Comm. Korean Math. Soc. 7(1992), No. 1, pp. 155–171

행렬대수 사이의 양선형사상

계 승 혁

0. 머릿말

작용소 대수에는 그 안에 대수적인 구조를 비롯하여 *-연산구조, 거리구조, 순서구조 등 여러가지 구조들이 내재되어 있고 이러한 구조들이 서로 복합적으로 작용하고 있는데, 작용소 대수를 연구하는데 그 순서구조를 파악하는 것은 무엇보다도 중요하다. 실제로 작용소 대수가 본격적으로 연구되기 시작한 이래, 그 대수 및 쌍대 공간의 순서구조의 일반론을 이용하여 표현이론이 완성되었다. 그러나, 개개의 작용소대수에 대한 순서구조의 파악은 아직 요원한 실정이며, 가장 간단한 작용소 대수의 예인 행렬대수에 대하여서도 알려진 것이 별로 없는 형편이다.

이제, 복소수체 위의 $n \times n$ 행렬 전체의 C^*-대수를 M_n 이라 하고, M_n 에서 M_n 으로 가는 양의 선형사상 전체의 집합을 $\mathcal{P}(M_n)$ 이라 하자. 본 논문에서는, n 이 아주 작은 수일 때 $\mathcal{P}(M_n)$ 의 구조 및 예에 대하여 현재까지 알려진 것들을 정리하고 새로운 연구 방향을 모색하고자 한다.

우선, 1절과 2절에서 $\mathcal{P}(M_n)$ 의 구조를 공부하는데 유용한 몇 가지 개념, k-양사상, k-쌍대양사상, 완전양사상, 완전쌍대양사상, 분해가능 사상 등을 논의하였는데, 일반적인 C^*-대수에서도 정의되는 개념들이지만 여기서는 가능한 한 행렬대수의 경우에 국한하여 소개하였다. 3절에서는, 이 논문의 주제와 밀접한 관련을 갖는 몇 가지 행렬 부등식을 소개하였는데, 특히, 2-양사상과 쉬바르쯔 부등식과의 관계, 분해가능 양사상과 캐디슨 부등식과의 관계를 중심으로 서술하였다.

행렬대수 사이의 양사상을 연구하는데, 가장 심각한 애로점은 의미있는 예가 알려진 것이 별로 없다는 사실이다. 물론, $n = 2$ 일 때는 Størmer [St63] 가 $\mathcal{P}(M_2)$ 의 모든 극단적인 예를 찾아 놓았으므로 문제될 것이 없지만, $n = 3$ 인경우만 해

Received July 29, 1991.
본 연구는 1990년도 문교부 기초과학 육성연구비의 지원에 의한 것임.

도, 당장 주어진 선형사상이 양인가 하는 것부터 그리 간단하지가 않다. 4절에서는, 1절과 2절에서 다룬 선형사상을 $n = 3$ 인 경우에 확장하여 많은 예를 검토하였다.

5절에서는 특히 정사영에 대하여 성립하는 독특한 성질들을 알아 보고, $n = 4$ 인 경우에 정의되는 특별한 정사영의 예를 살펴 보았다. 이 예를 이용하여 6절에서는 $n = 4$ 인 경우에 알려져 있는 분해가능하지 않은 예들을 재검토하고, 마지막으로 7절에서는 앞에서 논의한 예들의 일반화에 대하여 알아 보고, 몇 가지 문제들을 제시함으로서 결론을 대신하였다.

이러한 내용에 관하여 기왕에 발표된 요약논문으로는 [Ch82], [St73], [St87], [To87] 등을 들 수 있다.

1. k-양사상과 k-쌍대양사상

행렬대수 M_n 위의 $k \times k$ 행렬 전체의 집합을 $M_k(M_n)$ 이라 두자. 선형사상 $\phi : M_n \to M_n$ 에 대하여 $M_k(M_n)$ 에서 $M_k(M_n)$ 으로 가는 새로운 선형사상 ϕ_k 과 ϕ^k 를 각각

$$\phi_k([A_{ij}]_{i,j=1}^k) = [\phi(A_{ij})]_{i,j=1}^k, \qquad \phi^k([A_{ij}]_{i,j=1}^k) = [\phi(A_{ji})]_{i,j=1}^k$$

으로 정의한다. ϕ_k 와 ϕ^k 가 각각 양사상이면 ϕ 를 각각 **k-양사상**, **k-쌍대양사상**이라 부르고, 임의의 자연수 k 에 대하여 ϕ 가 k-양사상이면 ϕ 를 **완전양사상**이라 부른다. **완전쌍대양사상**도 마찬가지로 정의하고, k-양사상과 k-쌍대양사상 전체의 집합을 각각 $\mathcal{P}_k(M_n)$, $\mathcal{P}^k(M_n)$으로 표시한다. 그러면, 당연히

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M_n) &= \mathcal{P}_1(M_n) \supseteq \mathcal{P}_2(M_n) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{P}_n(M_n), \\ \mathcal{P}(M_n) &= \mathcal{P}^1(M_n) \supseteq \mathcal{P}^2(M_n) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{P}^n(M_n) \end{aligned} \tag{1.1}$$

가 성립된다.

