

## 개별요소와 경계요소 조합에 의한 무한 및 반무한 영역문제의 해석

### Coupled Distinct Element and Boundary Element Analysis of Problems Having Infinite or Semi-infinite Boundaries

허택녕\* · 김문겸\*\* · 황학주\*\*\*

Huh, Taik Nyung · Kim, Moon Kyum · Hwang, Hak Joo

#### Abstract

Numerical modeling of problems having infinite and semi-infinite boundaries is studied using a coupled method of distinct elements and boundary elements. The regions which are restricted on stress concentration area of loading points, excavation surface, and geometric discontinuity in the underground structures, are modeled using distinct elements, while the infinite and semi-infinite regions are modeled using linear boundary elements. Linear boundary elements for infinite and semi-infinite region are respectively composed using the Kelvin's and the Melan's solution, respectively.

For the completeness, the boundary element method, the distinct element, and the coupled method of distinct elements and boundary elements are studied independently. The coupled method is verified and is applied to underground structures of infinite and semi-infinite regions. Through the comparison of the results, it is concluded that the coupled analysis may be used for discontinuous underground structures in the effective manner.

#### 요 지

무한 및 반무한 경계조건을 가진 지하구조체에 대하여 개별요소법과 경계요소법을 조합하여 해석하는 방법을 제안하였다. 일반적으로 무한 또는 반무한 경계를 가지는 지하구조체의 문제에 있어서 응력 집중부, 굴착면 혹은 불연속면이 발달되어 있는 영역을 개별요소로 모형화하고, 무한 영역은 선형경계요소를 사용하여 모형화 하였다. 여기서, 선형경계요소에 의한 무한 및 반무한 영역의 고려는 Kelvin의 무한 영역, Melan의 반무한 영역에서의 해로 구성하였다.

효율적인 해석을 위하여 선형 경계요소법, 개별요소법, 개별요소와 경계요소 조합방법 등이 독립적으로 연구되었다. 연구된 각 방법에 근거하여 조합된 해석방법을 무한 및 반무한 문제에 적용하여 기존의 이론해석치와 비교하여 검증을 실시하고, 지하구조체에 적용하여 조합해석방법의 실용성을 보였다. 따라서, 지하구조체에 조합방법을 사용하면 지반의 불연속 조건과 경계조건에 따르는 구조물의 거동을 합리적으로 예측할 수 있으며, 개별요소와 경계요소의 장점을 살려 보다 합리적인 해석의 수행이 가능할 것으로 판단된다.

\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 박사과정

\*\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 부교수

\*\*\* 정회원 · 연세대학교 토목공학과 교수

## 1. 서 론

터널, 도로, 댐 등과 같은 실제 구조물에 있어서 그 경계조건이 반무한 영역에 존재하는 경우를 자주 접할 수 있다. 특히, 지반-구조물 또는 유체-구조물 간의 상호작용을 해석할 때, 대상의 경계조건은 반무한대에서 설정되는 것이 일반적이다. 또한, 이러한 구조물의 거동은 구성재료가 절리와 층리 등과 같은 불연속면을 가지고 있기 때문에 암반자체의 성질보다는 각종 지질학적인 불연속면의 규모나 불연속면의 거동에 의하여 크게 지배되기 쉽다. 유한요소법을 이용하여 불연속면이 존재하는 암반을 해석하기 위해서는 절리요소, 집합요소 등을 사용하여야 하며 비선형해석을 위해서는 많은 계산량이 요구된다. 반면에 개별요소법은 explicit 기법을 이용하기 때문에 암반재료의 비선형거동 혹은 대변위를 쉽게 고려할 수 있으며 다양한 구성관계식을 적용할 수 있다.

불연속면으로 구성된 블록으로 지반을 모형화하는 개별요소법의 기본이론은 1971년 Cundall<sup>(1)</sup>에 의하여 처음 시도된 이래, 1974년 Kawai<sup>(2)</sup>에 의하여 적용범위가 확장되었다. 1982년 Yen<sup>(3)</sup>은 2차원 블록을 이용하여 일반적인 문제에 적용하였고 1983년 Dowding<sup>(4)</sup>은 블록을 사면체로 형성하여 3차원 문제의 해석을 실시 하였다. 또한, 1978년 Dowding과 Rozen<sup>(5)</sup>은 동적인 문제를 해석에 도입하여 지진과 충격파에 대한 변위해석을 실시하였고, 1988년 Gilbert<sup>(6)</sup>는 3차원문제에 적용하기 시작하였다.

최근에는 비선형성이 예상되는 영역에는 개별요소와 유한요소를 사용하고, 상대적으로 비선형성이 미약한 영역에는 경계요소를 사용하는 조합방법이 연구되고 있다. 탄성문제에 대한 경계요소법을 이용한 연구는 1978년 Rizzo<sup>(7)</sup>가 처음으로 시도한 이래 Lacht<sup>(8)</sup>와 Banerjee<sup>(9)</sup> 등에 의해 직접경계요소법과 간접경계요소법으로 분류되어 진행되고 있다. 1981년에 Brebbia<sup>(10)</sup>와 Telles<sup>(11)</sup>에 의하여 반무한 영역에 대한 해석이 시도되었으며, 지하구조체에 대한 경계요소법은 다층영역, 비선형문제 및 동적영향까지 고려함으로써 그 영역이 확장되어 발전하고 있다. 유한요소와 경계요소의 조합방법은 Zienkiewicz<sup>(12)</sup> 등에 의하여 처음으로 제안된 이래, 1980년대 초까지

꾸준히 연구되고 있다. 또한, 개별요소와 경계요소를 조합한 해석방법도 Yen<sup>(13)</sup>, Lemos<sup>(14)</sup>, Lorig<sup>(15)</sup> 등에 의하여 많은 연구가 진행되고 있다. 한편, 국내에서는 불연속한 구조체에 대하여 유한요소법, 경계요소법, 조합해석방법 등이 많이 진행되고 있으나 외국에 비하여 미비한 실정이다.<sup>(16-19)</sup> 따라서, 본 연구에서는 Cundall의 기초이론을 이용한 개별요소법과 기존의 무한 및 반무한 기본해를 이용한 경계요소법을 조합하여 지하구조체의 효율적인 해석방법에 대하여 연구하도록 한다.

## 2. 개별요소법

개별요소법(distinct element method)은 대상영역을 블록(block)과 같은 요소로 분리한다는 점에서는 기존의 유한요소법과 유사하다. 그러나 개별요소법은 암반체의 불연속면의 간격과 방향성에 의해 구분되어지는 요소를 이용하며, 인접 블록과의 상호작용을 고려할 수 있다는 점에서 유한요소법과는 상이하다. 또한, 개별요소는 다른 종류의 요소들과 쉽게 조합될 수 있으며 대변위, 대회전, 후좌굴 등을 쉽게 모형화할 수 있다.<sup>(20)</sup>

개별요소법은 각 블록내에서는 연속체이론을 적용하며, 블록 사이에서는 힘-변위관계와 블록에 작용되는 불평형하중에 의하여 블록의 운동을 정의하는 운동방정식을 적용하는 해석방법이다. 그림 1에는 개별요소법의 개략적인 해석과정을 도시하고 있다. 각각의 시간증분에 대하여 운동방정식으로 부터 가속도, 속도, 변위를 계산한 후, 구성관계식을 이용하여 블록의 내부응력(internal stress)과 불연속면에서의 새로운 접촉력을 계산한다. 이와 같은 과정은 불평형하중이 허용범위내에 들어 올 때까지 계속 수행한다.

