathrm{Sing}(V) = V^-$
(4) 임의의 불가분 부분 대수다양체 $W \subsetneq V$ 에 대해 $\dim(W) < \dim(V)$. □

기초정리 2.2. ([AK] *Proposition 2.2.6)* 대수 다양체 V 에 대해 이의 정규집합 $\mathrm{Nonsing}(V)$ 는 공집합이 아니다. 또한 $x \in V$ 가 d 차원 정규적이기 위한 필요 충분조건은 x 가 V 의 단 하나의 불가분 요소 S 의 정규집합 $\mathrm{Nonsing}(S)$ 에 들어가고 $\dim S = d$ 이다. □

따름 정리 2.3. 임의 대수 다양체 V 에 대해 $\mathrm{Nonsing}(V)$ 는 매끈한 다양체이다. 따라서 모든 정규적 대수 다양체는 매끈한 다양체가 된다. 그리고 $\mathrm{Sing}(V)$ 는 대수 다양체이다.

증명: Implicit 함수정리에 의해 $\mathrm{Nonsing}(V)$ 는 실제로 analytic 다양체가 된다. 따라서 $\mathrm{Sing}(V)$ 가 대수 다양체가 됨을 보이면 된다. $V = S_1 \cup \cdots \cup S_k$ 라 하고 S_i 들을 모두 불가분 요소라 하자. 그러면 $\dim V = \max\{\dim S_i\}$ 이고

$$\mathrm{Nonsing}(V) = \bigcup_{\dim S_i = \dim V} (\mathrm{Nonsing}\, S_i - \bigcup_{i \neq j} S_j).$$

따라서

$$\mathrm{Sing}(V) = (\bigcup_{\dim S_i < \dim V} S_i) \bigcup (\bigcup_{\dim S_i = \dim V} \mathrm{Sing}(S_i)) \bigcup (\bigcup_{i \neq j} (S_i \cap S_j)).$$

한편 $\mathrm{Sing}(S_i) = S_i^0$ 는 대수다양체이고 유한개의 대수다양체의 합집합은 역시 대수다양체이므로 $\mathrm{Sing}(V)$ 는 대수다양체이다. □

위 정리의 역은 $F = \mathbb{C}$ 일 때는 다음과 같이 성립한다.

기초정리 2.4. *([Mi] 13 쪽 참조)* 불가분 d 차원 복소 대수다양체 의 한 점 근방이 매끈한 다양체이면 그 점은 d 차원 정규적이다. $\square$

그러나 $F = \mathbb{R}$ 인 경우 그 역은 성립하지 않는다.

보기 2.5: $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^3 + 2x^2y - x^4 = 0\}$ 은 매끈한 다양체이지만 정규적은 아니다. ([Mi] 12 쪽 Example C 참조)

이제부터 군의 작용이 있는 경우를 생각하자. G 를 아담한 Lie 군이라 하고 Ω 를 G 의 직교표현 (orthogonal representation) 이라 하자. 여기서 우리는 직교표현을 군 G 가 직교 변환 (orthogonal transformation) 으로 작용하고있는 유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$ 으로 생각한다.

정의. 집합 $V \subset \Omega$ 가 실 대수 G 다양체란 V 가 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 내에서 정의되는 실 대수다양체로서 G 의 작용에 불변인 집합 (즉 모든 $x \in V$ 와 $g \in G$ 에 대해 $g(x) \in V$) 을 말한다. 이 경우 우리는 군 G 가 실 대수다양체 V 상에 대수적으로 작용한다고 한다.

아담한 Lie 군 G 가 매끈한 다양체 M 상에 매끈하게 작용하는 경우 임의의 닫힌 부분군 $H \subset G$ 의 부동점 집합 M^H 는 매끈한 다양체의 떨어진 합집합 (disjoint union) 이된다. 만약 G 가 정규적 실 대수다양체 V 에 대수적으로 작용한다면 당연히 그 작용은 매끈하고 따라서 V^H 는 매끈한 다양체의 떨어진 합집합이 된다. 그러나 매끈한 실 대수다양체가 꼭 정규적일 필요가 없기 때문에 (보기 2.5) V^H 가 정규적 대수다양체의 떨어진 합집합인지에 대한 물음이 자연스럽다.

