

EVP方法을 이용한 緩傾斜 領域에서의 波浪變形 數值模型

EVP Models for Wave Transformation in Regions of Slowly Varying Depth

吳性澤* · 李吉成** · 李哲應***

Oh, Seong Taek · Lee, Kil Seong · Lee, Chul Eung

Abstract

Error vector propagation method is applied to the elliptic mild slope equation in order to reduce the computation time. Results from the elliptic, parabolic, and hyperbolic models are compared with experimental data for an elliptic shoal. Also, results of the elliptic and hyperbolic models are compared with experimental data for a detached breakwater. As a result of applying this model, it is concluded that the present model satisfactorily reduces the computation time compared with other numerical models. In the accuracy of solutions, there are some oscillations but the trend compares well with other models.

요 지

計算時間의 短縮을 위하여 EVP(Error Vector Propagation) 方法을 사용하여 橢圓形 緩傾斜方程式을 解析하였다. 數值實驗은 水中에 橢圓形 여울이 존재하는 緩傾斜 海域에서 수행하였으며, 拋物線形 模型 및 雙曲線形 模型을 같이 계산하여 각각의 結果를 水理實驗 結果와 比較하였다. 또한 離岸堤가 설치된 波浪場의 경우에도 雙曲線形 模型의 結果 및 水理實驗 結果와 比較하였다. 適用結果 計算時間 면에서는 다른 模型에 비하여 만족스럽게 短縮할 수 있었으며, 解의 正確性에서는 약간의 振動現象이 나타나지만 그 傾向은 잘 일치하였다.

1. 緒 論

深海에서 발달된 波는 淺海쪽으로 진행하면서 여러가지 變形을 하는데 이와같은 변형에는 水深變化에 의한 屈折 및 淺水變形, 構造物에 의한 回折 및 反射등이 있다. 이러한 波浪變形에 대한 연구는 위

에서 언급한 모든 현상을 복합적으로 해석하여야 하지만 여러 制約條件에 의하여 變形現象을 단순화하여 해석하여 왔다. 즉, 研究의 초기 단계에서는 여러 현상중 한 두 가지만을 고려하였으나 그후 屈折과 回折을 동시에 고려할 수 있는 橢圓形 緩傾斜方程式이 Berkhoff⁽³⁾에 의하여 제안되었으며, Ebersole⁽⁸⁾은 橢圓形 緩傾斜方程式을 有限差分化하여 反射效果를 무시한 단일 進行波에 대한 波浪變形 模型을 수립하였다. 그러나 橢圓形 緩傾斜方程式은

* 正會員 · 서울大學校 大學院 土木工學科 工學碩士

** 正會員 · 서울大學校 工科大學 土木工學科, 副教授

*** 正會員 · 서울大學校 大學院 土木工學科, 博士課程

部分反射 境界나 入射境界 取扱에 곤란한 점이 있어 Radder,⁽¹⁷⁾ Lozano와 Liu,⁽¹⁴⁾ Liu와 Tsay⁽¹²⁾ 등이 反射波와 入射波를 따로 취급하는 방법으로 橢圓形 緩傾斜方程式을 拋物線形 緩傾斜方程式으로 변형하였다. Liu와 Tsay⁽¹³⁾는 이 식에다 碎波帶에서 底面 摩擦에 의한 에너지 減衰를 고려하여 單一 進行波의 變形을 解析하였다. 그러나 이와 같은 拋物線形 緩傾斜方程式도 屈折量이 클 경우 오차가 커지는 단점을 가지고 있다.

반면 屈折, 回折 및 反射를 모두 포함하는 모형으로 선형화된 運動方程式과 連續方程式을 水深方向으로 積分하여 해석하는 數值 波動解析法이 Ito와 Tanimoto⁽⁹⁾에 의하여 제안되었다. 그러나 이 방법도 수치계산이 용이한 반면 淺水變形이 제대로 반영되지 않아 碎波帶내에서 적용할 수 없는 문제점을 가지고 있다. 따라서 Maruyama와 Kajima⁽¹⁵⁾는 橢圓形 緩傾斜方程式을 線流量과 水面變位로 나타내어지는 雙曲線形 緩傾斜方程式을 제안하였고 Copeland⁽⁶⁾도 Booij⁽⁵⁾의 雙曲線形 緩傾斜方程式에서 흐름과의 共存場을 무시하여 위의 雙曲線形 緩傾斜方程式과 같은 형태의 식을 제안하였다. 또한 최근에 Panchang 등⁽¹⁶⁾은 橢圓形 模型을 이용하여 넓은 영역을 해석하고자 EVP 방법을 제시하였다. 이 방법은 橢圓形 模型을 해석할 때 소요되는 많은 계산시간을 효과적으로 短縮할 수 있을 뿐만 아니라 拋物線 模型에서 고려할 수 없는 港內 岸壁, 防波堤 등에 의하여 발생하는 反射 散亂波의 영향을 고려할 수 있다. 또한 雙曲線形 模型이 일반적으로 좁은 영역에서 사용되는데 반해 EVP 방법⁽¹⁸⁻²⁰⁾은 보다 넓은 영역에의 適用이 가능하다는 長點이 있다. 그러나 拋物線形 模型과 마찬가지로 계산된 波向이 처음에 가정된 波浪의 主 進行方向으로부터 크게 벗어나지 않아야 한다는 制約條件을 가지고 있다.