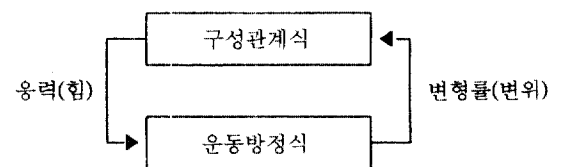


그림 1. 개별요소법의 계산과정

## 2.1 접촉면의 구성관계

불연속면 또는 블록의 접촉면에서 전단력과 수직력이 전달되는 상태는 그림 2 와 같이 미리 규정된 힘-변위관계를 갖는 스프링으로 모형화할 수 있다. 이러한 모형에서 각 블록의 변형량은 블록의 기하학적 형상, 블록도심의 변위량 및 회전량으로부터 계산할 수 있다. 그림 3 은 면-점 접촉의 경우를 모형화한 것으로 가장 간단한 접촉면에서의 구성관계는 식 (1)과 같다.

$$\Delta F_n = K_n \Delta u_n \quad (1)$$

여기서,  $\Delta F_n$ 은 증분의 수직력,  $K_n$ 은 접촉면에서의

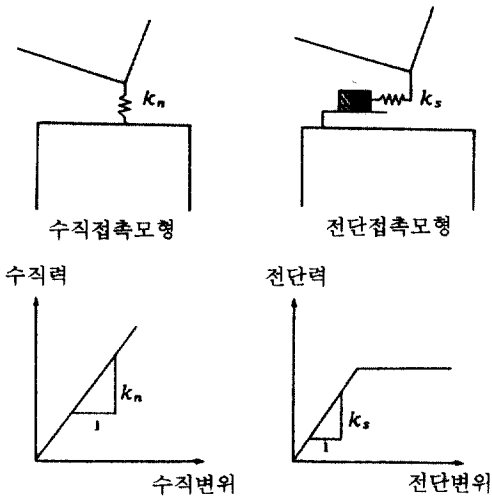


그림 2. 불연속면의 모형화

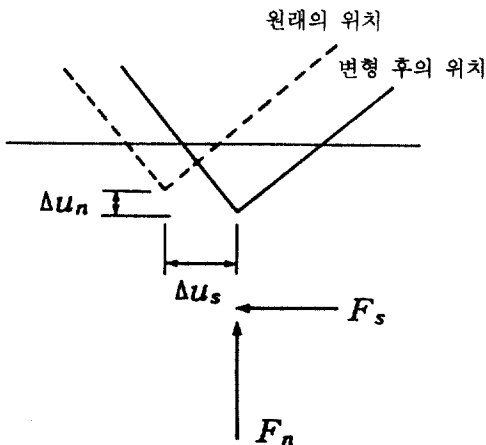


그림 3. 블록의 면-점접촉

수직강성,  $\Delta u_n$ 은 수직변위의 증분이다. 블록사이의 전단력은 하중경로(load path)에 따라 결정된다. 증분의 전단력은 상대적인 전단변위의 증분에 비례하여 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.

$$\Delta F_s = K_s \Delta u_s \quad (2)$$

여기서,  $\Delta F_s$ 는 전단력의 증분,  $K_s$ 는 접촉면에서의 전단강성,  $\Delta u_s$ 는 전단변위의 증분을 나타낸다.

그림 4는 두개의 면-면 접촉으로 모형화한 경우이며, 이 때 접촉길이를  $l$ 로 가정하면,

$$\sigma_n = F_n / l \quad (3)$$

$$\sigma_s = F_s / l \quad (4)$$

이고, 응력의 증분은 절리강성도  $k_n, k_s$ 의 함으로 표현할 수 있다.

$$\Delta \sigma_n = k_n \Delta u_n \quad (5)$$

$$\Delta \sigma_s = k_s \Delta u_s \quad (6)$$

블록사이에서는 인장응력이 전달되지 않으므로

$$\sigma_n \leq 0 \quad (7)$$

이다. 또한, 최대전단응력은 식 (8)과 같은 Mohr-Coulomb 의 마찰법칙에 의해 제한을 받는다.

$$|\sigma_s| \leq c - \sigma_n \tan \phi \quad (8)$$

여기서,  $c$ 와  $\phi$ 는 각각 접촉면에서의 점착력과 마찰각이다.

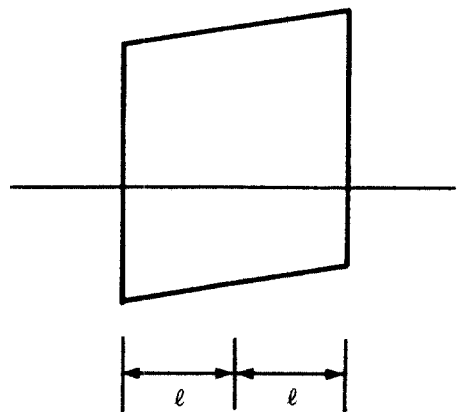


그림 4. 블록의 면접촉

## 2.2 운동방정식

각 블록의 운동은 블록에 작용하는 불평형력(unbalanced force)과 불평형모멘트(unbalanced moment)의 크기와 방향에 의하여 결정된다. 블록의 도심에 대한 이동과 회전의 운동방정식은 Newton의 제 2 운동법칙에 의하여 다음과 같이 유도된다. 블록의 질량을  $m$ , 블록에 가해지는 불평형하중을  $F$ , 블록의 이동을  $u$ 라 하면,

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{F}{m} \quad (9)$$

이다. 식 (9)의 왼쪽항을 중앙차분법(central difference method)에 따라 시간  $t$  에서 정리하면,

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = \frac{\dot{u}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} - \dot{u}^{(t-\frac{\Delta t}{2})}}{\Delta t} \quad (10)$$

이 된다. 여기서, 상첨자( $\cdot$ )는 시간에 대한 미분을 나타낸다. 식 (10)을 식 (9)에 대입하고 다시 정리하면 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\dot{u}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{u}^{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \frac{F(t)}{m} \Delta t \quad (11)$$

시간  $t + \Delta t$ 에서의 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$u^{(t+\Delta t)} = u^{(t)} + \dot{u}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} \Delta t \quad (12)$$

중력 뿐만 아니라 다양한 형태의 하중이 블록에 작용될 때, 블록도심에서의 속도방정식은

$$\dot{u}_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \left( \frac{\sum F_i^{(t)}}{m} + g_i \right) \Delta t \quad (13)$$

$$\dot{\theta}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \dot{\theta}^{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \sum \frac{M_i^{(t)}}{I_o} \Delta t \quad (14)$$

이다. 여기서,  $\dot{\theta}$ 는 블록 도심에서의 각속도,  $I_o$ 는 블록의 질량관성 모멘트,  $\dot{u}_i$ 는 블록 도심에서의 블록의 속도성분,  $g_i$ 는 중력가속도,  $i=1, 2$ 를 각각 나타낸다.

위에서 계산된 속도성분을 이용하면 이동한 블록의 새로운 위치를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\dot{x}_i^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = x_i^{(t)} + \dot{u}_i^{(t-\frac{\Delta t}{2})} + \Delta t \quad (15)$$

$$\theta^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = \theta^{(t)} + \dot{\theta}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} \Delta t \quad (16)$$

여기서,  $\theta$ 는 도심에 대한 블록의 회전변위량이며,  $x_i$ 는 이동된 블록의 도심 좌표이다.