기초정리 2.6.

(1) 유한개의 *(같은 차원의 정규)* 실 대수 G 다양체의 *(떨어진)* 합집합은 *(정규)* 실 대수 G 다양체이다.
(2) 임의의 실 대수 G 다양체들의 교집합은 실 대수 G 다양체이다.
(3) 유한개의 *(정규)* 실 대수 G 다양체의 *cartesian* 곱은 *(정규)*실 대수 G 다양체이다.

(4) 실 대수 G 다양체 V 와 G 의 임의의 부분군 H 에 대해 부동점 집합 V^H 는 실 대수 NH/H 다양체이다. 여기서 NH 는 H 의 normalizer 이다.

증명: (1), (2), (3) 의 경우 이들이 대수다양체가 된다는 것은 대수기하학의 기본적 사실이다. 한편 각각의 다양체들이 G 불변이므로 당연히 이들의 합집합 교집합 cartesian 곱도 G 불변이다. 한편 유한개의 같은 차원의 정규 실 대수다양체의 떨어진 합집합은 정의에 의해 명백히 정규적이다. 한편 $V^H = \bigcap_{h\in H} V^h$ 이다. 여기서 $V^h = \{x \in V \mid hx = x\}$ 이고 이것은 대수적 다양체이다. 따라서 (4) 도 성립한다. □

3. 실 대수다양체의 복소화

본 절에서는 실 대수 G 다양체의 복소화에 대해 다루고자 한다. 집합 V 를 군 G 의 직교표현 Ω 에서 정의된 실 대수 G 다양체라 하자. 집합 $V_{\mathbb{C}}$ 를 G 의 복소표현 $\Omega \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 에서 정의되는 V 를 포함하는 최소의 복소다양체라 하자. 여기서 우리는 Ω 가 $\Omega \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 에 실수 부분으로 포함된다고 생각한다. 이때 $V_{\mathbb{C}}$ 를 V 의 복소화 (complexification) 라 한다.

기초정리 3.1. *([Wh], 8 절 참조)* *V 를 실 대수 다양체라 하고, $V_{\mathbb{C}}$ 를 V 의 복소화라 하자. 그러면*

(1) $\mathcal{I}(V_{\mathbb{C}})$ 는 $\mathcal{I}(V)$ 안의 다항식으로 생성되는 복소 *ideal* 이다.
(2) $V_{\mathbb{C}} \cap \Omega = V$
(3) $V_{\mathbb{C}}$ 의 불가분 요소를 V_i^* $(i = 1, \ldots, k)$ 라 하면 $V_i = V_i^* \cap \Omega$ $(i = 1, \ldots, k)$ 는 V 의 불가분 요소가 되고 $(V_i)_{\mathbb{C}} = V_i^*$ 가 된다.
(4) 임의의 $x \in V$ 에 대해 $\mathrm{rk}_x^{\mathbb{R}}(V) = \mathrm{rk}_x^{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$ 이다. □

보조정리 3.2. *V 를 실 대수 G 다양체라 하고, $V_{\mathbb{C}}$ 를 V 의 복소화라 하자. 그러면*

(1) $V_{\mathbb{C}}$ 는 G 불변이다.

(2) 만약 V 가 불가분이면 $V_{\mathbb{C}}$ 도 역시 불가분이다.

(3) V 가 x 에서 (실) d 차원 정규적이기 위한 필요충분조건은 $V_{\mathbb{C}}$ 도 x 에서 (복소) d 차원 정규적이다.