국내에서는 鄭信澤 等⁽²⁾이 흐름이 존재하는 緩傾斜 海역에서의 波浪變形에 대해 變分原理를 적용하여 線形 規則波에 대한 雙曲線形 波動方程式을 유도하였다.

本 研究에서는 橢圓形 緩傾斜方程式을 數值解析할 때 가장 문제시되고 있는 計算時間의 短縮을 위하여 EVP 方法을 사용하여 해석하였다. 數值實驗은 본 방법을 제안하면서 Panchang 등이 수행한 橢圓形

여울이 존재하는 환경사 海역 뿐만아니라, 이안제가 설치된 파랑장에 대하여도 적용하였다. 또한 각각의 적용대상에 대하여 拋物線形 模型, 雙曲線形 模型을 같이 계산하였다. 즉, 타원형 여울이 존재하는 환경사 海역에 대해서는 Crank-Nicolson 方法에 의한 포물선형 모형,⁽¹¹⁾ Leap-Frog 方法에 의한 雙曲線形 模型을 같이 계산하여 각각의 結果들을 水理實驗 結果⁽⁴⁾와 비교하였다. 또한 離岸堤가 설치된 波浪場의 경우에도 橢圓形 模型과 雙曲線形 模型의 結果를 水理模型의 結果⁽²¹⁾와 비교하였다.

2. 波浪變形 模型

2.1 支配 方程式

환경사영역에서 波浪의 屈折 및 回折에 대한 緩傾斜方程式은 Berkhoff⁽³⁾에 의하여 처음 유도되었으며 이는 다음 식 (1)로 표시되는 橢圓形 偏微分方程式이다.

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \Phi) + k^2 CC_g \Phi = 0 \quad (1)$$

여기서 $\nabla = (\partial/\partial x)_i + (\partial/\partial y)_j$, $\Phi(x, y)$ 는 定常狀態의 平均海面에서의 速度 포텐셜이고, k 는 波數($=2\pi/L$), C 는 位相速度($=\sigma/k$), C_g 는 群速度($=\partial\sigma/\partial k$)이다. 식 (1)은 橢圓形 偏微分方程式으로 境界值 問題가 되어 對象領域 '경계상에서 조건이 주어져야만 한다. 따라서 많은 연구자들이 有限要素法으로 數值模型化 하였으나 對象領域이 큰 경우에 많은 계산시간을 요하는 短點이 있다. 本 研究에서는 계산시간의 단축을 위하여 식 (1)을 다음 식 (4)와 같이 변형한 뒤⁽¹⁶⁾ 有限 差分法으로 數值模型을 구성하고자 한다.

먼저 식 (1)의 첫항을 전개한 뒤 양변을 $(CC_g)^{1/2}$ 로 나누면 다음 식 (2)가 된다.

$$2\nabla\Phi \cdot \nabla(CC_g)^{1/2} + (CC_g)^{1/2} \nabla^2 \Phi + (CC_g)^{1/2} k^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

또한 식 (2)에 $[\Phi \nabla^2 (CC_g)^{1/2} - \Phi \nabla^2 (CC_g)^{1/2}]$ 을 더하고 다음의 식 (3)을 같이 이용하면 식 (4)를 얻는다.

$$\nabla^2 [\Phi (CC_g)^{1/2}] = (CC_g)^{1/2} \nabla^2 \Phi + 2\nabla\Phi \cdot \nabla(CC_g)^{1/2} - \Phi \nabla^2 (CC_g)^{1/2} \quad (3)$$

$$\nabla^2 \phi + k_c^2 \phi = 0 \quad (4)$$

여기서 $\varphi = \Phi(CC_p)^{1/2}$, $k_c^2 = k^2 - \nabla^2(CC_p)^{1/2}/(CC_p)^{1/2}$ 이다.

