Comm. Korean Math. Soc. 7(1992), No. 1, pp. 141–153

함수공간 작용소적분의 측도에 관한 안정성 정리

류근식, 장건수, 김정규, 박연희

1. 서론

1984년, Johnson은 작용소 값을 갖는 함수공간적분에 대한 유계 수렴 정리(bounded convergence theorem)를 증명하였다 [5]. 이것이 $L_2(R^n)$에서 유계 선형 작용소로서의 이 적분에 대한 최초의 안정성 정리이다. [7]에서, Johnson 과 Skoug 는 $\mathcal{L}(L_p(R^N), L_{p'}(R^N))$ 이론으로서의 이 적분에 대한 안정성 정리를 소개했다. 여기서, $1 < p \leq 2$, $1/p + 1/p' = 1$이고, N 은 $N < 2p/(2-p)$되는 자연수이다. $C_0(R)$을, R에서 정의되고, 복소수 값을 갖는 연속함수로서 ∞에서 함수값이 0인 함수들의 집합이라 하자. [1]에서는 $L_1(R)$에서 $C_0(R)$로 가는 유계 선형 작용소로서의 이 적분에 대한 안정성 정리를 얻었다. 위에서 언급한 논문에서 취급한 함수들은 모두 $(0,t)$에서 정의된 Lebesgue 측도와 관련된 함수들이다.

[6]에서는, Johnson 과 Lapidus 가 $(0,t)$에서의 Lebesgue 측도를 임의의 Borel 측도로 바꾸고, $\mathcal{L}(L_2(R^N), L_2(R^N))$ 이론으로서의 이 적분에 대한 안정성 정리를 얻었다. [3]에서는 $1 < p < 2$인 경우에 $\mathcal{L}(L_p(R^N), L_{p'}(R^N))$ 이론으로서의, 어떤 Borel 측도와 관계된 범함수들의 함수공간작용소적분의 포텐셜과 파동함수에 관한 안정성 정리를 증명하였다. 본 논문에서는 위의 범함수들의 함수공간 작용소적분의 측도에 관한 안정성 정리를 소개한다.

2. 정의와 기호

이 절에서는 다음 절에서 필요로 하는 기본 정의와 기호를 소개한다.

Received March 16, 1991.
본 연구는 한국과학재단과 문교부 특성화 연구비의 지원으로 수행되었음.

N 을 자연수들의 집합, R 을 실수들의 집합, C 를 복소수들의 집합이라고 하고,

$$C_+ \equiv \{\lambda \in C : \text{Re } \lambda > 0\}$$
$$C_+^{\sim} \equiv \{\lambda \in C : \lambda \neq 0, \ \text{Re}\lambda \geq 0\}$$

로 놓자. $1 < p < 2$ 일 때, p' 는 $1/p + 1/p' = 1$ 을 만족하는 실수이다. $\alpha = p/(2-p)$ 로 놓으면 $\alpha \in (1, \infty)$ 이고, N 은 $N < 2\alpha$ 로 제한되는 양의 정수라 하자. γ 는

$$2\alpha/(2\alpha - N) < \gamma < \infty$$

를 만족하는 실수라고 하자.

$1 \leq s < \infty$ 일 때, $L_s(\ R^N)$ 은 다음 두 조건을 만족하는 함수 Ψ 들의 집합이다.

(1) $\Psi : R^N \to C$ 는 Borel 측도 가능한 함수이다.

(2) $|\Psi|^s$ 는 R^N 에서 Lebesgue 측도 m_L 에 대해서 적분가능하다.

실제로, $L_s(R^N)$ 의 원소는, m_L 에 대해서 거의 모든 곳($m_L - a.e.$)에서 함수값이 같은 함수들의 동치족(equivalence class)이다.

$1 \leq s, t < \infty$ 일 때, $\mathcal{L}(L_s(R^N), L_t(R^N))$ 을, $L_s(R^N)$ 의 원소를 $L_t(R^N)$ 으로 보내는 유계선형 작용소들의 집합이라 하자.