증명: (1) V 가 G 불변이므로 모든 $g \in G$ 에 대해 집합 $gV_{\mathbb{C}} = \{gx \mid x \in V_{\mathbb{C}}\}$ 는 V 를 포함하는 복소 대수다양체이다. 그러므로 2.6 (2) 에 의해 $V \cap gV_{\mathbb{C}}$ 는 V 를 포함하는 복소 대수다양체이다. 한편 복소화의 정의에의해 $V_{\mathbb{C}}$ 가 V 를 포함하는 유일한 최소의 복소 대수다양체이므로 $V_{\mathbb{C}} = gV_{\mathbb{C}}$ 이다. 따라서 $V_{\mathbb{C}}$ 는 G 불변이다.

(2) $V_{\mathbb{C}}$ 가 불가분이 아니라고 하자. 그러면 $V_{\mathbb{C}}$ 는 불가분 요소 들의 합집합 $V_{\mathbb{C}} = V_1^* \cup \cdots \cup V_k^*$ 로 표시할 수 있다. 모든 $i = 1, \ldots, k$ 에 대해 V_i 를 V_i^* 의 실수부분 $V_i^* \cap \Omega$ 로 정의하자. 그러면 V_i 는 3.1 (3) 에 의해 V 의 불가분요소이다.

(3) 한점 $x \in V$ 가 d 차원 정규적이라 하자. 이 점이 $V_{\mathbb{C}}$ 에서도 d 차원 정규적임을 보이기 위해서는 2.2 에 의해 x 가 $V_{\mathbb{C}}$ 의 차원이 d 인 단 하나의 불가분 요소의 정규집합에 들어감을 보이면 된다. $x \in V$ 가 d 차원 정규적이기 때문에 차원이 d 인 단 하나의 불가분 요소 S 의 정규집합 속에 들어간다. 즉 $x \in \mathrm{Nonsing}(S) = S^0$. 3.1.(4) 에 의해 $\mathrm{rk}^{\mathbb{R}}(S) = \mathrm{rk}_x^{\mathbb{R}}(S) = \mathrm{rk}_x^{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}})$ 이고, $\mathcal{I}(S_{\mathbb{C}}) = \mathcal{I}(S) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 이므로 $\mathrm{rk}_x^{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}}) = \mathrm{rk}^{\mathbb{C}}(S_{\mathbb{C}})$ 이다. 따라서 (2) 에 의해 $S_{\mathbb{C}}$ 가 불가분이므로 $x \in S_{\mathbb{C}}^0 = \mathrm{Nonsing}(S_{\mathbb{C}})$. 만약 이와 같은 또 다른 불가분요소 T^* 가 존재한다면 3.1 (3) 에 의해 $T = T^* \cap \Omega$ 는 V 의 불가분요소가 된다. 한편 x 가 V 에서 d 차원 정규적이므로 $T = S$ 이고 따라서 $T^* = S_{\mathbb{C}}$ 이다. 이로써 V 가 x 에서 d 차원 정규적이면 $V_{\mathbb{C}}$ 도 x 에서 d 차원 정규적이다. 역으로 $V_{\mathbb{C}}$ 가 x 에서 d 차원 정규적이면 앞에서와 비슷한 방법에 의해 V 가 x 에서 d 차원 정규적임을 보일 수 있다. □

4. 부동점집합의 정규성

본 논문의 주된 정리는 다음과 같다.

정리 4.1. G 를 아담한 *Lie* 군이라하고 Ω 를 G 의 직교표현이라 하자. V 를 Ω 안에서 정의되는 정규 실 대수 G 다양체라 하자. H 를 G 의 닫힌 부분군이라 하자. 그러면 임의의 자연수 m 에 대해 V^H 의 m 차원 연결요소들의 합집합 $C(m)$ 도 Ω 에서 정의되는 정규 실 대수 NH/H 다양체가 된다. 여기서 NH 는 H 의 *normalizer* 이다.

우선 다음을 알아둘 필요가 있다. V 의 복소화 $V_{\mathbb{C}}$ 는 3.2.(1) 에 의해 G 불변이고 이 때의 $V_{\mathbb{C}}$ 상의 G 의 작용은 V 근방에서 매끈하다. 따라서 이의 H 에 의한 부동점집합 $V_{\mathbb{C}}^H$ 는 V^H 근방에서 매끈한 다양체가 된다. 본 정리의 증명을 위해 다음 보조정리가 필요하다.