2.2 境界條件

$x=0$ 에서 入射波 成分 $\varphi_i = A_i \exp(ik_c x)$ 에서 $A_i = 1$ 로 하고 反射波 成分 $\varphi_r = B \exp(-ik_c x)$ 라 가정한다. 여기서 $\varphi = \varphi_i + \varphi_r$ 이므로 반사와 성분 φ_r 은 $\varphi - \varphi_i$ 와 같다. 따라서

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= ik_c(\varphi_i - \varphi_r) \\ &= ik_c(\varphi_i - \varphi + \varphi_i) \end{aligned}$$

$x=0$ 에서 $\varphi_i = 1$ 이 되므로 다음 式 (5)와 같은 入射境界條件을 얻을 수 있다.⁽⁴⁾

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ik_c(2 - \varphi) \quad (5)$$

또한 構造物 및 海岸線 등에서 발생하는 反射條件의 경우로서 完全 反射境界는 다음 式 (6)이고, 放射境界 條件은 다음 式 (7)과 같다.⁽¹⁰⁾

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - ik_c \varphi = 0 \quad (7)$$

3. 有限差分解析

3.1 支配 方程式의 差分化

式 (1)에서 유도된 式 (4)를 支配 方程式으로하여 EVP 方法을 사용하여 계산한다. 式 (4)의 差分式은 다음 式 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi(p-1, q) - 2\varphi(p, q) + \varphi(p+1, q)}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{\varphi(p, q-1) - 2\varphi(p, q) + \varphi(p, q+1)}{(\Delta y)^2} \\ & + k_c^2(p, q)\varphi(p, q) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

여기서 p, q 는 그림 1에 나타난 것처럼 각각 x, y 축의 格子点 위치이다.

3.2 安定 條件

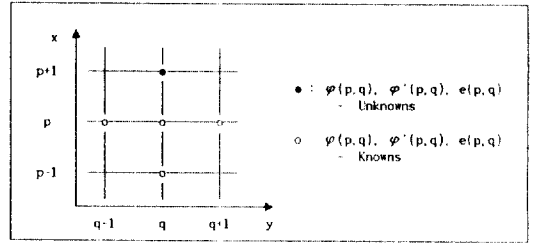


그림 1. Computational grid

式 (4)의 k_c 가 일정하다고 가정할 경우, 式 (4)는 指數函數 形態의 解를 가지게 되며 다음 式 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\varphi(p, q) = \varphi_p \exp[\ln(q-1)\Delta y] \quad (9)$$

여기서 $\varphi_p = \exp[im(p-1)\Delta x]$, $m^2 + n^2 = k_c^2$ 이다.

따라서 式 (9)를 式 (8)에 대입하면 다음 式 (10)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{p+1} - 2\varphi_p + \varphi_{p-1}}{(\Delta x)^2} + \varphi_p \left[\frac{2\cos(n\Delta y) - 2}{(\Delta y)^2} \right] \\ & + k_c^2 \varphi_p = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

또한 增幅比 G 를 다음 式 (11)과 같이 정의할 경우, 式 (10)은 아래의 式 (12)가 된다.

$$G = \varphi_{p+1}/\varphi_p \quad (11)$$

$$G^2 + BG + 1 = 0 \quad (12)$$

여기서 $B = k_c^2(\Delta x)^2 - 4(\Delta x/\Delta y)^2 \sin^2 \alpha - 2$, $\alpha = n\Delta y/2$ 이다.

式 (12)를 위해서 다음 式 (13)과 같은 安定條件을 유도할 수 있다.⁽⁷⁾

$$-2 \leq k_c^2(\Delta x)^2 - 4\sin^2 \alpha (\Delta x/\Delta y)^2 - 2 \leq 2 \quad (13)$$

그런데 式 (13)은 Δx 와 Δy 가 다음의 조건을 만족할 때 성립된다.

$$\begin{aligned} \Delta x &\leq L/\pi \\ \Delta y &\geq L/\pi \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $L = 2\pi/k_c$ 이다.

式 (14)의 안정조건에서 Δx 는 다른 수치모델의

안정조건과 유사한 형태를 갖고 있지만, Δy 는 일반적인 안정조건과 다르다. 따라서 계산시간을 줄일 목적으로 Δy 를 크게하면 해의 정확성이 떨어지며, 그 반대의 경우도 발생하므로 이의 선택에 주의하여야 한다.