$\lambda \in \ C_+^{\sim}$, $\Psi \in L_p(R^N)$, $\xi \in R^N$ 과 양의 실수 s 에 대해서,

$$(C_{\lambda/s}\Psi)(\xi) = (\lambda/2\pi s)^{N/2} \int_{R^N} \Psi(u) \exp\ \{-\lambda\|u - \xi\|^2/2s\} dm_L(u)$$

로 놓자. 여기서, N 이 홀수이면 $\lambda^{1/2}$ 는 실수부가 영보다 크거나 같은 $\lambda^{1/2}$ 을 택한다. Re $\lambda = 0$ 인 경우, 위의 적분은 L_p Fourier 변환 이론에서와 같이 평균적분(integral in the mean)으로 간주한다.

$t > 0$ 일 때, $M(0, t)$ 를 구간 $(0, t)$ 에서 정의되는 모든 Borel 복소수측도들의 집합이라하자.

모든 $\tau \in (0, t)$ 에 대해서 $\mu(\{\tau\}) = 0$ 되는 측도 $\mu \in M(o, t)$ 를 연속(continuous)이라하고, 다음 조건을 만족하는 측도 $\nu \in M(0, t)$ 를 불연속(discrete)이라 한다.

(i) $(0,t)$ 의 가산 부분 집합 $\{\tau_i : i = 1,2,\cdots\}$ 가 존재하고,
(ii) 절대수렴하는 복소수 수열 $\langle\omega_i\rangle$ 가 존재해서,

$$\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \delta_{\tau i}$$

를 만족한다. 여기서 δ 는 τ_i 에 집중된 Dirac 측도이다. 모든 측도 $\eta \in M(o,t)$ 는 연속인 측도 μ 와 불연속인 측도 ν 로 다음과 같이 유일하게 분해된다 [11].

$$\eta = \mu + \nu.$$

$M(o,t)^*$ 를 다음 조건을 만족하는 $M(0,t)$ 의 부분집합이라 하자.

$\nu \in M(0,t)$ 가 연속인 측도 μ 와 불연속인 측도 ν 로 분해될 때,
(a) Radon-Nikodym 도함수 $d|\mu|/dm$ 이 존재하고, 이 도함수는 본질적으로 유계(essentially bounded)이다. 여기서 m 은 $(0,t)$ 에서의 Lebesgue 측도이다.
(b) $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \delta_{\tau i}$ 일 때,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\omega_i| \tau_i^{-\gamma' \delta}$$

는 수렴한다. 여기서, $\delta = N/2\alpha,\ 1/\gamma + 1/\gamma' = 1.$ $\theta : [0,t] \times R^N \to C$ 가 Borel 측도 가능한 함수이고 $\eta \in M(0,t)^*$ 일 때,

$$\|\theta\|_{\alpha\gamma:\eta} \equiv \{\int_{(0,t)} \|\theta(s:\cdot)\|_\alpha^\gamma d|\eta|(s)\}^{1/\gamma}$$
$$L_{\alpha\gamma:\eta} \equiv \{\theta : \|\theta\|_{\alpha\gamma:\eta} < \infty\}$$

로 놓으면, $1 \leq s \leq \gamma \leq \infty$ 에 대해서,

$$L_{\alpha\gamma:\eta} \subset L_{\alpha s:\eta}$$

이다. $\theta \in L_{\alpha\gamma:\eta}$ 이고, η가 $\eta = \mu + \nu$로 분해되면

$$\theta \in L_{\alpha\gamma:\mu} \cap L_{\alpha\gamma:\nu}$$
$$\|\theta\|_{\alpha\gamma:\eta} = \|\theta\|_{\alpha\gamma:\mu} + \|\theta\|_{\alpha\gamma:\nu}$$

임은 쉽게 보일 수 있다. $\theta \in L_\alpha(R^N)$에 대해서, 함수

$$M_\theta : L_{p'}(R^N) \to L_p(R^N)$$

을 $M_\theta(\Psi) = \Psi\theta$로 정의하면 $M_\theta \in \mathcal{L}(L_{p'}(R^N), L_p(R^N))$이고 $\|M_\theta\| \le \|\theta\|_\alpha$ 이다. $\theta \in L_{\alpha\gamma:\eta}$에 대해서, $M_{\theta(s,\cdot)}$을 편의상 $\theta(s)$로 놓고 사용하기로 한다. 즉, $M_{\theta(s,\cdot)} = \theta(s)$.