각 시간중분의 반복계산에서 모든 블록의 새로운 위치가 계산되고, 이에 따라 새로운 접촉면에서의 응력이 발생되며, 하중과 모멘트의 합력은 하중항으로 이용하여 각 블록의 속도성분 및 각속도의 계산에 이용된다. 블록의 속도와 변위는 각 시간중분에서 계산된 속도와 변위의 전체적인 합이 된다. 이러한 계산들은 각 블록들이 평형상태에 도달할 때까지 혹은 파괴형태에 도달할 때까지 계속적으로 반복하여 수행된다.

## 2.3 감쇠

정적인 해석을 위해서는 계가 정상상태로 수렴할 수 있도록 진동에너지를 소산시킬 수 있는 한계감쇠(critical damping)를 사용하여야 한다. 블록의 운동에 관여하는 점성감쇠(viscous damping)로는 질량 비례감쇠(mass-proportional damping)와 강성 비례감쇠(stiffness-proportional damping)의 두 종류를 생각할 수 있다. 질량비례 감쇠는 물리적으로 각 블록의 도심 간에 연결된 dashpot과 같아 블록의 절대운동에 영향을 미치는 반면, 강성비례감쇠는 접촉면사이에 존재하는 dashpot 과 같고 블록의 상대적인 운동에 관여한다. 여기서는 질량비례감쇠만을 사용하여 정상상태 해를 얻도록 한다.

## 2.4 시간중분의 결정

여러 개의 강성과 질량으로 구성된 블록계에서 변위가 안정적으로 수렴하기 위한 최대시간중분은 블록의 질량과 강성의 비 ( $m/k$ )가 최소가 되는 강성과 질량을 조합함으로써 식 (17)과 같이 결정된다.

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{T_n}{\pi} - 2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (17)$$

여기서,  $\Delta t_{cr}$ 은 한계시간중분,  $T_n$ 은 주기를 나타낸다. 그러나 여러 개의 강성과 질량으로 연결된 블록은 하나의 강성과 질량으로 연결된 블록에 비하여 상대적으로 강성이 증가되기 때문에 시간중분은 작아지게 된다. 따라서 식 (17)에 의하여 결정된 시간

간격을 사용하면 해를 찾지 못하고 발산하는 경우가 발생하므로 0.1를 곱하여 시간증분을 결정하여 수렴하는 해석결과를 얻었다.

## 2.5 블록의 변형

개별요소법에서 블록은 변형을 받지 못하는 강성 블록(rigid block)이거나 변형가능한 블록(deformable block)으로 크게 나눌수 있다. 강성블록은 하중이 재하된 후에도 그 형태는 변형을 일으키지 않는 것으로 가정한다. 그러므로 강성블록을 이용한 해석방법은 블록이 작은 응력을 받는 경우 또는 강도가 큰 재료가 작은 변형을 받는 경우에 적합한 해석 방법이라 할 수 있고, 불연속면의 거동이 지배적이거나 재료의 탄성을 무시할 수 없는 곳에서는 적합한 해석방법이라 할 수 없다. 따라서 실제의 경우에는 굴착면이나 응력집중부의 모든 블록을 강체로 가정하는 것은 부적합하므로, 이러한 부분에서는 변형 가능한 블록을 이용하여 해석을 수행하면 더 합리적인 해석결과를 얻을 수 있다. 변형을 받을 수 있는 블록은 각 도심에서 3개의 자유도를 가진 단순변형블록(simply deformable block)과 임의적으로 변형이 가능한 완전변형블록(fully deformable block)으로 나눌수 있다. 완전변형블록은 블록의 영역을 유한차분삼각형(finite difference triangle)으로 분할하며, 이 삼각형의 꼭지점은 격절점(grid point)이 되고, 차분삼각형의 변에 작용하는 표면력, 외부하중과 중력가속도를 고려한 차분삼각형에서의 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{u}_i = \frac{\int_s t_i ds + F_i}{m} + g_i = \frac{\int_s \sigma_{ij} n_j ds + F_i}{m} + g_i \quad (18)$$

여기서,  $\sigma_{ij}$ 는 삼각형 내부의 응력텐서,  $F_i$ 는 격절점에 작용하는 외부하중,  $g_i$ 는 중력가속도,  $t_i$ 는 차분삼각형의 변에 작용하는 표면력,  $s$ 는 차분삼각형의 경계길이,  $n_j$ 는  $s$ 에 수직인 단위벡터를 각각 나타낸다. 각 시간에서 절점변위와 변형률 및 회전의 증분사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \Delta t \quad (19)$$

$$\Delta \theta_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) \Delta t \quad (20)$$

변형가능한 블록의 구성관계는 식 (21)과 같이 증분형태로 표현할 수 있으므로 블록의 변형률과 회전에서의와 같이 이러한 구성관계를 이용하면 비선형문제도 고려할 수 있다.

$$\Delta \sigma_{ij} = \lambda \Delta \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \Delta \epsilon_{ij} \quad (21)$$

여기서,  $\lambda$ 와  $\mu$ 는 Lamé의 상수,  $\Delta \epsilon_{kk}$ 는 체적변형률의 증분,  $\delta_{ij}$ 는 Kronecker delta 함수이다.

## 2.6 Explicit 기법

개별요소법은 미소증분의 시간영역에서 explicit 기법에 따라 그 해를 구한다. Explicit 기법에서 방정식의 한 변은 모두 기지의 값을 가지며 이 기지의 값을 이용하여 다른 변의 값을 구하게 된다. 반면에 미지의 값들이 양변에 존재하는 implicit 기법은 그 미지의 값을 구하기 위하여 전치 소거법 또는 Gauss 소거법과 같은 연산기법이 필요하다. 또한 explicit 기법은 블록계에서 해를 구하고자 할 때, 시간 증분의 크기에 민감한 영향을 받는다. 물리적으로 가능한 속도보다 늦게 이웃한 블록으로 변수들이 전파되어 가도록 아주 미소한 시간을 택하게 되면 전체 시간영역에서 변수들의 상호의존성은 무시되어 진다. 즉, 블록 상호간의 영향을 무시할 수 있는 작은 시간 증분에서는 블록 간의 영향을 무시한 운동방정식을 이용할 수 있다. 이러한 미소시간증분이 explicit 기법의 단점이지만 행렬형태로 구성하지 않고 대변형과 비선형 또는 후탄성거동 등을 쉽게 모형화할 수 있다는 점은 장점이 된다.

## 3. 경계요소법

본 연구에서는 주어진 경계에서 변위와 표면력의 향으로 적분방정식을 유도하기 위해 가중잔차법(weighted residual method)을 이용하는 직접 경계요소법(boundary element method)을 사용한다.