3.3 計算 方法

$p=2$ 에서 $\phi(2, q) = \phi'(2, q) + e(2, q)$ 라 두고 $\phi'(2, q)$ 의 값을 임의로 지정하면 誤差 $e(2, q)$ 가 발생하게 된다. 먼저 $\phi'(2, q)$ 의 값으로부터 入射 境界條件 식 (5)를 차분한 다음 식 (15)를 이용하여 $\phi'(1, q)$ 을 구한다.

$$\phi'(1, q) = [\phi'(2, q) - 2ik_c \Delta x] / (1 - ik_c \Delta x), \quad 2 \leq q \leq N-1 \quad (15)$$

그후 식 (8)을 이용하여 $p=3$ 에서 $p=M$ 까지의 $\phi'(p, q)$ 를 구할 수 있다. 側面境界는 식 (6)을 이용하면 다음 식 (16)과 같이 된다. 이때 M 과 N 은 각각 x, y 방향의 전 격자수이다.

$$\begin{aligned} \phi'(p, 1) &= \phi'(p, 2) \\ \phi'(p, N) &= \phi'(p, N-1) \end{aligned} \quad (16)$$

이렇게 하여 임의로 추정된 $\phi'(2, q)$ 값에 의하여 全領域의 $\phi'(p, q)$ 의 값이 계산된다. 다음 $p=M$ 에서의 境界條件 식 (7)을 差分式으로 나타내면 다음 식 (17)이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\phi(M, q) - \phi(M-1, q)}{(\Delta x)} \\ - ik_c(M-1, q)\phi(M-1, q) = 0, \quad \text{for all } q \end{aligned} \quad (17)$$

式 (17)은 $\phi = \phi' + e$ 의 관계에 의하여 다음 식 (18)로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\phi'(M, q) - 1\phi'(M-1, q)}{(\Delta x)} - ik_c(M-1, q)\phi'(M-1, q) \\ = - \left[\frac{e(M, q) - e(M-1, q)}{(\Delta x)} - ik_c(M-1, q)e(M-1, q) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 式 (18)의 우변은 計算領域 끝부분($p=M$)의 境界條件에서 추정된 ϕ' 에 의하여 발생된 誤差項이다. 式 (18)을 $A(q) = B(q)$ 로 표시하고, $e(2, q) = E(q)$ 라 표시하면 다음 式 (19)가 성립하게 된다.

$$[B] = [C][E] \quad (19)$$

여기서 $[C]$ 는 相關行列이다.

式 (19)에서 $[B]$ 는 式 (18)에서 이미 알고 있는 값이고, 未知의 $[E]$ 를 구하기 위해서는 $[C]$ 를 알아야 한다. $[C]$ 를 구하기 위해서는 먼저 $E(1)$, 즉 $e(2, 2)$ 를 1로 두고 다음의 EVP 方程式 (20)과 境界條件 (21)을 이용하여 $e(p, q)$ 를 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} e(p+1, q) &= [2 - k_c(p, q)^2 \Delta x^2 + 2(\Delta x / \Delta y)^2] e(p, q) \\ &\quad - (\Delta x / \Delta y)^2 [e(p, q-1) + e(p, q+1)] \\ &\quad - e(p-1, q) \end{aligned} \quad (20)$$

$$e(1, q) = e(2, q) / (1 - ik_c \Delta x), \quad 2 \leq q \leq N-1 \quad (21)$$

따라서 式 (19)로부터 $E(q)$ 를 구하여 $\phi(2, q) = \phi'(2, q) + e(2, q)$ 의 관계에서 $\phi(2, q)$ 를 구할 수 있다. 여기서 구한 $\phi(2, q)$ 의 값을 이용하여 式 (8)과 境界條件들을 이용하면 全 경계상에서 $\phi(p, q)$ 를 구할 수 있다.⁽¹⁷⁾

EVP 방법은 反復法이 아니라 直接法이기 때문에 計算時間을 상당히 감소시킬 수 있다는 長點이 있다. 그림 2에 EVP 방법의 프로그램 흐름도를 나타내었다.

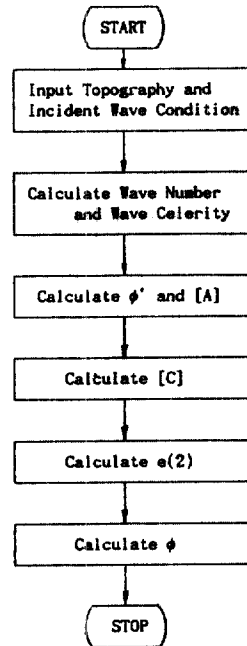


그림 2. Flow chart of EVP method

4. 適用 및 檢討

4.1 橢圓形 水中여울

Berkhoff 等은 海底地形이 복잡한 곳에서 規則波의 變形을 알아보기 위하여 橢圓形 水中여울을 가지는 波浪場에 대한 水理實驗을 실시하였다. 水槽의 底面은 그림 3(b)에서 볼수 있듯이 橢圓形 水中여울이 傾斜 0.02인 평면상에 놓인 형태이다. 等水深線은 그림 3(a)에서 斜線으로 표시하였다. 入射 境界面에서 수심은 0.45m로 일정하며 入射波의 波高(H_0)는 0.0464m, 週期(T)는 1초이다. 또한 差分 格子間隔과 格子點數는 표 1과 같이 설정하였다.