$C[0,t]$를, $[0,t]$ 에서 정의되고 R^N-값을 갖는 연속함수들의 집합이라 하자.

$$C_0 \equiv C_0[0,t] \equiv \{x \in C[0,t] : x(0) = 0\}$$

를 Wiener 공간이라 하고, C_0에 N-차원 Wiener 측도 m_ω(즉, 1차원 Wiener 측도들의 N개의 곱)를 주었을 때, Wiener 측도 공간이라 한다.

$\lambda > 0, \Psi \in L_p(R^N)$, $\xi \in R^N$일 때 $F : C[0,t] \to C$에 대해서

$$[I_\lambda(F)\Psi](\xi) = \int_{C_0} F(\lambda^{-1/2}x + \xi)\Psi(\lambda^{-1/2}x(t) + \xi)dm_\omega(x)$$

로 놓자. 만일, $m_L - a.e.\ \xi \in R^N$에 대해서, $[I_\lambda(F)\Psi](\xi)$가 $L_{p'}(R^N)$에 존재하고, 대응관계 : $\Psi \to I_\lambda(F)\Psi$가 $\mathcal{L}(L_p(R^N), L_{p'}(R^N))$의 원소이면, 함수공간작용소 적분 $I_\lambda(F)$가 존재한다고 한다. $\lambda_0(0 < \lambda \le \infty)$가 주어지고, $0 < \lambda < \lambda_0$인 모든 λ에 대해서, $I_\lambda(F)$가 존재한다고 하자.

$$C_{+,\lambda_0} \equiv C_+ \cap \{z \in C : |z| < \lambda_0\}$$

에서 해석적이고 $(0, \lambda_0)$에서 $I_\lambda(F)$와 일치하는 함수로서, $\mathcal{L}(L_p(R^N), L_{p'}(R^N))$-값을 갖는 함수가 존재한다면, 이 함수를 λ와 연관된 F의 함수공간작용소적분이

라 한다. 이 경우, C_{+,λ_0}에 속하는 λ에 대해서 $I_\lambda(F)$가 존재한다고 한다. 만일 C_{+,λ_0}에 속하는 λ에 대해서 $I_\lambda(F)$가존재하고, 이 $I_\lambda(F)$가

$$C^{\sim}_{+,\lambda_0} \equiv C^{\sim}_{+} \cap \{z \in C : |z| < \lambda_0\}$$

에서 강한 연속(strongly continuous)이면, $C^{\sim}_{+,\lambda_0}$에 속하는 λ에 대해서 $I_\lambda(F)$가 존재한다고 한다. 특히 λ가 순허수일 때 $I_\lambda(F)$를 F의 해석적 Feynman 작용소적분이라 한다.

(Ω,μ)가 측도 공간이고, $L(X,Y)$를 Banach 공간 X에서 Banach 공간 Y로 보내는 유계선형 작용소들의 공간이라 하자.

$G : \Omega \to L(X,Y)$가 주어진 함수일 때, 각 $x \in X$에 대해서 $\{G(s)\}(x)$가 μ에 관해서 Bochner 적분가능 하다고 하자. 그러면, 각 $x \in X$에 대해서,

$$J(x) = (B)\int_\Omega \{G(s)\}(x)d\mu(s)$$

되는 선형 작용소 $J : X \to Y$가 존재한다. 여기서, $(B)\int_\Omega \{G(s)\}(x)d\mu(s)$는 Bochner 적분이다. 이 선형 작용소 J를

$$(BS)\int_\Omega G(s)(x)d\mu(s)$$

로 놓고, 이것을 강한 작용소로서의 Bochner 적분이라 한다. 특히 $X = Y$일 때, J를 G의 강한 적분(strong integral)이라 한다. ρ는 0보다 크거나 같은 정수들의 집합위에 정의되는 함수로서

$$\begin{cases} \rho(0) = 0 \\ \rho(n) = 1 : n \geq 1 \end{cases}$$

을 만족하는 함수라 하자. $0 < k < 1$이고 m은 자연수라 하자. $a < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < b$에 대해서,

$$\int_a^b \int_a^{s_m} \cdots \int_a^{s_1} \{(s_1 - a)(s_2 - s_1)\cdots(b - s_m)\}^{-k} ds_1 ds_2 \cdots ds_m$$
$$= \frac{(b-a)^{m-(m+1)k}\{\Gamma(1-k)\}^{m+1}}{\Gamma((m+1)(1-k))} \equiv E(a, b : m, k)$$

이다. 여기서 Γ는 감마 함수(gamma function)이다. 위의 적분값을 간단히 $E(a,b:m,k)$로 표시하기로 하자.