### 3.1 경계적분방정식

응력텐서를  $\sigma_{ij}$ , 물체력을  $b_i$ 로 나타내면 평형방정식은 다음과 같다.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (22)$$

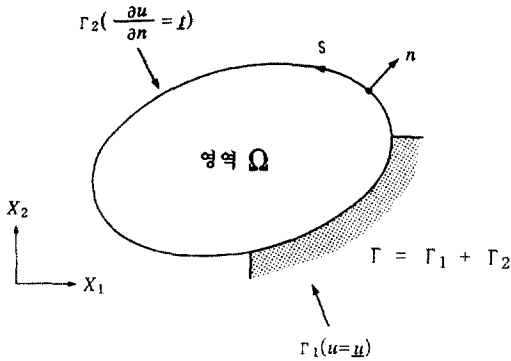


그림 5. 경계영역의 정의

그림 5와 같이 영역  $\Omega$ 와 경계  $\Gamma$ 를 가지고 있는 정적선형탄성계를 생각하자. 영역의 전체경계  $\Gamma$ 는 기하학적 경계  $\Gamma_1$ 과 역학적 경계  $\Gamma_2$ 로 분할할 때, 경계조건은  $\Gamma_1$ 과  $\Gamma_2$ 에 대하여 각각 식 (23)과 같다.

$$u_i = \underline{u}_i \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (23a)$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j = \underline{t}_i \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (23b)$$

여기서,  $u_i$ 는 변위벡터,  $t_i$ 는 표면력벡터이며,  $\underline{u}_i$  및  $\underline{t}_i$ 는 기지의 변위벡터 및 표면력벡터이다. 또한  $n_j$ 는 외부로 향한 수직벡터의 방향여현이다.

대상영역에 대하여 가중잔차방정식(weighted residual equation)을 구성하면 식 (24)와 같다.

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kij} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} (\underline{u}_k - u_k) t_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (\underline{t}_k - t_k) u_k^* d\Gamma \quad (24)$$

여기서,  $u_k^*$ 는 가중영역에서의 변위벡터이며,  $t_k^*$ 는 가중영역에서의 변위벡터에 대응되는 표면력벡터이다. 식 (24)를 두 번 부분적분하고 변형률-변위관계를 이용하여 정리하면 다음과 같은 적분방정식을 얻을 수 있다. 이 때 물체력의 항은 고려하지 않는다.

$$\int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_k d\Omega = \int_{\Gamma_1} \underline{u}_k t_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k t_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \underline{t}_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} t_k u_k^* d\Gamma \quad (25)$$

여기서 영역내의 임의점  $i$ 에서  $x_p$ 방향으로 단위 하중  $\delta_{ip}$ 이 작용될 경우의 응력을  $\delta_{pki}^*$ 라고 이를 가중함수로 사용하도록 한다. 무한 영역에서 이 문제의 해로서 Kelvin의 해를 사용한다. 평면 변형률문제에서 변위, 표면력에 대한 기본해를 각각  $u_{pk}^*$ ,  $t_{pk}^*$ 로

표시하면 식 (26)과 같다.

$$u_{pk}^* = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)} [(3-4\nu)\ln r \delta_{pk} - r_{,p} r_{,k}] \quad (26a)$$

$$t_{pk}^* = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \{ [(1-2\nu)\delta_{pk} + 2r_{,p} r_{,k}] n_{m,r} - (1-2\nu)(r_{,p} n_k - r_{,k} n_p) \} \quad (26b)$$

여기서,  $G$ 는 전단탄성계수,  $\nu$ 는 포아손비이며,  $r$ 은 재하점  $i$ 와 변위 및 표면력이 발생하는  $x$ 점 사이의 거리를 나타낸다. 반무한 영역의 문제에 대한 기본해는 무한 탄성영역에 대한 Kelvin의 기본해에 반무한 영역의 보충항을 추가하여 구성한다.

가중함수로 Kelvin 해를 사용하는 경우, 기본해가 영역내부의 임의의 점에서는 만족되지만, 하중점이 경계상에 있으므로 특이점이 발생하게 된다. 특이점의 영향을 고려하면 다음과 같은 경계적분방정식을 얻을 수 있다.

$$c_{pk} u_k^* + \int_{\Gamma} u_k t_{pk}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} t_k u_{pk}^* d\Gamma \quad (27)$$

여기서,  $c_{pk}$ 는 경계면 상의 기하학적 형상에 의해 결정되는 상수이다.

### 3.2 경계요소 계방정식

경계적분방정식은 한 점의 변위에 대하여 전체 경계  $\Gamma$ 와 전체 영역  $\Omega$ 에 대한 적분항으로 표시된다. 경계적분방정식을 풀기 위해서는 경계를 요소화하고, 이 요소에 대한 근사해를 구하기 위한 계방정식을 구성하도록 한다. 경계적분방정식을 행렬형태로 나타내기 위해서는 전체좌표계에 대한 변위  $\{u\}$ 와 표면력  $\{t\}$ 를 형상함수로 나타낸다. 변위와 표면력을 선형요소로 이산화하면,

$$\{u\} = [\phi] \{u^n\} \quad (28)$$

$$\{t\} = [\phi] \{t^n\} \quad (29)$$

로 할 수 있다. 여기서,  $\{\phi\}$ 는 형상함수이며  $\{u^n\}$ 과  $\{t^n\}$ 은 각각 절점에서 변위와 표면력이다. 식 (28)과 식 (29)를 경계적분방정식 (27)에 대입하면 다음과 같다.

$$[c] \{u^i\} + \sum_{j=1}^N (\int_{\Gamma} [t^*] [\phi] d\Gamma) \{u^j\} = \sum_{j=1}^N (\int_{\Gamma} [u^*] [\phi] d\Gamma) \{t^j\} \quad (30)$$

여기서,  $N$ 은 경계상의 절점수를 나타낸다. 식 (30)을 수치적분의 형태로 표시하면 다음과 같다.

$$[c]\{u\} + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^L |J|_q w_q ([t^*][\phi]_q)\{u^n\} = \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^L |J|_q w_q ([u^*][\phi]_q)\{t^n\} \quad (31)$$

여기서,  $J$ 는 Jacobian 행렬,  $w$ 는 Gauss 적분의 가중치,  $n$ 은 경계요소수이다.

전체절점에 대한 계방정식을 행렬형태로 쓰면 식 (32)와 같다.

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (32)$$

#### 4. 개별요소와 경계요소의 조합방법

그림 6에는 개별요소와 경계요소의 조합한 예를 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 경계요소의 각 절점은 경계요소와 개별요소의 접합면에 놓여 있는 블록 모서리와 일치한다. 해석방법으로는 개별요소의 explicit 기법을 따르며 각각의 반복계산마다 두 요소의 접합면을 따라 변위를 계산한다.

##### 4.1 강성도행렬의 유도

경계요소법의 강성도행렬을 다른 수치기법의 강성도 행렬과 조합하기 위한 방법이 Brady와 Wassyn<sup>(21)</sup>에 의하여 유도되었다. 인접요소에 대한 절점  $i$ 의 절점력은 인접요소의 표면력을 적분함으로써 얻을 수 있으며, 식 (33)과 같다.