이때 格子間隔은 式 (14)와 기타 安定條件^(11,19)에

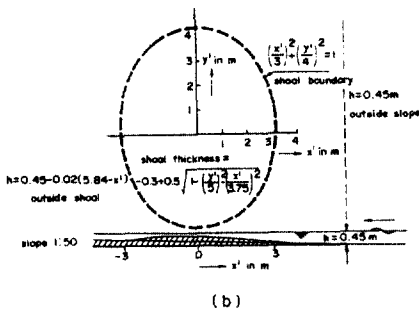
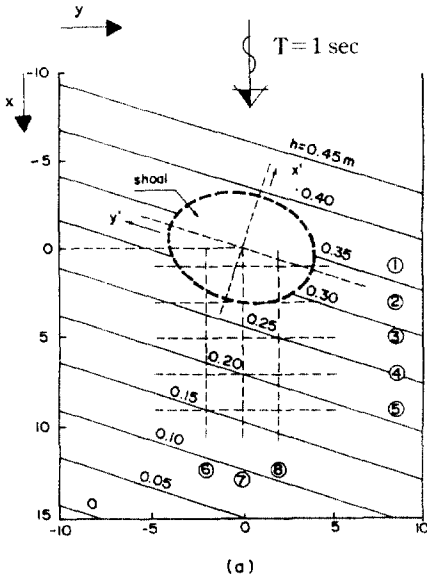


그림 3. Bottom configuration of hydraulic model (Berkhoff et al., 1982)

의하여 설정하였다. 雙曲線形 模型은 40週期까지 수행하였는데 이는 35週期와의 波高比 차이가 1% 미만이면 定常狀態로 收斂하였다고 판단하였기 때문이다.

각 모형의 CPU시간을 표 2에 나타내었다. 먼저 橢圓形 模型은 표 2에 나타낸 것처럼 計算時間面에서 가장 적게 소요되고 있다. 이는 計算方法의 特性上 行列의 계산이 1회이고 安定條件式 (14)에 의하여 Δy 의 間隔을 크게 할 수 있기 때문이다. 計算結果는 x방향의 양쪽 境界에서 誤差를 가지고 전체를 계산하기 때문에 x방향으로의 振動이 심하게 나타나고 있음을 그림 4에서 알 수 있다. 또한 그림 4에 그림 3(a)에 표시된 斷面 ①-⑧의 波高比를 水理模型의 結果와 함께 나타내었다. 대체적으로 비슷한 傾向을 가지고 있음을 알 수 있다. 따라서 EVP 方法에 의하여 효율적인 계산을 수행할 수 있을 것으로 판단된다.

4.2 離岸堤

Watanabe와 Maruyama⁽¹⁹⁾는 構造物에 의한 反射波가 존재하는 중첩된 波浪場을 해석하기 위하여 離岸堤가 설치된 模型에서의 水理實驗을 행하였다. 모형의 자세한 형태는 그림 5와 같으며, 주요 入力資料로 入射波高(H_0)는 0.01m, 週期(T)는 1.2초이다. 差分의 格子間隔과 格子點數는 표 3과 같다.

표 1. Grid size and total number of grid (elliptic shoal)

Model	Grid size	Total no. of grid
Elliptic	$\Delta x=0.10m, y=0.5m$	$M=223, N=41$
Parabolic	$\Delta x=0.25m, \Delta y=0.25m$	$M=90, N=81$
Hyperbolic	$\Delta x=0.15m, \Delta y=0.25m, \Delta t=0.05 \text{ sec}$	$M=150, N=81$

표 2. Comparison of CPU time (IBM PC, 386DX)