현재까지, $\mathcal{P}(M_n)$ 의 구조를 연구하는 문제의 핵심은, 임의의 양사상이 위에 열거한 것들 중 얼마나 작은 집합에 속하는 양사상의 합으로 표시될 수 있는가 하는 것이다. 우선, 임의의 n-양사상은 완전양사상이 되며, 이러한 것들은 다음과 같이 모두 찾아낼 수 있다.

정리 1 ([**Ch75a**]). 선형사상 $\phi : M_n \to M_n$ 에 대하여 다음 네 조건들은 동치이다.

(1) ϕ 가 완전양사상이다.

(2) ϕ 가 n-양사상이다.

(3) 적당한 $n \times n$ 행렬 V_i 에 대하여 $\phi(X) = \sum_i V_i^* X V_i$ 으로 표시된다.

(4) $n^2 \times n^2$ 행렬 $[\phi(E_{ij})]_{1 \le i,j \le n}$ 가 양의 행렬이다.

여기서 물론 $\{E_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ 는 ij-자리가 1 인 $n \times n$ 행렬을 나타낸다. 정리의 (3) 항에 나오는 형태로 정의되는 선형사상은 일반적인 작용소 이론에서도 매우 중요한 역할을 하는데, 이에 관한 내용과 위 정리의 확장은 [**Ma89**] 를 참조할 수 있다. 정리의 (4) 항과 유사한 결과는 [**PH81**] 에도 주어져 있다.

위 정리에 의하면, 주어진 선형사상이 $\mathcal{P}_n(M_n)$ 의 원소가 되는지 판별하기란 쉬운 일이며, 완전쌍대양사상에 대하여도 유사한 결과가 성립한다. 따라서, 임의의 양사상이 완전양사상과 완전쌍대양사상의 합으로 표시될 수 있는가 하는 의문이 희망사항으로 제기되는데, $n = 2$ 일 때에 성립함이 잘 알려져 있다 [**St63, Wo76b**]. 이렇게 표시될 수 있는 양사상을 분해가능한 양사상이라 부르는데, 일반적으로 $n = 3$ 이상일 때는 성립하지 않으며 다음 절에서 다시 논의하기로 한다.

이제, (1.1) 에서 부등호가 성립하는지 살펴보자. 가장 간단한 예로는 전치사상을 생각할 수 있다. M_2 에서 정의된 전치사상을 τ 라 하면

$$\tau_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

인데 오른쪽 행렬의 가운데 (2×2)-부분행렬을 들여다 보면, τ_2 가 양사상이 아님을 금방 알 수 있다. 이 사상의 보다 다양한 성질은 [**To83**] 을 참조할 수 있다. 이제 Choi [**Ch72**] 의 예를 살펴보자. $\phi : M_n \to M_n$ 를

$$\phi(X) = (n-1)(\operatorname{trace} X) I_n - X, \qquad X \in M_n \tag{1.2}$$

라 정의하면 $\phi \in \mathcal{P}_{n-1}(M_n) \setminus \mathcal{P}_n(M_n)$ 이다. 이 예는 X 의 대각원소들을 적절히 조작하고, 나머지 원소들에 음부호를 붙혀서 얻은 것인데, 4절과 7절에서 이러한 방법으로 얻은 다른 예들에 대하여 보다 자세히 살펴보기로 한다.

2. 분해가능한 양사상

이제, 논의대상을 좀 넓혀서 임의의 C^*-대수 사이의 양사상에 대하여 잠시 살펴보기로 하자. 힐버트 공간 $\mathcal{H}$ 가 있을 때, $\mathcal{H}$ 에서 $\mathcal{H}$ 로 가는 유계선형사상 전체의 C^*-대수를 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 로 나타내자. 다음 정리는 완전양사상이 어느 의미에서 $*$-준동형과 거의 유사하다는 것을 보여주고 있다.

정리 2 ([Ss55]). ϕ 가 C^*-대수 A 에서 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 로 가는 선형사상일 때, 다음은 동치이다.

(1) ϕ 는 완전양사상이다. 즉, 임의의 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여, $[a_{ij}] \in M_n(A)^+$ 이면 $[\phi(a_{ij})] \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^+$ 이다.
(2) 적당한 힐버트 공간 $\mathcal{K}$, 유계선형사상 $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, $*$-준동형 $\rho : A \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 에 대하여, $\phi(X) = V^*\rho(X)V$ 이다.

C^*-대수의 순서구조를 논하는데 자기수반원소의 제곱을 보존하는 사상이 핵심적인 역할을 하는데, 이러한 사상을 **요르단 준동형** 이라 한다. 요르단 준동형에 대하여는 수많은 문헌이 있으나 ([HS84], [St73] 참조) 여기서는 행렬대수와 관계되는 것만 살펴보기로 하자. 우선, Jacobson 과 Rickark [JR50] 는 행렬대수 사이에서 정의된 요르단 준동형은 준동형과 반(anti)-준동형의 합으로 표시됨을 보였다. 이로부터 여러단계의 논의를 거쳐서 다음의 정리가 얻어졌다.

정리 3 ([Ki80], [St82b]). ϕ 가 C^*-대수 A 에서 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 로 가는 선형사상일 때, 다음 세 조건은 동치이다.

(1) ϕ 가 분해가능하다. 즉, ϕ 는 완전양사상과 완전쌍대양사상의 합으로 표시된다.
(2) 적당한 힐버트 공간 $\mathcal{K}$, 유계선형사상 $V : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, 요르단 준동형 $\rho : A \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ 에 대하여, $\phi(X) = V^*\rho(X)V$ 이다.