3. 측도에 관한 안정성 정리

함수 공간 적분론에서 다루는 범함수들 중에는 포텐셜, 파동함수, 측도 등과 관련되어 있는 함수들이 많다. [3]에서는 포텐셜과 파동함수에 관한 안정성 정리를 다루었다. 이 절에서는 측도에 관한 범함수들의 함수공간작용소 적분에 대한 안정성 정리를 증명하려고 한다.

$\eta \in M(0,t)^*$, $\theta \in L_{\alpha\gamma:\eta}$이고, η가 $\eta = \mu + \nu$로 분해되고 $\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \delta_{\tau_i}$라 하자. 모든 $y \in C[0,t]$에 대해서, $F_n(n = 1,2,\cdots)$을

$$F_n(y) = \{\int_{(0,t)} \theta(s,y(s))d\eta(s)\}^n$$

으로 정의하자. 각 $h \in N$에 대해서, σ는 $\{1,2,\cdots,h\}$의 치환(Permutation)으로서

$$\tau_{\sigma(1)} < \tau_{\sigma(2)} < \cdots < \tau_{\sigma(h)}$$

라고 하자. [2]로 부터 다음 보조 정리를 얻는다.

보조정리 1. $i = 1,2,\cdots$ 일때, $\theta(\tau_i,\cdot)$가 본질적으로 유계라 하자. 그러면 모든 $\lambda \in C_+^{\sim}$에 대해서 작용소 $I_\lambda(F_n)$이 존재하고,

$$I_\lambda(F_n) = n! \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\substack{q_0 + \cdots + q_h = n \\ q_0 \neq 0}} \frac{\omega_1^{q_1}\cdots\omega_h^{q_h}}{q_1!\cdots q_h!} \left[\sum_{j_1+\cdots+j_{h+1}=q_0} \cdot (BS)\int_{\Delta_{q_0:j_1\cdots j_{h+1}}} L_0 \circ L_1 \circ \cdots \circ L_n d\prod_{u=1}^{q_0} \mu(s_u) \right]$$

이다. 여기서, 각 $h \in N$ 에 대해서,

$$\begin{aligned}\Delta_{q_0:j_1\cdots j_{h+1}} =&\{(s_1,\cdots,s_{q_0}) \in (0,t)^{q_0} | 0 < s_1 < \cdots < s_{j_1} < \tau_{\sigma(1)} \\ &< s_{j_1+1} < \cdots < s_{j_1+j_2} < \tau_{\sigma(2)} < \cdots < s_{q_0} < t\}\end{aligned}$$

이고, $(s_1,\cdots,s_{q_0} \in \Delta_{q_0:j_1\cdots j_{h+1}},\ m \in \{0,1,2,\cdots,h\}$ 에 대해서,

$$\begin{aligned}L_m =&[\theta(\tau_{\sigma(m)})]^{q_{\sigma(m)}} \circ C_{\lambda/(s_{j_1+\cdots+j_{m+1}}-\tau_{\sigma(m)})} \circ \theta(s_{j_1+\cdots j_{m+1}})\circ \\ &\cdots \circ \theta(s_{j_1+\cdots+j_{m+1}}) \circ C_{\lambda/(\tau_{\sigma(m+1)}-s_{j_1+\cdots+j_{m+1}}})\end{aligned}$$

이다. 편의상, $\tau_{\sigma(0)} = 0$, $\tau_{\sigma(h+1)} = t$, $[\theta(\tau_{\sigma(0)})]^{q_{\sigma(0)}} = 1$ ($L_{p'}(R^N)$ 에서의 항등사상)으로 놓자. 또한,