Model	CPU time
Elliptic	36.0 sec
Parabolic	416.3 sec
Hyperbolic	2812.6 sec

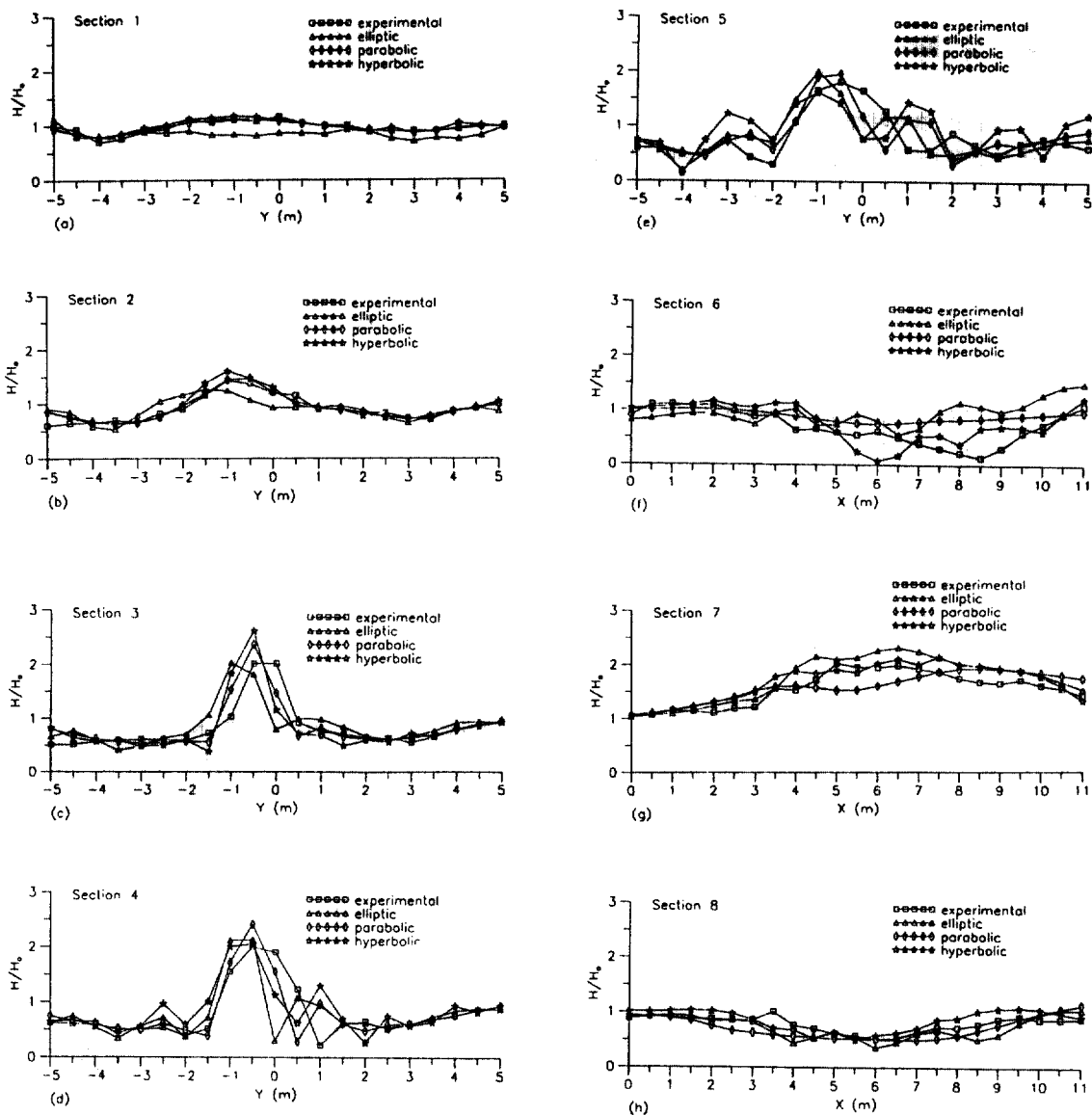


그림 4. Comparison between numerical model results and experimental data for the elliptic shoal

여기서 拋物線形 模型은 反射波가 존재하는 곳에서의 적용이 불가능하므로 제외시켰다. 雙曲線形 模型의 경우는 50週期까지 수행하였으며 이는 앞에서 언급한 것처럼 45週期和 50週期와의 波高比 차이가 1% 미만으로 收斂하였기 때문이다.

두 모형의 계산시간을 표 4에 나타내었다. 또한 그림 6(a)~(c)에서 볼 수 있듯이 橢圓形 模型은 y 방향으로의 格子間隔이 너무 크기 때문에 대체적인

표 3. Grid size and total number of grid (detached breakwater)

Model	Grid size	Total no. of grid
Elliptic	$\Delta x = 0.025\text{m}, \Delta y = 0.4\text{m}$	M=201, N=11
Hyperbolic	$\Delta x = 0.05\text{m}, \Delta y = 0.05\text{m},$ $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$	M=107, N=81