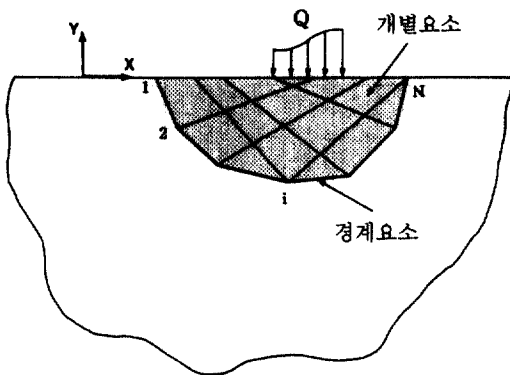


그림 6. 개별요소와 경계요소의 조합

$$q_i^1 = \int_{-1}^1 [\phi^2(\xi)]_1 \left( \frac{d\Gamma}{d\xi} \right)_1 d\xi + \int_{-1}^1 [\phi^1(\xi)]_2 \left( \frac{d\Gamma}{d\xi} \right)_2 d\xi = a_i^1 t_i \quad (33)$$

여기서, 첨자 1과 2는 절점  $i$ 의 인접요소,  $\xi$ 는 요소의 내부좌표계,  $\phi^1(\xi)$ 과  $\phi^2(\xi)$ 는 선형경계요소의 형상함수를 각각 나타낸다. 동일한 방법을 사용하여  $t_i$ 의 향으로  $q_i^2$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$q_i^2 = a_i^2 t_i \quad (34)$$

식 (33)과 식 (34)에서 스칼라계수  $a_i^1$ 는 기하학적인 형상으로 결정되며 선형요소에 대하여는 인접요소로부터 결정된다. 식 (33)과 식 (34)를 표면력에 대하여 정리하면,

$$t_i = b_i^1 q_i^1 \quad (35)$$

$$t_i = b_i^2 q_i^2 \quad (36)$$

이고, 식 (32)를 변형시키면,

$$[H]\{u\} = [G']\{q\} \quad (37)$$

와 같이 된다. 여기서  $\{q\}$ 는 절점하중벡터이며  $[G']$ 는  $[G]$ 의 각 열에  $a_i^1$ 의 역수인 계수  $b_i^1$ 를 곱하여 얻을 수 있다. 식 (37)로부터 하중벡터  $\{q\}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\{q\} = [G']^{-1}[H]\{u\} = [K^b]\{u\} \quad (38)$$

여기서,  $[K^b]$ 는 경계요소의 강성도행렬이며, 개별요소와의 조합에 이용된다.

##### 4.2 접합면에서의 연속조건

경계요소와 개별요소와의 조합에서 두 요소의 접합면을 따라 평형과 연속성이 유지되어야 한다. 개별요소의 기본가정에 따라 블록사이의 분리(separation)나 미끄러짐(sliding)은 접합면과 교차할 수 없도록 해야 한다. 경계요소로 선형요소를 사용함에 의하여 블록과의 접촉면은 직선이 되므로 물리적인 적합조건은 만족된다. 또한, explicit 기법의 매 시간중분마다 블록 모서리의 변위를 경계요소의 절점 변위와 같게 만들어 주므로써 접합면에서의 운동학적 조건(kinematic continuity)을 만족시킬 수 있다. 접합면의 힘은 식 (38)에 절점변위를 도입함으로써 계산될 수 있다.

경계요소의 영역에서는 전장에서 계산된 변위와 식 (38)에서 유도한 강성도 행렬  $[K^e]$ 를 이용하여 응력과 변위를 계산한다. 그러므로 개별요소에 작용되는 하중벡터  $\{q^e\}$ 는  $\{q^e\}$ 의 (-) 값이 되며, 블록에 작용하는 외력과 접촉력과 함께 개별요소의 해석에 첨가된다. 일단 평형상태에 도달하면 두 요소의 접합면에 발생한 절점력은 식 (33)과 식 (34)에 의하여 절점 표면력으로 바꾸어 진다. 이와 같은 접합면에서의 표면력과 변위를 이용하여 일반적인 경계요소해석에서와 같이 무한 및 반무한 영역내의 응력과 변위를 계산할 수 있다.

### 4.3 강체운동의 제거

개별요소와 경계요소를 조합해석시, 개별요소영역에 작용하는 중력을 고려하고자 할 때, 경계요소영역에서는 이에 대응하는 동등한 응력증분이 없기 때문에 강체변위가 관련된다. 경계요소영역에서는 수직방향으로 평형을 찾지 못하고 위로 상승하는 강체운동이 발생되기 때문에 조합해석시 경계요소영역의 강체변위를 고려하는 것이 필수적이다. 이와 같은 강체변위를 고려한 조합해석에 있어서 Lemos<sup>(14)</sup>는 두 영역의 경계부분에서 변위가 발생하지 않는 경계요소영역의 기준점을 이용하여 강성도행렬을 수정하는 방법을 시도하였다. 본 연구에서는 전술한 방법을 이용하여 해석을 수행한다.

### 4.4 수렴도 판정

본 연구에서 수렴정도는 매 시간증분의 반복 계산마다 발생하는 하중증분 벡터내적에 대한 전체 하중 벡터내적의 비에 의하여 계산되며, 계산된 수렴정도가 입력된 허용 오차범위내에 들면 다음 시간증분으로 넘어가게 된다.

$$\|n\| = \frac{\sqrt{\Delta r \cdot \Delta r}}{\sqrt{r \cdot r}} < \varepsilon \quad (39)$$

여기서,  $\Delta r$ 는 단계별 하중증분벡터,  $r$ 는 전체 하중 벡터,  $\varepsilon$ 은 허용 오차범위를 나타낸다.

## 5. 검증용 모형 및 고찰

본 장에서는 전 장에서 서술한 조합해석기법에

따른 무한 및 반무한 문제에 대하여 검증을 수행한다. 우선, 경계요소법에 의한 해석결과를 검증하고, 검증된 경계요소법을 개별요소와 조합하여 무한 및 반무한 해석을 실시한다. 이 때, 해석결과는 각각의 경우에 대하여 문헌상의 이론해석치와 비교하여 고찰한다.

### 5.1 경계요소해석의 검증

3 장에서 기초한 경계요소 프로그램을 검증하기 위하여 그림 7과 같은 모형을 설정한다. 설정된 모형은 그림에 도시한 바와 같이 지표로부터 원공 중심이 1.34m의 깊이에 존재하는 반지름이 1.0m인 원공이며, 반무한 경계를 가진 문제이다. 대상영역의 탄성계수는 160MPa, 포아손비는 0.25로 각각 가정하고, 하중은 원공주위를 따라서 1MPa의 내압이 작용하는 것으로 가정한다. 이 때 원공의 전부를 8개, 16개 및 32개의 경계요소로 구성하고 해석을 수행한다.

앞에서 서술한 해석모형에 대하여 실시한 해석결과를 그림 8에 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 원공중심에서 지표면을 따라 0.5m씩 이동하면서 발생하는 수평응력을 구하기 위해 8개, 16개 및 32개의 경계요소를 사용하여 해석을 수행하고, 그 해석결과와 Mindlin이 대상영역을 탄성체로 가정하고 구한 이론해석치<sup>(22)</sup>와 비교하여 함께 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 해석결과는 이론해석치에 잘 일치하고 있으며, 비교적 거친 요소를 사용하여 해석을 실시하였지만 경계요소의 수가 증가함에 따