$$\begin{aligned}\|I_\lambda(F_n)\| \le& n! \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\substack{q_0+\cdots+q_h=n \\ q_0\neq 0}} \frac{|\omega_1|^{q_1}\cdots|\omega_h|^{q_h}}{q_1!\cdots q_h!}(q_0!)^{-1/\gamma} \\ &\cdot \left[\frac{q_0+h)!}{q_0!h!}\right]^{-1/(2\gamma)} \left[\frac{|\lambda|}{2\pi}\right]^{(q_0+h+1)\delta} \left[\prod_{n=1}^{h} (\|\theta(\tau_{\sigma(0)},\cdot)\|_\infty^{q_n-1} \right.\\ &\left. \cdot \|\theta(\tau_{\sigma(0)},\cdot)\|_\alpha)^{\rho(q_n)}\right] (\operatorname{ess\,sup} d|\mu|/dm)^{q_0/\gamma'} (\|\theta\|_{\alpha\gamma:u})^{q_0} \\ &\cdot \left[\sum_{j_1+\cdots+j_{h+1}=q_0} \{\prod_{n=0}^{h} E(\tau_{\sigma(n)},\tau_{\sigma(n+1)} : j_{n+1} : \gamma'\delta)\}^{2/\gamma'}\right]^{1/2}\end{aligned}$$

위 부등식의 우변을 편의상 $B_n(|\lambda|)$ 로 놓고 간단하게

$$\|I_\lambda(F_n)\| \le B_n(|\lambda|)$$

로 쓰기로 한다. $\lambda_0 > 0$ 가 주어진 실수이고,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

이 $C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 에서 해석함수라 하자. 모든 $\lambda \in C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 에 대해서,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| B_n(|\lambda|) < \infty$$

라 가정하자. $\eta \in M(0,t)^*$, $\theta \in L_{\alpha\gamma:\eta}$ 일 때, 모든 $y \in C[0,t]$ 에 대해서 함수 F 를,

$$F(y) = f\Big(\int_{(0,t)} \theta(s, y(s)) d\eta(s)\Big)$$

로 놓자. 다음 보조정리는 [2]로 부터 얻는다.

보조정리 2. $i = 1, 2, \cdots$ 일 때, $\theta(\tau_i, \cdot)$ 가 본질적으로 유계라 하자. 그러면, 모든 $\lambda \in C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 에 대해서 $I_\lambda(F)$ 가 존재하고

$$I_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_\lambda(F_n)$$

이다. 여기서 F_n 은 보조정리 *1*에서 정의된 함수이다. 더욱이, 모든 $\lambda \in C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 에 대해서, 급수 $I_\lambda(F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_\lambda(F_n)$ 은 작용소 노름에 대해서 수렴하고,

$$\|I_\lambda(F)\| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| B_n(|\lambda|)$$

이다.

이제 측도에 관한 안정성 정리를 소개하기로 하자. $m = 1, 2, \cdots$ 일때, η 와 η_m 은 $M(0,t)^*$ 의 원소이고 η_m 은 전변동노름(total variation norm)에 대해서 η 로 수렴한다고 하자. θ 는 유계이고 $L_{\alpha\gamma:\eta} \cap \big(\bigcap_{m=1}^{\infty} L_{\alpha\gamma:\eta_m}\big)$ 의 원소라 하자. 모든 $y \in C[0,t]$ 에 대해서,

$$F_n(y) = \Big(\int_{(0,t)} \theta(s, y(s)) d\eta(s)\Big)^n$$

$$F_n^m(y) = \Big(\int_{(0,t)} \theta(s, y(s)) d\eta_m(s)\Big)^n$$

로 놓자. 또한 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 일 때, 모든 $y \in [0,t]$ 에 대해,

$$F(y) = f\left(\int_{(0,t)} \theta(s, y(s)) d\eta(s)\right)$$
$$F^m(y) = f\left(\int_{(0,t)} \theta(s, y(s)) d\eta_m(s)\right)$$

로 놓자.

정리 3. 다음 조건을 만족하는 양의 실수 λ_0 와 K 가 존재한다고 하자. 모든 $\lambda \in C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 와 양의 정수 m 에 대해서

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|I_\lambda(F_n^m)\| < K, \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|I_\lambda(F_n)\| < K.$$