(3) 임의의 자연수 $n = 1,2,\dots$ 에 대하여, $[a_{ij}]$, $[a_{ji}] \in M_n(A)^+$ 이면 $[\phi(a_{ij})] \in M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))^+$ 이다.

앞 절에서 언급한 바와 같이 $n = 2$ 이면 임의의 양사상은 분해가능이다. 임의의 양사상이 분해가능한가 하는 문제는 양의 쌍이차식이 완전제곱의 합으로 표시될 수 있는가 하는 문제와 깊은 관련이 있다 [Ch75b]. 이는 또한 양의 사차식이, 이차식의 완전제곱의 합으로 표시될 수 있는가 하는 문제의 특별한 경우인데, 힐버트의 열일곱번째 문제와도 관련된다 [CL77, Pf76].

이제, $n \times n$ 실계수 대칭행렬 전체의 순서집합을 $\mathcal{S}_n$ 이라 하자. 만일 Φ 가 $\mathcal{S}_n$ 에서 $\mathcal{S}_n$ 으로 가는 양의 선형사상이라면, 다음식

$$(X,Y) \overset{F}{\mapsto} Y^t \Phi(XX^t) Y, \qquad (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

에 의하여 실계수 쌍이차식 F 가 얻어진다. 역으로, 쌍이차식 F 가 주어지면, 변수 X 는 이차식 $Y \overset{q_X}{\longmapsto} F(X,Y)$ 을 결정하는데 이를 $\mathcal{S}_n$ 의 원소로 보면, $XX^t \mapsto q_X$ 는 $\mathcal{S}_n$ 사이의 선형사상을 정의한다. 예를 들어서, 쌍이차식

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_3^2 y_3^2 - 2(x_1x_2y_1y_2 + x_2x_3y_2y_3 + x_3x_1y_3y_1) \\ &\quad + 2(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2), \ X = (x_1,x_2,x_3), \ Y = (y_1,y_2,y_3) \end{aligned}$$

은 M_3 사이의 선형사상

$$[a_{ij}] \mapsto 2 \begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}+a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}+a_{11} \end{pmatrix} - [a_{ij}]. \tag{2.1}$$

에 대응된다. 한편, F 가 다른 이차식의 제곱으로 표시되면 이에 대응되는 선형사상 ϕ 가 적당한 실계수 행렬 V 에 대하여

$$\phi(A) = V^t A V, \qquad A \in M_n$$

의 형태로 표시됨을 쉽게 알 수 있다. Choi [**Ch75b**] 는 위의 쌍이차식 B 가 양임에도 불구하고 완전제곱의 합으로 표시될 수 없음을 보임으로써, $n=3$ 일 때 분해가능하지 않은 양선형사상의 예를 들었다.

한편, Woronowicz [**Wo76a**] 는 간접적인 방법으로 M_2 에서 M_4 로 가는 분해가능하지 않은 양선형사상의 예가 있음을 보였는데, 후에 Tang [**Ta86**] 이 구체적인 예를 찾아내었다. 이 예는 5절에서 다시 살펴 보기로 한다.

3. 부등식

이 절에서는 지금까지 살펴 본 문제들과 밀접한 관련을 갖고 있는 두 가지 부등식, Schwarz 와 Kadison 의 부등식을 다루기로 한다. Davis [**Da57**] 는 C^*- 대수 사이의 완전 양사상 ϕ 에 대하여 쉬바르쯔 부등식 $\phi(A)^*\phi(A) \le \phi(A^*A)$ 이 성립함을 보였는데, 후에 Choi [**Ch74**] 는 임의의 2- 양사상에 대하여도 이 부등식을 증명하였다. 이 부등식은 물론 단위원을 보존하는 사상에 대한 것인데, 단위원을 보존하지 않는 사상에 대하여는 다음과 같은 결과가 있다. 우선, Choi [**Ch80**] 는 2- 양사상과 동치가 되는 여러가지 부등식을 찾아내었는데, 이의 특수한 경우로서 $\phi(I)$ 가 가역인 경우, 임의의 2- 양사상에 대하여

$$\phi(A)^*\phi(I)^{-1}\phi(A) \le \phi(A^*A) \tag{3.1}$$

가 성립함을 알 수 있다. 한편, Gardner [**Ga79**] 는 절대값을 보존하는 선형사상을 연구하는 과정에서 ϕ 가 2- 양사상이면

$$\phi(A)^*\phi(A) \le \|\phi\|\phi(A^*A) \tag{3.2}$$

가 성립함을 보였다. 정의역이 단위원을 갖고 $\phi(I)$ 가 가역인 경우 (3.1) 과 (3.2) 가 동치임은 쉽게 알 수 있으며, 이 때, ϕ 를 쉬바르쯔 사상이라 부른다. ([**Pa74**] 참조)

한편, Kadison [**Ka52**] 은 A 가 자기수반이고 $\|\phi\| \le 1$ 이면 $\phi(A^2) \ge \phi(A)^2$ 임을 보였다. 후에, Woronowicz [**Wo76b**] 는 ϕ 가 2- 양사상과 2- 쌍대양사상의

합이면 Kadison 의 부등식보다 일반적인 다음의 관계

(3.3)

$$C \geq B^*B,\ C \geq BB^* \ \Rightarrow\ \phi(C) \geq \phi(B)^*\phi(B),\ \ \phi(C) \geq \phi(B)\phi(B)^*$$