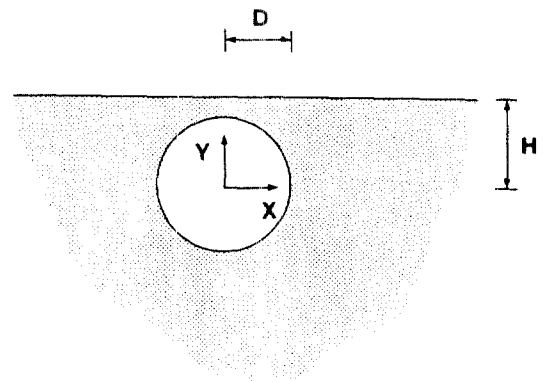


그림 7. 경계요소해석의 검증모형



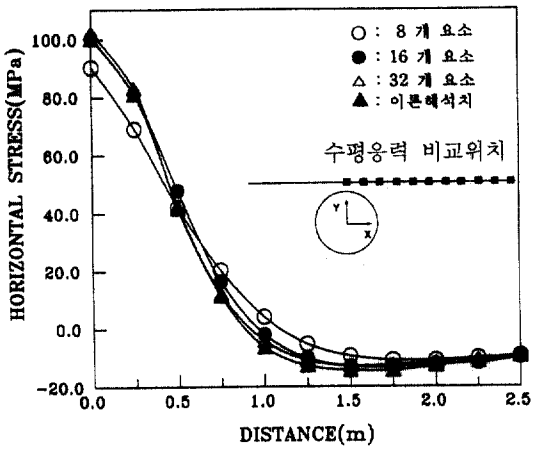


그림 8. 수평면에서의 수평응력

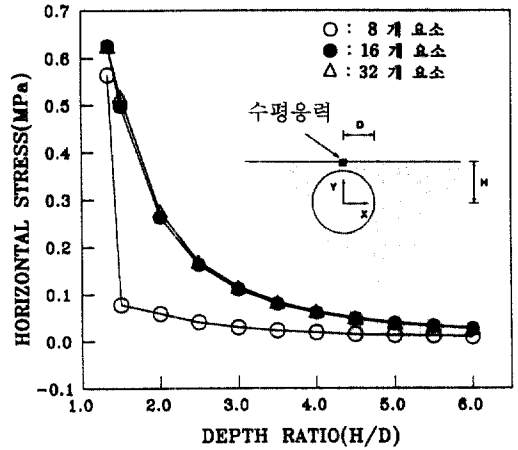


그림 10. 깊이비에 따른 수평응력

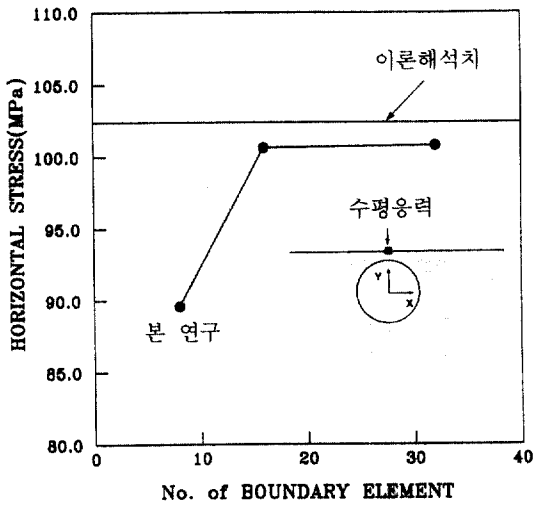
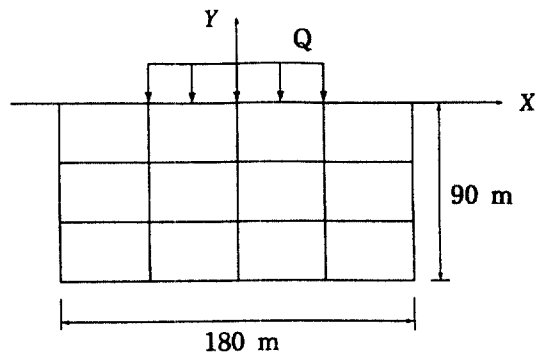
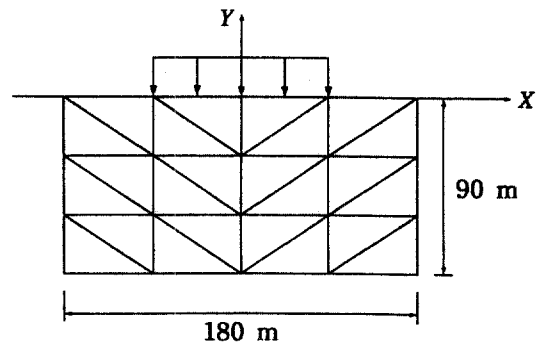


그림 9. 경계요소의 수렴과정

라 이론해석치에 신속히 수렴함을 알 수 있다. 그림 9에는 원공중심위의 지표면에서 발생되는 수평응력이 경계요소가 증가함에 따라 이론해석치에 수렴하는 과정을 도시하였다. 또한 그림 10에는 원공의 반지름  $D$ 와 지표면으로부터 원공중심까지의 거리  $H$ 의 변화에 따른 깊이비  $H/D$ 와 원공주위의 경계요소 수가 원공중심위의 수평면에서 발생하는 수평응력변화에 미치는 영향을 도시하였다. 그림에 보인 바와 같이 16개 이상의 경계요소를 사용한 해석결과 수평응력에 큰 변화를 보이지 않고 있다. 즉, 요소절점의 원점에 대한 중심각이  $20^\circ$  이하에서는



(a) 사각형 블록



(b) 삼각형 블록

그림 11. 개별요소와 경계요소의 해석모형

엄밀해에 수렴함을 알 수 있다. 또한 깊이비가 증가함에 따라 수평응력은 감소하였고 깊이비가 4.0 이상에서는 수평응력의 변화가 미소함을 알 수 있다.

## 5.2 반무한 영역의 검증

전 장에서 언급한 개별요소와 경계요소의 조합이론에 기초한 프로그램을 검증하기 위하여 그림 11과 같이 반무한 영역의 지표면에 등분포하중이 작용하는 문제를 고려한다. 그림에서 보는 바와 같이 하중이 재하되는 일부영역을 선정하여 개별요소로 모형화하며, 그 이외의 반무한 영역은 경계요소를 사용하여 모형화한다. 이 때, 개별요소영역에는 완전변형을 고려한 24개의 삼각형블록과 12개의 사각형블록을 각각 사용하며, 블록사이에 존재하는 절리의 수직 및 전단강성은 분리나 미끄러짐이 발생하지 않도록 매우 크게 설정함으로써 개별요소영역이 선형탄성체로 거동하도록 하고, 경계요소와 개별요소사이의 접촉부에는 10개의 경계요소를 사용한다. 본 해석에 사용된 주요 물성은 표 1에 나타난 바와 같다. 조합해석의 결과를 전 절에서 검증된 경계요소 프로그램의 해석결과와 비교하기 위하여 그림 12와 같은 내부영역문제의 경계요소망을 구성한다. 그림에 보인 바와 같이 경계요소해석의 정확도를 높이기 위하여 대상영역을 지표면으로부터 800m, 원점을 중심으로 좌우 400m 까지 확장하였고, 50개의 절점과 44개의 선형경계요소를 사용하여 경계를 분할하였다. 이 때, 조합해석결과와 비교하기 위하여 9개의 내부점을 사용한다.