그러면, 모든 $\lambda \in C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 와 양의 정수 m 에 대해서, $I_\lambda(F)$ 와 $I_\lambda(F^m)$ 이 존재한다. 또한, $\lambda \in C_{+,\lambda_0}$ 의 모든 긴밀부분집합(*compact subset*) 위에서, 작용소 노름(*operator norm*)에 대해서 $I_\lambda(F^m)$ 은 $I_\lambda(F)$ 로 수렴한다. 이 때의 수렴은 λ 에 대해서는 균등하게(*uniformly*) 수렴한다. 또한 모든 $0 < \lambda < \lambda_0$ 에 대해서,

$$\|I_\lambda(F^m) - I_\lambda(F)\| \leq (\lambda_0/2\pi t) T_m, \ m = 1, 2, \cdots$$

이 성립한다. 여기서,

$$T_m = \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| : |z_1 - z_2| \leq M_m\}$$
$$M_m = \|\eta - \eta_m\| \cdot \|\theta\|_\infty$$

$\|\theta\|_\infty$ 은 $(0,t) \times R^N$ 에서 θ 의 최소상계 노름이다.

증명: 보조정리 2로 부터, $m = 1, 2, \cdots$ 일 때, 모든 $\lambda \in C^{\sim}_{+,\lambda_0}$ 에 대해서 $I_\lambda(F)$ 와 $I_\lambda(F^m)$ 은 존재한다.

$x \in C_0[0,t],\ \lambda \in C_+^{\sim}, \xi \in R^N$ 에 대해서,

$$
\begin{aligned}
&|\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s)+\xi)d\eta_m(s) - \int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s)+\xi)d\eta(s)| \\
&\le \|\eta - \eta_m\| \cdot \|\theta\|_\infty = M_m.
\end{aligned}
$$

따라서, $\Psi \in L_p(R^N),\ \xi \in (R^N),\ 0 < \lambda < \lambda_0$ 에 대해서,

$$
\begin{aligned}
&|f\left(\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s)+\xi)d\eta_m(s))\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi\right) \\
&\quad - f\left(\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s)+\xi)d\eta(s))\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi\right)| \\
&\quad \le \sup\{|f(z_1) - f(z_2)| : |z_1 - z_2| \le M_m\} \cdot |\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi)| \\
&\quad = T_m|\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi)|. \\
&\|I_\lambda(F^m)\Psi - I_\lambda(F)\Psi\|_{p'} \\
&\quad \le \| \int_{C_0[0,t]} T_m|\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi)|dm_w(x)\|_{p'} \\
&\quad = T_m\|(C_{\lambda/t}|\Psi|)(\xi)\|_{p'} \\
&\quad \le T_m\|\Psi\|_{p'} \cdot \lambda_0/(2\pi t).
\end{aligned}
$$

정리 4. $m = 1, 2, \cdots$ 일 때, η 와 η_m 은 $M(0,t)^*$ 의 원소이고, η_m 은 η 로 약한 수렴(*weakly converge*)한다고 하자. 즉, $(0,t)$ 에서 유계이고 연속인 임의의 함수 b 에 대해서, $m \to \infty$ 일 때,

$$
\int_{(0,t)} b(s)d\eta_m(s) \to \int_{(0,t)} b(s)d\eta(s)
$$

이다. θ 는 $(0,t) \times R^N$ 에서 유계이고 *Borel* 측도 가능한 함수로서 $\eta(D_\theta) = 0$ 이라하자. 여기서 D_θ 는 어떤 u 에 대해서, $\theta(s,u)$ 가 s 에서 연속이 아닌 점 s 들

의 집합이다. 정리 3에서 주어진 함수 f가 정함수(*entire function*)라고 가정하자. 그러면 C_+의 모든 긴밀부분집합(*compact subset*) 위에서, $m \to \infty$일때, $I_\lambda(F^m)$은 $I_\lambda(F)$로 강하게(*strongly converge*) 한다. 이 때의 수렴은 λ에 대해서는 균등하게(*uniformly*) 수렴한다.

증명: $\lambda > 0$, $\xi \in R^N$, $x \in C_0[0,t]$라 하자. 그러면, [10, Proposition 1.3.5]에 의해서, $m \to \infty$일 때,

$$\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s) + \xi)d\eta_m(s) \to \int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s) + \xi)d\eta(s)$$

이다. f가 연속이므로, $\Psi \in L_p(R^N)$에 대해서, $m \to \infty$일 때,

$$\begin{aligned} &f(\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s) + \xi)d\eta_m(s))\Psi(\lambda^{-1/2}x(t) + \xi) \\ &\to f(\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s) + \xi)d\eta(s))\Psi(\lambda^{-1/2}x(t) + \xi) \end{aligned}$$

이다. 다음 성질은 잘 알려진 사실이다 [8].