가 성립함을 보였다. 또한, M_3 에서 정의된 단위원을 보존하는 사상 역시 마찬가지임을 보였는데, 증명을 들여다 보면 다음의 관계

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} \geq 0,\ \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & C \end{pmatrix} \geq 0$$
$$\Rightarrow\ \begin{pmatrix} \phi(A) & \phi(B) \\ \phi(B^*) & \phi(C) \end{pmatrix} \geq 0,\ \begin{pmatrix} \phi(A) & \phi(B^*) \\ \phi(B) & \phi(C) \end{pmatrix} \geq 0$$

가, ϕ 의 정의역이 M_3 일 때 성립함을 보였는데, 이와 관련하여 Ando [**An79**] 는 행렬대수 사이에 정의된 임의의 양사상에 대하여

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \geq 0,\ B \geq 0\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix} \phi(A) & \phi(B) \\ \phi(B) & \phi(C) \end{pmatrix} \geq 0$$

이 성립함을 보인 바 있다.

Choi [**Ch80**] 는 $BC = CB$ 이면 임의의 양사상에 대하여 (3.3) 이 성립함을 보였다. Woronowicz 는, 단위원을 보존하는 임의의 양사상 ϕ 에 대하여 (3.3) 이 성립하지 않을까 하는 의문을 제기하였는데, 후에 Kirchberg [**Ki80**] 에 의하여 그렇지 않음이 간접적으로 밝혀졌다. 그는 증명과정에서, 양선형사상 $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 과 양의 가역원소 $A \in \mathcal{A}$ 에 대하여, 새로운 사상

$$\phi_A(X) = \phi(A^2)^{-\frac{1}{2}}\,\phi(AXA)\,\phi(A^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad X \in \mathcal{A}.$$

을 정의하였는데, 단위원을 보존하는 양사상 $\phi : A \to M_2$ 가 분해가능할 필요충분조건이, 임의의 $A \geq 1$ 에 대하여 ϕ_A 가 부등식 (3.3) 을 만족해야 한다는 것을 보였다. 구체적인 반례는 앞 절에서 언급한 Tang 의 논문에 주어져 있다.

후에, Robertson [**Ro83c**] 는 단위원을 보존하는 선형사상이 n-양사상일 필요충분조건은, 임의의 양가역 원소 A 에 대하여 $(\phi_A)_n$ 이 쉬바르쯔 사상임을 보였다.

4. 3차원 행렬대수 사이의 양선형사상

이 절에서는 $n = 3$ 일 때의 경우에 한하여 논하여 보자. 이미, (1.2) 와 (2.1) 에서 특별한 성질을 갖는 양사상의 예를 살펴 보았다. Choi 와 Lam [CL77, Ch80] 은 2절에서 살펴 본 쌍이차식의 예를 보다 발전시켜 매우 극단적인 예를 만들었는데 이에 대응되는 선형사상은

$$
(4.1) \qquad [a_{jk}] \mapsto \begin{pmatrix} 2a_{11} + \alpha a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_{22} + \alpha a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{33} + \alpha a_{11} \end{pmatrix} - [a_{jk}]
$$

로 정의된다. 만일 $\alpha \geq 1$ 이면 이 사상은 분해가능하지 않은 양사상이며, 특히 $\alpha = 1$ 이면 이 사상은 극단적이다. 여기서 양사상 ϕ 가 극단적이라 함은, $\phi = a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ (ϕ_i 는 양사상, $a_1 + a_2 = 1$, $a_i \geq 0$) 이면 $\phi = \phi_1 = \phi_2$ 임을 말한다. 후에, Tomiyama [TT88] 는 쌍이차식의 이론을 빌지 않고 위의 사상 ($\alpha = 1$ 일 때) 이 2-양사상과 2-쌍대양사상의 합으로 나타낼 수 없음을 보이고, 이러한 사상을 단자사상이라 불렀다.

지금까지 살펴 본 여러가지 개념들의 차이점을 보다 분명히 하기 위하여 다음과 같은 선형사상의 예를 생각해 보기로 하자 [CKL]. 음이 아닌 실수 a, b, c 에 대하여, M_3 사이의 선형사상 $\Phi[a, b, c]$ 를

$$
\Phi[a,b,c](x) = \begin{pmatrix} ax_{11} + bx_{22} + cx_{33} & 0 & 0 \\ 0 & ax_{22} + bx_{33} + cx_{11} & 0 \\ 0 & 0 & ax_{33} + bx_{11} + cx_{22} \end{pmatrix} - x
$$

로 정의하자. $\Phi[2,2,2]$ 가 바로 (1.2) 이며, $\Phi[2,0,2]$ 와 $\Phi[2,0,\alpha]$ 는 각각 (2.1) 과 (4.1) 의 경우에 해당된다.

정리 4.

(1) $\Phi[a, b, c]$ 가 양사상일 필요충분조건은

$$
a \geq 1, \quad a + b + c \geq 3, \quad 1 \leq a \leq 2 \Rightarrow bc \geq (2 - a)^2.
$$

(2) $\Phi[a,b,c]$ 가 완전양사상일 필요충분조건은 $a \geq 3$.