그림 13과 그림 14에는 중심선에서 발생하는 수직응력과 수직변위에 대하여 삼각형 블록과 사각형 블록을 사용한 조합해석의 결과와 경계요소의 해석결과를 함께 도시하였다. 그림에서 보는 바와 같이 삼각형 및 사각형으로 모형화한 조합해석의 결과는

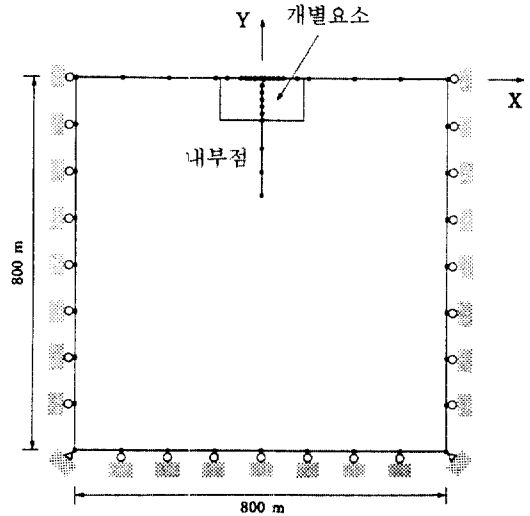


그림 12. 내부영역문제의 경계요소망

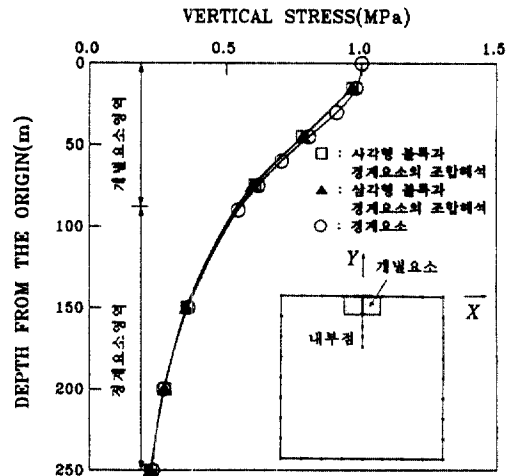


그림 13. 중심선에서의 수직응력

표 1. 조합해석의 입력자료

|          |                                      |
|----------|--------------------------------------|
| 블록의 탄성계수 | $E = 15,000 \text{ MPa}$             |
| 블록의 질량밀도 | $\rho = 1,000 \text{ kg/m}^3$        |
| 블록의 포아송비 | $\nu = 0.25$                         |
| 절리의 수직강성 | $k_n = 1.0 \times 10^6 \text{ MN/m}$ |
| 절리의 전단강성 | $k_s = 1.0 \times 10^6 \text{ MN/m}$ |
| 절리의 점착력  | $c = 10 \text{ MPa}$                 |
| 절리의 마찰력  | $\phi = 45^\circ$                    |
| 작용하중     | $Q = 1 \text{ MPa}$                  |
| 시간중분     | $\Delta t = 6.5 \times 10^{-5}$      |

경계요소의 해석결과와 서로 잘 일치하고 있다. 이러한 해석결과는 절리의 강성을 매우 크게 모형화함으로써 개별요소영역이 선형탄성체의 거동을 했기 때문이다. 또한, 응력과 변위의 분포가 두 요소의 접합면에서 연속적으로 나타나므로 전 장에서 서술한 연속조건이 만족됨을 알 수 있다. 그러나, 식 (39)에 의한 수렴성을 확보하기 위하여 삼각형블록은 6500 번의 시간중분이 필요하였고 사각형블록의 경우에는 80000 번의 시간중분이 필요하였다. 이러한

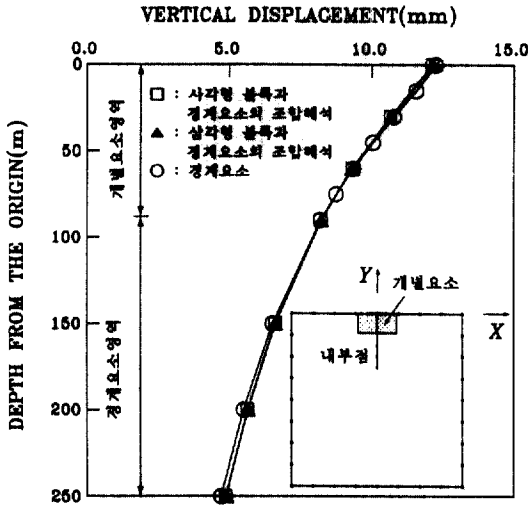


그림 14. 중심선에서의 수직변위

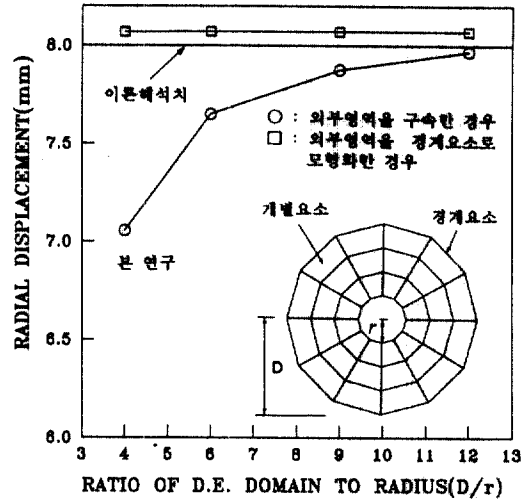


그림 16. 개별요소의 영역 변화에 따른 수렴과정

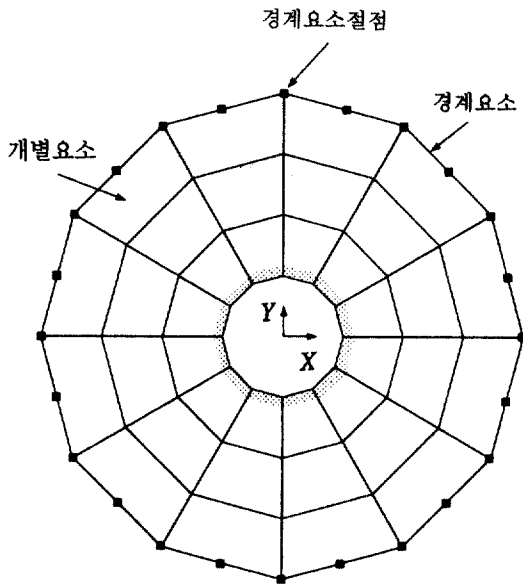


그림 15. 지보재를 고려한 조합해석모형

이유는 삼각형블록을 이용한 해석은 사각형 블록을 이용한 해석에 비하여 보다 많은 자유도를 포함하고 있으므로 사각형블록을 이용한 해석결과는 상대적으로 강성이 크게 모형화되기 때문에 나타나는 결과로 판단된다. 또한, 사각형블록은 회전거동을 고려하지 못하고 작용된 하중이 각 블록으로 균일하게 분포된다. 따라서, 전체의 블록영역으로 하중을 전

달시키는 데 많은 시간중분이 필요하기 때문에 나타나는 결과로 사료된다.

### 5.3 무한 영역의 검증모형

무한 영역에 대한 조합해석을 위하여 그림 15와 같은 해석모형을 설정한다. 그림에서 보는 바와 같이 해석모형은 무한 탄성영역에 존재하는 반지름이 1m인 원공으로 원공주위의 일부 영역은 36개의 개별요소로, 개별요소의 경계는 24개의 경계요소로 모형화하며, 하중으로는 초기응력 20MPa가 작용하는 것으로 가정하였다. 또한, 블록사이의 수직 및 수평강성은 각각 10000MPa/m, 블록의 탄성계수는 3GPa, 블록의 포아손비는 0.2 으로 가정하였으며, 블록은 완전변형블록으로 설정한다. 이 외의 물성은 전 절에서 사용한 예제의 물성과 동일하게 사용하였다.

무한 탄성영역에 존재하는 원공에서 반지름 방향의 변위에 대한 이론해석치<sup>(23)</sup>는 다음과 같은 식으로부터 계산한다.

$$u_r = \frac{(1+\nu)}{E} r_1 (p_0 - p_1) \quad (40)$$

여기서,  $r_1$ 는 원공의 반지름,  $u_r$ 는 원공의 반지름방향의 변위,  $p_0$ 는 초기응력(in-situ stress),  $p_1$ 는 원공 내에 존재하는 내압,  $E$ 는 탄성계수,  $\nu$ 은 포아손비를 각각 나타낸다.