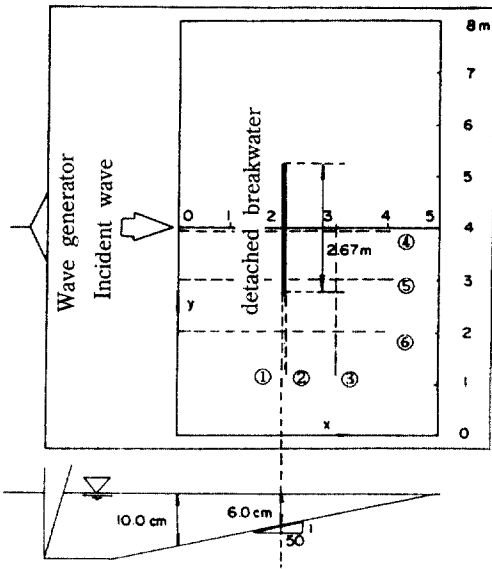


그림 5. Bottom configuration of hydraulic model (Watanabe & Maruyama, 1986)

표 4. Comparison of CPU time (IBM PC, 386DX)

Model	CPU time
Elliptic	9.7 sec
Hyperbolic	7523.7 sec

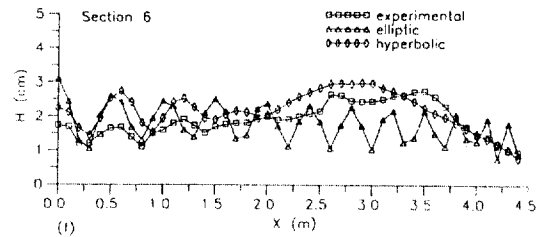
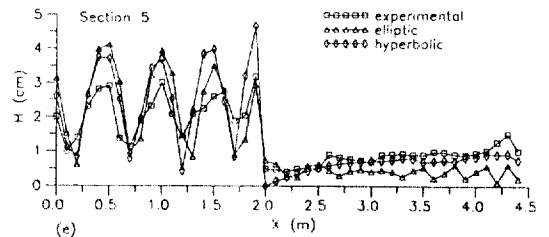
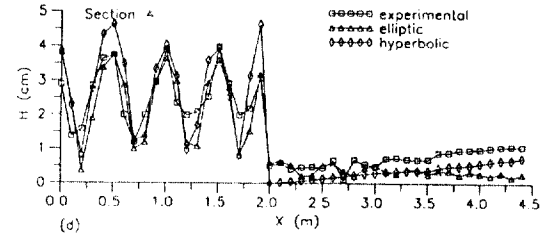
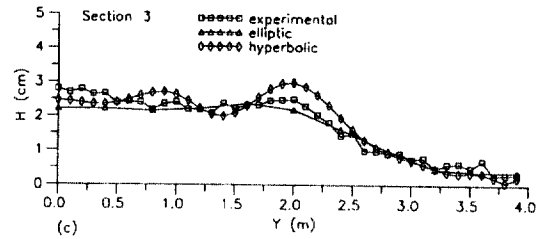
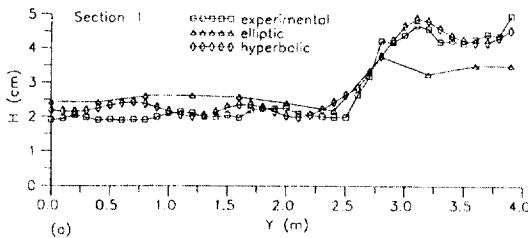
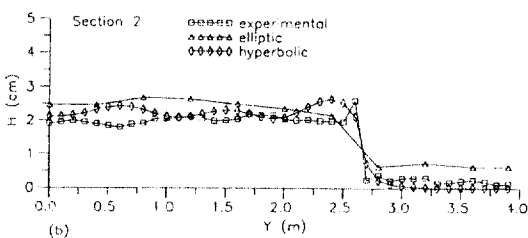


그림 6. Comparison between numerical model results and experimental data for the detached breakwater

경향은 비슷하지만 實驗値와 雙曲線形 模型의 결과와 비교하면 그 변화가 완만하게 나타나고 있다. x방향의 결과는 그림 6(d)~(f)에 나타난 것처럼 심한 振動現象을 보이고 있다.