V가 노름공간(normed space)일 때, $E \in V$가 약하게 유계(weakly bounded)일 필요충분조건 E가 V의 노름(norm)에 대해서 유계이다. 따라서, $\sup_m \|\eta_m\| < \infty$이고,

$$\begin{aligned} &|\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s) + \xi)d\eta_m(s) \\ &\le (\sup_{(s,u)} |\theta(s,u)|)(\sup_m \|\eta_m\|) \equiv M < \infty. \end{aligned}$$

그러므로,

$$\begin{aligned} &|f(\int_{(0,t)} \theta(s, \lambda^{-1/2}x(s) + \xi)d\eta_m(s))\Psi(\lambda^{-1/2}x(t) + \xi)| \\ &\le C|\Psi(\lambda^{-1/2}x(t) + \xi)| \end{aligned}$$

이다. 여기서,

$$C = \sup_{|Z| \le M} f(z) < \infty$$

$$|\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi)| \text{는 Wiener 적분가능하고}$$

$$\int_{C_0[0,t]} |\Psi(\lambda^{-1/2}x(t)+\xi)dm_w(x) = (C_{\lambda/t}|\Psi|)(\xi).$$

우월수렴정리(dominated convergence theorem)에 의해서, $a.e.\ \xi \in R^N$에 대해서, $m \to \infty$일 때

$$[I_\lambda(F^m)\Psi](\xi) \to [I_\lambda(F)\Psi](\xi)$$

이다. 더우기,

$$|[I_\lambda(F^m)\Psi](\xi)| \le C(C_{\lambda/t}|\Psi|) \in L_{p'}(R^N).$$

우월수렴정리를 한번 더 적용하면, 모든 $\lambda > 0$에 대해서, $m \to \infty$일 때,

$$I_\lambda(F^m)\Psi \to I_\lambda(F)\Psi$$

이다. 이 때의 수렴은 $L_{p'}(R^N)$의 원소로서 수렴하는 것이다. 모든 $\lambda \in C_+$에 대해서, $I_\lambda(F^m)\Psi$가 해석적이고,

$$\|I_\lambda(F^m)\Psi\| \le C|\lambda|/(2\pi t).$$

이다. λ는 임의로 택했으므로, Vitali 정리[4, Theorem 3.14.1]에 의해서 증명이 끝난다.

References

[1] J.S. Chang, *Stability theorems for the Feynman integral; the $\mathcal{L}(L_1(R), C_0(R))$ theory*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo Serie II **17** (1987), 135–151.

[2] K.S. Chang and K. S. Ryu, Analytic operator-valued function space integal as an $\mathcal{L}(L_p, L_{p'})$ theory, to apper in Trans. Amer. Math. Soc.

[3] K.S. Cahang and K.S. Ryu, *Stability theorems for the operator-valued function space integral*, to appear in the Proceedings of the Conference on Gaussian Random Fields, World Scientific Pub. Co..

[4] E. Hille and R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-group*, A.M.S. Coloq Pub, 1957.

[5] G. W. Johnson, *A bounded convergence theorem for the Feynman integral*, J. Math. Phy. **25** (1984), 1323–1326.

[6] G. W. Johnson and M.L.Lapidus, *Generalized Dyson series, Generalized Feynman Diagram, the Feynman integral and Feynman's operational Calculus*, Mem. Amer. Math. Soc.62, **351** (1986).

[7] G. W. Johnson and D.L.Skoug, *Stability theorem for the Feynman integral*, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo, Serie II **8** (1985), 361–377.

[8] L.V.Kantorovich and G.P.Akilov, *Functional Analysis*, Translated by H.L.Silcock, 2nd edition Pergaman Press, 1982.

[9] T. Kato, *Pertubation Theory for Linear Operator*, Spinger-Verlag, New-York, 1966.

[10] W. Linda, *Probability in Banach Space*, John Wiley & Sons, New-York, 1986.

[11] M.Reed and B.Simon, *Methods of Mathematical Physics Vol I, Rev. and enl ed.*, Academic Press, New York, 1980.

한남대학교
연세대학교
전북대학교