(3) $\Phi[a,b,c]$ 가 분해가능할 필요충분조건은

$$a \geq 1, \quad 1 \leq a \leq 3 \Rightarrow bc \geq \left(\frac{3-a}{2}\right)^2.$$

(4) $\Phi[a,b,c]$ 가 2- 양사상일 필요충분조건은 $a \geq 3$ 이거나

$$2 \leq a < 3, \quad bc = (3-a)(b+c) > 0.$$

위의 정리로부터, $\Phi[a,b,c]$ 가 2- 양사상이면 자동적으로 분해가능하다는 사실을 알 수 있다. 한편, 보다 풍부한 단자사상의 예를 만들기 위하여 다음과 같은 예도 생각하였다. 역시, 음이 아닌 실수 a, c_1, c_2, c_3 에 대하여, 선형사상 $\Theta[a;c_1,c_2,c_3]$ 를

$$\Theta[a;c_1,c_2,c_3](x) = \begin{pmatrix} ax_{11}+c_1x_{33} & 0 & 0 \\ 0 & ax_{22}+c_2x_{11} & 0 \\ 0 & 0 & ax_{33}+c_3x_{22} \end{pmatrix} - x$$

로 정의하면 [Ky], $\Theta[a;c,c,c] = \Phi[a,0,c]$ 이고 다음 결과를 얻는다.

정리 5.

(1) $\Theta[a;c_1,c_2,c_3]$ 가 양사상일 필요충분조건은

$$a \geq 2, \quad c_1c_2c_3 \geq (3-a)^3.$$

(2) $2 \leq a < 3$, $c_1c_2c_3 \geq (3-a)^3$ 이면 $\Theta[a;c_1,c_2,c_3]$ 은 단자사상이다.

만일 $a > 2$ 이거나 $c_1c_2c_3 > (3-a)^3$ 이면 $\Theta[a;c_1,c_2,c_3]$ 가 극단적이 아님을 쉽게 알 수 있다. 최근 Osaka [Os5] 는 Choi 와 Lam 의 방법 [CL77] 을 이용하여, $a=2$ 이고 $c_1c_2c_3 = 1$ 일 때 $\Theta[2;c_1,c_2,c_3]$ 가 극단적임을 보였다.

여기서 다룬 예들은 모두 대각원소들을 적절히 조작함으로써 얻은 것들인데, 대각원소는 그대로 두고 나머지 원소들을 조작함으로써 얻을 수 있는 예들을 생각하면, [St63] 에서 다룬 $n=2$ 일 때의 결과와 같이 다양한 극단적인 양사상의 예를 얻을 수 있으리라 여겨진다. 1절에서 언급한 전치사상은 물론 이러한 예의 특수한 경우이다.

5. 행렬대수 사이의 정사영

지금까지 살펴 본 바와 같이 $n = 3$ 인 경우에도 $\mathcal{P}(M_n)$ 의 구조를 구체적으로 완전히 파악하는 것은 아직도 요원한 실정이다. 그러나, 몇몇 특별한 경우에는 그 성질이 비교적 잘 알려져 있다. 예를 들어서 실제 응용에서 나타나는 많은 양사상이 트레이스 성질 $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ 를 만족하는데 이러한 성질을 만족하는 양사상은 자동적으로 완전양사상이 된다 [CT83]. 다음으로 많이 등장하는 것이 정사영인데, 이 절에서는 특히 행렬대수 사이에 정의된 양의 정사영을 다루고자 한다.

C^*- 대수 사이의 양의 정사영의 여러가지 성질은 그 치역의 요르단 대수적 구조와 밀접한 관계가 있다. 보다 구체적으로, Effros 와 Størmer [ES79] 는 P 가 C^*- 대수 A 에서 정의된, 단위원을 보존하는 양의 정사영일 때, $N = \{n \in A : P(n^2) = 0\}$ 이라 두면, $P(A_{sa}) + N$ 은 요르단 곱

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

에 대하여 닫혀 있음을 보였는데, 이 경우 Kadison 의 부등식이 중요한 역할을 한다. 이와 같이 $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{sa}$ 의 부분공간이 요르단 곱에 대하여 닫혀 있을 때, 이를 JC-대수 라 한다. 모든 JC- 대수가 정사영의 치역이 되는 것은 아니다 [Ro86b]. 이제, 정사영이 분해가능한가 하는 문제는 다음과 같이 정리될 수 있다.

정리 6 ([St80, Ro85]). $P : A \to A$ 가 단위원을 보존하는 정사영이고 $P(A_{sa})$ 가 JC- 대수라면 다음은 동치이다.

(1) P 가 분해가능이다.

(2) 임의의 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여

$$a_1, a_2, \ldots a_n \in P(A_{sa}) \Longrightarrow a_1 a_2 \ldots a_n + a_n \ldots a_2 a_1 \in P(A_{sa}) \tag{5.1}$$

이다.

(3) P 는 2- 양사상과 2- 쌍대양사상의 합으로 표시된다.

위의 조건 (3) 에서 2- 양사상은 쉬바르쯔 사상으로 2- 쌍대양사상도 유사한 부등식으로 대치될 수 있으며 [**Ro86a**], 특히, $M_2(\mathbb{C})$ 혹은 $M_3(\mathbb{C})$ 에서 정의된 양의 정사영은, 완전양사상이 될 필요충분조건이 바로 쉬바르쯔 사상이다 [**Os2**].