위에서 설정한 모형에 대하여 개별요소의 외부영역을 경계요소로 모형화한 경우와 구속한 경우의 해석결과를 식 (40)에서 구한 이론해석치와 함께 비교하기 위하여 개별요소영역이 증가함에 따라 원공 굴착부의 변위가 이론해석치에 수렴하는 과정을 그림 16에 도시하였다. 그림에 보인 바와 같이 원공 굴착부의 변위는 개별요소의 외부영역을 구속한 경우, 원공 반지름  $r$ 에 대한 개별요소의 영역  $D$ 의 비가 4에서 12로 증가함에 따라 이론해석치에 신속히 수렴함을 알 수 있다. 일반적으로 암반내에 존재하는 원공문제를 해석할 때, 원공 반지름에 대한 주변 영역의 비가 2 - 5 인 영역까지 고려하여 해석 및 계측을 실시하고 있지만<sup>(24)</sup>, 원공 주위에 불연속면이 발달되어 있으면 그 이상의 영역까지 고려하여 해석하는 것이 보다 정확한 해석결과를 주게 됨을 본 해석의 결과로 알 수 있었다. 그러나 외부영역을 경계요소로 모형화하여 조합한 해석결과는 개별요소의 영역에 관계없이 일정함을 알 수 있다.

## 6. 결 론

본 연구에서는 개별요소와 경계요소의 조합해석을 실시하였다. 개발된 조합해석방법을 무한 및 반무한 영역을 가진 문제에 적용하여 기존의 해석결과와 비교하였으며, 지하구조체를 대상으로 개발된 조합방법을 적용하였다. 지하구조체의 문제에 있어서 응력집중부, 굴착면 혹은 불연속면이 발달되어 있는 영역에서는 개별요소를 사용하고, 응력이 집중되지 않는 무한 및 반무한 영역에는 경계요소를 사용하는 조합방법을 제시하고, 그 타당성과 실용성을 보였다. 또한, 조합해석방법은 절리가 발생한 지하구조체에 대하여 비교적 거친요소망을 사용하여도 정확한 해석결과를 얻을 수 있었고, 입력자료, 전산기의 실행시간과 기억용량을 줄이므로써 효율적인 해석방법임을 알 수 있었다.

경계요소를 사용하여 반무한 영역에 존재하는 원공의 문제를 해석할 경우, 요소 절점사이의 중심각이  $20^\circ$  이하가 되도록 모형화하면 엄밀해에 접근하는 해석결과를 얻을 수 있음을 보였다. 또한, 무한 영역에 존재하는 불연속 지하구조체의 해석을 개별요소만에 의하여 실시할 때, 원공 반지름에 대한 주변

영역의 비가 5 이상인 영역까지 고려하여 해석하는 것이 보다 정확한 해석결과를 얻을 수 있었고, 외부영역을 경계요소로 모형화한 조합해석의 경우에는 원공 주변 영역에 관계없이 동일한 해석결과가 나타남을 확인하였다.

## 참 고 문 헌

1. Cundall P.A., "A Computer Model for Simulating Progressive, Large Scale Movements in Blocky Rock Systems", *Symp. Soc. Int. Mechanique des Roches*, Nancy, pp.8-11, 1971.
2. Kawai, T., "New Discrete Structural Models and Generalization of the Method of the Limit Analysis", *Int. Conference on Finite Elements in Non-linear Solid and Structural Mechanics*, Vol. 2, Norway, 1977. pp. 601-620.
3. Yen, H. J., *Rigid Block Model for Transient Analysis of Rock Structures*, Ph. D. thesis, Northwestern University, Evanston, 1982.
4. Gilbert, C. M., Dowding, C. H., *Three Dimensional Small Displacement Rigid Block Model for Dynamic Analysis of Rock Masses*, Northwestern University, Evanston, 1983.
5. Dowding, C. H., Rozen, A., Damage to Rock Tunnels from Earthquake Shaking, *J. of the Geotechnical Division*, ASCE, Vol. 104, No. GT2, 1978, pp. 171-191.
6. Gilbert, C. M., *Development of a Three Dimensional Small Displacement Rigid Block Model for Dynamic Analysis*. Ph. D. thesis, Northwestern University, Evanston, 1988.
7. Rizzo, F. J., "An Integral Equation Approach the Bounding Value Problems in Classical Elastostatics", *J. of Applied Math.*, Vol. 25, 1967, pp. 83-95.
8. Lachat, J. C., *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*, Ph. D. thesis, University of Southampton, 1975.
9. Banerjee, P. K., "Integral Equation Methods for Analysis of Piece-wise Non-homogeneous Three Dimensional Elastic Solids of Arbitrary Shape", *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 8, 1976, pp. 293-303.
10. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., and Wrobel L. C., *Boundary Integral Techniques*, Springer-Verlag, 1984.
11. Telles, J. C. F., and Brebbia, C. A., "Boundary

- Element Solution for Half-plane Problems”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 17, 1981, pp. 1149-1158.
12. Zienkiewicz, O. C., Kelly, D. W., and Bettess, P., “The Coupling of the Finite Element Method and Boundary Solution Procedures”, *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 11, 1977, pp 355-375.
  13. Yen, H. J., Dowding, C. H., and Belytschko, T. B., “Dynamic Computational Analysis of Openings in Jointed Rock”, *J. of the Geotechnical Engineering*, ASCE, Vol. 109, No. 12, 1983, pp.1551-1566.
  14. Lemos, J. S., *A Hybrid Distinct Element-Boundary Element Method for the Half-plane*, M.S. thesis, University of Minnesota, 1983.
  15. Lorig, L. J., *A Hybrid Computational Model for Excavation and Support Design in Jointed Media*, Ph. D. thesis, University of Minnesota, 1984.
  16. 허택녕, 김문겸, 황학주, “불연속 암반의 구조해석을 위한 수치모형의 비교고찰”, **대한토목학회 학술발표회 개요집**, 1990, pp. 57-60.
  17. 황학주, 김문겸, 허택녕, 나경웅, “물체력이 작용되는 반무한 영역 문제의 비선형 유한요소-경계요소 조합해석”, **대한토목학회 논문집**, 제11권, 제1호, 1991, pp. 45-53.
  18. 황학주, 김문겸, 임윤목, “유한요소와 경계요소의 조합에 의한 반무한 영역 문제의 비선형해석”, **한국전산구조공학회지**, 제2권, 제1호, 1988, pp. 55-64.
  19. 허택녕, 구정희, 김문겸, 황학주, “경계요소-개별요소 조합에 의한 반무한 영역문제의 해석”, **대한토목학회 학술발표회 개요집**, 1991, pp. 42-45.
  20. Brown, E. T., *Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics*, 1987, pp. 162-202.
  21. Brady, B. H. G. and Wassyn, A., “A Coupled Finite Element-Boundary Element Method of Stress Analysis”, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 18, 1981, pp. 475-485.
  22. Mindlin, R. D., “Stress Distribution around a Tunnel”, *Trans. ASCE*, Vol. 105, 1940, pp. 1117-1140.
  23. Cundall, P. A., *UDEC - A Generalized Distinct Element Program for Modeling Jointed Rock, Final Technical Report*, European Research Office, U. S. Army, 1980.
  24. 권인환, **NATM 터널공법**, 1990, pp. 193-201.  
(接受 : 1992. 9. 21)