보조정리 4.2. $V^H = C(m_1) \cup \cdots \cup C(m_k)$ $(m_1 > \cdots > m_k)$ 라 하자. 그러면 모든 $i = 1, \ldots, k$ 에 대해 $C(m_i)$ 는 V^H 의 m_i 차원 정규 불가분 요소들의 떨어진 합집합이다. 따라서 모든 $C(m_i)$ 는 정규 대수다양체가된다.

증명: $\dim V^H = m_1$ 이므로 V^H 의 m_1 차원 불가분요소는 존재하고 이것은 $C(m_1)$ 의 연결요소들을 포함한다. 그러한 불가분요소 S 를 생각하자. 만약 S 가 정규적이 아니라면 $x \in \mathrm{Sing}(S)$ 가 존재한다. 그러면 3.2 (3) 에 의해 $x \in \mathrm{Sing}(S_{\mathbb{C}})$ 이다. 따라서 2.4 에 의해 $S_{\mathbb{C}}$ 는 x 근방에서는 매끈한 다양체가 될 수 없다. 한편 $S_{\mathbb{C}}$ 는 V^H 의 한 불가분 요소의 복소화이고 $V^H \subset (V_{\mathbb{C}})^H$ 이므로 복소화의 최소성에 의해 $S_{\mathbb{C}} \subset (V_{\mathbb{C}})^H$ 이다. $\dim S_{\mathbb{C}} = \dim(V_{\mathbb{C}})^H$ 이고 $(V_{\mathbb{C}})^H$ 는 x 근방에서 매끈한 다양체가 되어야 하는데 $S_{\mathbb{C}}$ 는 x 근방에서 매끈한 다양체가 될수 없으므로 서로 모순이다. 따라서 S 는 정규적이다. 그러므로 S 는 m_1 차원 매끈한 다양체이고, 고로 $C(m_1)$ 은 V^H 의 m_1 차원 정규 불가분 요소들의 떨어진 합집합이다. 이로써 $C(m_1)$ 은 정규 대수다양체임이 증명되었다. $i < l$ 인 모든 i 에 대해 보조정리가 사실이라 하자. $X_l = C(m_l) \cup \cdots \cup C(m_k)$ 라 하자. 그러면 $X_l = \mathrm{Sing}(\mathrm{Sing}(\cdots(V^H)\cdots)$ 이므로 X_l 은 차원이 m_l 인 대수 다양체가 된다. 따라서 위와 마찬가지로 X_l 의 m_l 차원 불가분 요소 T 는 정규적임을 보일 수 있다. 따라서 본 보조정리가 증명되었다. □

정리 4.1 의 증명: 모든 $i = 1, \ldots, k$ 에 대해 $C(m_i)$ 는 4.2 에 의해 같은 차원의 정규 불가분 대수다양체의 떨어진 합집합으로 표시된다. 따라서 $C(m_i)$ 는

정규 대수다양체이고 군 G 의 부분집합 NH 의 작용에 불변이다. 한편 $C(m_i)$ 는 H 의 작용에 의해 부동이므로 NH/H 의 작용을 유도한다. G 의 $V \subset \Omega$ 상의 작용이 대수적이므로 $C(m_i)$ 상의 NH/H 도 대수적이다. 따라서 $C(m)$ 도 Ω 에서 정의되는 정규적 실 대수 NH/H 다양체가 된다. □

References

[AK] S. Akbulut and H. King, *Topology of Real Algebraic Sets*, MSRI Publications 25, Springer-Verlag, 1992.

[Br] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Mi] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. of Mathematics Studies, Vol. 61, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1968.

[Wh] H. Whitney, *Elementary Algebraic Structures of Real Algebraic Varieties*, Ann. of Math. 66 (1957), 545–556.

대전시 유성구 구성동 373-1

한국과학기술원 수학과