A 가 행렬대수인 경우에는, 유한차원 JC- 대수가 모두 분류되어 있으므로 [**JVW, HS84**], 위 정리는 정사영의 예를 찾아내는데 큰 도움이 된다 ([**St80**] 참조). 특히, Robertson [**Ro83a, Ro83b, Ro85**] 는 조건 (5.1) 을 만족하지 않는 유한차원 JC- 대수를 연구하였는데, 특히, A 가 4- 차 행렬대수인 경우에 좋은 예들을 제공한다.

한편, $M_2(\mathbb{C})$ 에서의 선형사상 σ 를

$$\sigma\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

라 정의하면, $\Phi = \sigma_2 : M_4(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C})$ 는 주기가 2 인 반(anti)- 자기준동형이 되고, 또한

$$\pi = \frac{1}{2}(Id + \Phi) \tag{5.2}$$

는 $M_4(\mathbb{C})$ 에서 정의된 양의 정사영이 된다. 더구나, 이 정사영은 자기수반원소의 상이 $(M_2(\mathbb{H}))_{sa}$ (단, $\mathbb{H}$ 는 Hamiton 의 사원수이고, $(M_2(\mathbb{H}))_{sa} \hookrightarrow M_4(\mathbb{C})$ 는 다음 절 참조) 에 들어가는 $M_4(\mathbb{C})$ 의 정사영 중에서 유일한 것이고, $(M_2(\mathbb{H}))_{sa}$ 가 조건 (5.1) 을 만족하므로 분해가능이다.

위의 식 (5.2) 는 정사영을 정의하는 중요한 방법인데, 실제로 양의 정사영 P 에 대하여, $I - P$ 역시 노름이 줄어들 필요충분조건은 P 가 주기 2 인 요르단 자기준동형 Φ 에 대하여 (5.2) 의 형태로 쓰여짐이다 [**RY82, St82a**].

6. 4차원 행렬대수 사이의 양선형사상

이미, 2절에서 M_2 에서 M_4 로 가는 분해가능하지 않은 양사상에 대하여 언급한 바 있는데, Woronowicz 의 이 결과는 간접적인 논증에 의한 것이므로, Tang [**Ta86**] 의 예를 우선 살펴 보기로 하자.

$0 < \mu < 1,\ 0 < \varepsilon \le \frac{1}{6}\mu^2$ 에 대하여,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \overset{\Phi}{\mapsto} \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)a + \mu^2 d & -b & \mu c & -\mu d \\ -c & a+2d & -2b & 0 \\ \mu b & -2c & 2a+2d & -2b \\ -\mu d & 0 & -2c & a+d \end{pmatrix}$$

라 정의하면, Φ 는 분해가능하지 않은 양사상이다. 또한, 위의 사상을 전치시킴으로써, M_4 에서 M_2 로 가는 마찬가지 예를 얻을 수 있다.

이제, 앞 절에서 논의한 정사영을 이용하여 보다 중요한 Robertson **[Ro83a]** 의 예를 살펴 보자. Hamilton 의 사원수집합을

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

로 쓰자. 그러면, 집합

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha 1 & q \\ q^* & \alpha 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{H}) : \alpha \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{H} \right\}$$

는, 내적

$$< X, Y >= X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX) \qquad X, Y \in N$$

에 의하여 5-차원 실내적공간이 된다. 이제, 직교변환 $\theta : N \to N$ 가 주어지면, $(M_2(\mathbb{H}))_{sa} = \mathbb{R}1 + N$ 이므로 θ 는 $(M_2(\mathbb{H}))_{sa}$ 사이의 요르단 준동형으로 확장된다. 이 θ 는 (5.2) 에서 정의한 정사영 π 에 의하여 $M_4(\mathbb{C})$ 사이의 선형사상 $\theta\pi$ 로 확장된다.

정리 7 ([**Ro83a**]). $\theta\pi : M_4(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{C})$ 가 분해가능할 필요충분조건은 $\det\theta = 1$ 이다.

예를 들어서, $(M_2(\mathbb{H}))_{sa}$ 에서의 요르단 준동형

$$\theta \begin{pmatrix} \alpha 1 & q \\ q^* & \beta 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta 1 & q \\ q^* & \alpha 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{H}$$

를 생각하면, 다음과 같은 간단한 분해가능하지 않은 양사상의 예를 얻을 수 있다:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(D) & \frac{1}{2}(B+\sigma(C)) \\ \frac{1}{2}(C+\sigma(B)) & \mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}, \quad A,B,C,D \in M_2(\mathbb{C}).$$

Robertson 는 더 나아가서 위와 같은 예가 2^{2k}-차원 ($k=1,2,\dots$) 에서도 가능함을 보였다 [**Ro83b**] . 또한, $\det\theta=-1$ 이면 사상 $\theta\pi$ 가 실제로 θ 의 유일한 확장이며, 이 경우 $\theta\pi$ 는 극단적이 된다는 점을 증명하였다 [**Ro85**].

위에서 설명한 예 외에도, 앞 절에서 다룬 M_3 사이의 사상을, 마찬가지 방법으로 M_4 에서 정의할 수 있지만 이는 다음 절에서 다루기로 하자.