5. 結論

橢圓形 緩傾斜方程式을 해석할때 문제시되는 과도한 計算時間을 短縮하기 위하여 橢圓形 水中여울이 존재하는 波浪場과 離岸堤가 설치된 波浪場을



EVP 방법을 이용하여 解析하였다. 拋物線形 模型, 雙曲線形 模型 및 水理實驗 結果를 비교하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

비교적 간단한 線形代數 理論으로 계산하는 EVP方法을 사용하므로써 처음에 기대했던 것처럼 拋物線形 模型이나 雙曲線形 模型에 비해 計算時間을 보다 효율적으로 短縮할 수 있었다. 따라서 本 해석방법은 좁은 지역보다는 넓은 지역에 適用하므로써 그 效率性을 極大化 할 수 있을 것으로 판단된다. 그러나 本 연구에서 선택한 격자에서는 약간의 수치적 振動現象이 발생하였다. 이와 같은 현상은 EVP 방법의 안정조건내에서 Δy 를 약간 크게 선택하였기 때문이다. 그러므로 EVP 방법은 Δy 의 크기에 따라 計算時間, 數值解의 精度 그리고 數值技法의 安定性등이 상호 복합적으로 작용하게 되므로 격자선택에 신중하여야 한다.

參 考 文 獻

1. 吳性澤, 緩傾斜 領域에서의 波浪變形에 관한 有限差分模型, 서울大學校, 碩士學位論文, 1991, 8.
2. 鄭信澤, 蔡章源, 鄭遠武, “흐름이 存在하는 緩傾斜 海域에서의 波浪變形-數值模型實驗”, 韓國海岸·海洋工學會誌, 第4卷, 1號, 1992, pp.10-17.
3. Berkhoff, J.C.W., “Computation of Combined Refraction-Diffraction”, *Proc. 13th ICCE*, ASCE, 1972, pp.471-490.
4. Berkhoff, J.C.W., N. Booij and A.C. Radder, “Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Water Waves”, *Coastal Eng.*, Vol.6, 1982, pp.255-279.
5. Booij, N., *Gravity Waves on Water with Non-uniform Depth and Current*, Rep.81-1, Delft Univ. of Technology, 1981.
6. Copeland, G.J.M., “A Practical Alternative to the Mild Slope Wave Equation”, *Coastal Eng.*, Vol.9, 1985, pp.125-149.
7. Cushman-Roisin, B., “Analytical, Linear Stability Criteria for The Leap-Frog, Dufort-Frankel Method”, *J. of Computational Physics*, Vol.53, No.2, 1984, pp.227-239.
8. Ebersole, B.A., “Refraction-Diffraction Model for Linear Water Waves”, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, Vol.11, No.6, 1985, pp.

- 939-953.
9. Ito, Y. and K. Tanimoto, “A Method of Numerical Analysis of Wave Propagation-Application to Wave Diffraction and Refraction”, *Proc. 13th ICCE*, ASCE, 1972, pp.503-522.
10. Kirby, J.T., “Rational Approximations in the Parabolic Equation Method for Water Waves”, *Coastal Eng.*, Vol.10, 1986, pp.355-378.
11. Kirby, J.T. and R.A. Dalrymple, “A Parabolic Equation for the Combined Refraction-diffraction of Stokes Waves by Mildly Varying Topography”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.136, 1983, pp.453-466.
12. Liu, P.L.-F. and T.K. Tsay, “Water-Waves Motion Around a Breakwater on a Slowly Varying Topography”, *Proc. Coastal Structure 83, Specialty Conf.*, ASCE, 1983, pp.974-987.
13. Liu, P.L.-F. and T.K. Tsay, “Numerical Prediction of Wave Transformation”, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, Vol.11, No.5, 1985, pp.843-855.
14. Lozano, C. and P.L.-F. Liu, “Refraction-Diffraction Model for Linear Surface Water Waves”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.101, 1980, pp.705-720.
15. Maruyama, K. and R. Kajima, *Two Dimensional Wave Calculation Method Based on Unsteady Mild Slope Equation*, Rep. No.384041, Electric Central Research Institute, 1985.
16. Panchang, V.G., B. Cushman-Roisin and B.R. Pearce, “Combined Refraction-Diffraction of Short Waves in Large Coastal Regions”, *Coastal Eng.*, Vol.12, 1988, pp.133-156.
17. Radder, A.C., “On the Parabolic Equation Method for Water Wave Propagation”, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.95, 1979, pp.159-176.
18. Roache, P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publisher, 1976.
19. Roache, P.J., “Marching Methods for Elliptic Problems: Part 1”, *Numerical Heat Transfer*, Vol.1, 1978a, pp.1-25.
20. Roache, P.J., “Marching Methods for Elliptic Problems: Part 2”, *Numerical Heat Transfer*, Vol.1, 1978b, pp.163-181.
21. Watanabe, A. and K. Maruyama, “Numerical Modeling of Nearshore Wave Field under Combined Refraction, Diffraction and Breaking”, *Coastal Eng. in Japan*, Vol.29, 1986, pp.19-39.

(接受: 1992. 6. 2)