7. 맺음말

(4.1) 에서 정의된 양사상 $\Phi[2,0,1]$ 은 다음과 같이 높은 차원에서도 정의될 수 있다 [**An85**, **TT88**]. $\epsilon: M_n \to M_n$ 을 대각원소에 떨어지는 정사영이라 하고, $S=[\delta_{i,i+1}]$ 을 회전행렬이라 하자. $k=0,1,\dots n-1$ 에 대하여,

$$\tau_{n,k}(A)=(n-k)\epsilon(A)+\sum_{j=1}^{k}\epsilon(S^jAS^{*i})-A, \quad A\in M_n$$

이라 정의하자. $\tau_{3,1}$ 은 다름아닌 $\Phi[2,0,1]$ 이고 위의 사상 $\tau_{n,k}$ 가 양일 필요충분조건은 다음의 부등식

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{(n-k)\lambda_j+\lambda_{j+1}+\cdots+\lambda_{j+k}}\le 1 \qquad (\text{단},\ i+n\equiv i)$$

이 임의의 양수 $\lambda_1,\dots\lambda_n$ 에 대하여 성립해야 한다는 것을 쉽게 알 수 있다 [**An85**]. $n\le 4$ 이거나 $k=0, k=1, k=n-1$ 일 때는 비교적 쉬우나 그 외의 경우는 매우 어렵다. 최근, Osaka [**Os1**, **Os3**, **Os4**] 는 $\tau_{5,2}$ 가 양사상임을 증명하였고, 특히, $n=4,5$ 이고 $1\le k\le n-2$ 일 때, $\tau_{n,k}$ 는 모두 극단적인

단자사상이며, 임의의 $n \geq 4$ 에 대하여 $\tau_{n,1}$ 이 모두 단자사상임을 보였다. 이러한 사상 $\tau_{n,k}$ 는 $\mathcal{P}(M_n)$ 의 구조를 연구하는데, 중요한 예가 되리라 여겨진다.

한편, Tomiyama [**TT83**, To85] 는 $\mathcal{P}(M_n)$ 의 기하학적 구조를 연구한 바 있는데, 구체적으로 언급하면, Choi 사상, 항등사상, 전치사상 들을 직선으로 연결하였을 때, 그 직선 위의 사상들이 어떤 성질을 갖는가 하는 것이다. M_4 의 경우에, 항등사상, Robertson 사상, $\tau_{4,1}$ 에 대하여 이러한 방법을 적용하는 것도, 의미있는 작업이라 여겨진다.

특히, 그의 결과를 이용하면, 4절에서 정의한 사상 $\Phi[a,b,c]$ 가 $a=b=c$ 일 때, $\Phi[a,a,a]$ 가 쉬바르쯔 사상일 필요충분조건은 $a \geq \frac{4}{3}$ 이고, $\Phi[a,a,a]_2$ 가 쉬바르쯔 사상일 필요충분조건은 $a \geq \frac{7}{3}$ 임을 알 수 있다. 따라서, 우리는 쉬바르쯔 부등식을 만족하지 않는 양사상의 예를 풍부하게 갖게 되는데, 일반적으로 $\Phi[a,b,c]$ 나 $\Theta[a,c_1,c_2,c_3]$ 가 쉬바르쯔 사상일 필요충분조건을 구하는 것도 의미있는 일이 될 것이고, [**Ro83c**] 에서 제기된 문제와도 관련이 있으리라 여겨진다.

아직도, 극단적인 양사상의 예가 매우 부족한 형편이지만, 특히, M_3 의 경우 극단적인 2- 양사상이 완전양사상이 된다는 것을 보이면, 임의의 M_3 사이의 양사상은 단자사상과 분해가능 사상의 합으로 표시된다는 결론을 얻을 수 있으므로 [**Os5**], 흥미있는 결과가 될 수 있을 것이다. 최근, Tsui [**Ts**] 는 $\mathcal{P}_k(M_n)$ 안에서 극단적 사상을 만드는 방법을 연구한 바 있다.

References

[An79] T. Ando, *Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Alg. Appl. **26** (1979), 203–241.

[An85] ________, *On some cyclic inequalities*, Seminar Note (1985).

[CKL] S.-J. Cho, S.-H. Kye and S. G. Lee, *Generalized Choi maps in 3-dimensional matrix algebras*, Linear Alg. Appl. (to appear).

[Ch72] M.-D. Choi, *Positive linear maps on C^*-algebras*, Canad. Math. J. **24** (1972), 520- 529.

[Ch74] ________, *A Schwarz inequality for positive linear maps on C^*-algebras*, Ill. J. Math. **18** (1974), 565- 574.

[Ch75a] ________, *Completely positive linear maps on complex matrices*, Linear Alg. Appl. **10** (1975), 285- 290.

[Ch75b] ———, *Positive semidefinite biquadratic forms*, Linear Alg. Appl. **12** (1975), 95–100.

[Ch80] ———, *Some assorted inequalities for positive linear maps on C^*-algebras*, J. Operator Theory **4** (1980), 271–285.

[Ch82] ———, *Positive linear maps*, Operator Algebras and Applications, Proc. Sympo. Pure Math. Vol. 38 - Part 2, Amer. Math. Soc., 1982, pp. 583–590.

[CL77] M.-D. Choi and T.-T. Lam, *Extremal positive semidefinite forms*, Math. Ann. **231** (1977), 1–18.

[CT83] M.-D. Choi and S.-K. Tsui, *Tracial positive linear maps of C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), 57–61.

[Da57] C. Davie, *A Schwarz inequality for convex operator functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 42–44.

[ES79] E. G. Effros and E. Størmer, *Poisitve projections and Jordan structure in operator algebras*, Math. Scand. **45** (1979), 127–138.

[Ga79] L. T. Gardner, *Linear maps of C^*-algebras preserving the absolute value*, Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979), 271–278.

[HS84] H. Hanche-Olsen and E. Størmer, *Jordan Operator Algebras*, Pitman, 1984.

[JR50] N. Jacobson and C. Rickart, *Homomorphisms of Jordan rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 479-502.

[JVW] P. Jordan, J. von Neumann and E. Wigner, *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism*, Ann. of Math. (2) **35** (1934), 29–64.

[Ka52] R. V. Kadison, *A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras*, Ann. of Math. (2) **56** (1952), 494-503.

[Ki80] E. Kirchberg, *The "Strong Kadison Inequality"of Woronowicz*, Rep. Math. Phys. **18** (1980), 111–116.

[Ky] S.-H. Kye, *A class of atomic positive maps in 3-dimensional matrix algebras*, preprint.

[Ma89] M. Mathieu, *Elementary operators on prime C^*-algebras.* I, Math. Ann. **284** (1989), 223–244.

[Os1] H. Osaka, *Indecomposable positive linear maps in low dimensional matrix algebras*, Linear Alg. Appl. (to appear).

[Os2] ———, *Positive projections on C^*-algebras*, Tokyo J. Math. (to appear).

[Os3] ———, *A series of extremal positive maps in low dimensional matrix algebras*, preprint.

[Os4] ———, *A series of absolutely indecomposable positive maps in matrix algebras*, preprint.

[Os5] ———, *A class of extremal positive maps in* 3×3 *matrix algebras*, preprint.

[Pa74] T. W. Palmer, *Characterizations of $*$-homomorphisms and expectations*, Proc. Amer. Math. Soc. **46** (1974), 265–272.

[Pf76] A. Pfister, *Hilbert's seventeenth problem and related problems in definite forms*, Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems, Proc. Sympo. Pure Math. Vol. 28 - Part 2, Amer. Math. Soc., 1976, pp. 483–489.

[PH81] J. A. Poluikis and R. D. Hill, *Completely positive and Hermitian-preserving linear transformations*, Linear Alg. Appl. **35** (1981), 1–10.

[Ro83a] A. G. Robertson, *Automorphisms of spin factors and the decomposition of positive maps*, Quart. J. Math. Oxford (2) **34** (1983), 87–96.

[Ro83b] ———, *Positive extensions of automorphisms of spin factor*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **94A** (1983), 71–77.

[Ro83c] ———, *Schwarz inequalities and decomposition of positive maps on C^*-algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **94** (1983), 291–296.

[Ro85] ———, *Positive projections on C^*-algebras and extremal positive maps*, J. London Math. Soc. (2) **32** (1985), 133–140.

[Ro86a] ———, *Decomposition of positive projections onto Jordan algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **96** (1986), 478–480.

[Ro86b] ———, *A JC-algebra which is not the range of a positive projection on a C^*-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 455–456.

[RY82] A. G. Robertson and M. A. Youngson, *Positive projections with contractive complements on Jordan algebras*, J. London Math. Soc. (2) **25** (1982), 365–374.

[Ss55] W. F. Stinespring, *Positive functions on C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 211–216.

[St63] E. Størmer, *Positive linear maps of operator algebras*, Acta Math **110** (1963), 233–278.

[St73] ———, *Positive linear maps of C^*-algebras*, Lecture Notes in Phys., Vol. 29, Springer-Verlag, 1973, pp. 85 –106.

[St80] ———, *Decomposition of positive projections on C^*-algebras*, Math. Ann. **247** (1980), 21–41.

[St82a] ———, *Positive projections with contractive complements on C^*-algebras*, J. London Math. Soc. (2) **26** (1982), 132–142.

[St82b] ________, *Decomposable positive maps on C^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 402-404.

[St87] ________, *Cones of positive maps*, Operator Algebras and Mathematical Physics, Contemp. Math. Vol. 62, . Amer. Math. Soc., 1987, pp. 345–356.

[TT83] T. Takasaki and J. Tomiyama, *On the geometry of positive maps in matrix algebras*, Math. Z. **184** (1983), 101–108.

[TT88] K. Tanahashi and J. Tomiyama, *Indecomposable positive maps in matrix algebras*, Canad. Math. Bull. **31** (1988), 308–317.

[Ta86] W.-S. Tang, *On Positive linear maps betweeen matrix algebras*, Linear Alg. Appl. **79** (1986), 33–44.

[To83] J. Tomiyama, On the transpose map of matrix algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 635–638.

[To85] ________, *On the geometry of positive maps in matrix algebras. II*, Linear Alg. Appl. **69** (1985), 169–177.

[To87] ________, *On the geometry of positive maps in matrix algebras*, Operator Algebras and Mathematical Physics, Contemp. Math. Vol. 62, . Amer. Math. Soc., 1987, pp. 357-364.

[Ts] S.-K. Tsui, *Extreme n-positive linear maps*, preprint.

[Wo76a] S. L. Woronowicz, *Nonextendible positive maps*, Comm. Math. Phys. **51** (1976), 243–282.

[Wo76b] ________, *Positive maps of low dimensional matrix algebras*, Rep. Math. Phys. **10** (1976), 165–183.

최근 Yamagami Shigeru는 7절에서 언급한 부등식이 항상 성립함을 보였다.

151-742 서울시 관악구 신림동 서울대학교 자연과학대학 수학과