

## 랜덤하게 분포한 원형 실린더에 의한 SH 탄성파의 다중산란 : 섬유강화 복합재료의 동특성과약

### Multiple Scattering of Elastic SH Waves by Randomly Distributed Circular Cylinders : Characterization of Dynamic Properties of FRC

김진연\*, 이정권\*  
(Jin-Yeon Kim\*, Jeong-Guon Ih\*)

#### 요약

섬유강화 복합재료의 동탄성계수와 감쇠특성을 규명하기 위하여 랜덤하게 분포된 무한 실린더 형상의 산란체를 가진 매질 내에서, 축방향으로 분극되어 조화운동을 하는 탄성파의 전파에 관하여 연구하였다. 단일 실린더에 대한 산란계수로부터 Lax의 준결정근사법을 이용하여 다중산란에 관한 이론을 유도하였고, 매질내에서의 파동전파특성을 대표하는 분산관계식을 얻었다. 다중 산란에 의한 실린더간의 상호작용을 수식화하기 위하여 필요한 실린더의 쌍분포함수는 몬테카를로 모의실험을 이용하여 구하였다. 수치적으로 구한 감쇠계수 및 유효전단강성을 주파수와 면적밀도의 함수로 제시하였다.

#### ABSTRACT

The propagation of coherent time-harmonic elastic SH waves in a medium with random distribution of cylindrical inclusions is studied for characterizing the dynamic elastic modulus and the attenuation property of fiber reinforced composite materials. A multiple scattering theory using the single scattering coefficients in conjunction with the Lax's quasicrystalline approximation is derived and from which the dispersion relation for such medium is obtained. The pair-correlation functions between the cylinders which are needed to formulate the multiple scattering interaction between the cylinders are obtained by Monte Carlo simulation method. From the numerically calculated complex wavenumbers, the propagation speed of the average wave, the coherent attenuation coefficient and the effective shear modulus are presented as functions of frequency and area density.

#### 1. 서론

다중산란(Multiple scattering)의 이론은 Rayleigh가 하늘의 색깔이 푸른 이유를 알기 위하여 랜덤하

게 분포한 입자에 의한 빛의 산란에 관한 논문을 낸 이래 많은 연구가 행해져 왔다. 그 특히 어레이(array)화된 탐지기, 단성체 내부에 분포된 결함, 각종 복합재료, 수중의 기포군(bubble swarm) 등 산란체들이 상태적으로 분포해 있을 경우, 한 산란체에서의 산란파동이 나머지 산란체의 경계에서 다시 산란을 일으키는 과정이 반복되는 다중산란이 발생하게 된

\* 한국과학기술원 기계공학과  
접수일자: 1992. 5. 17

다. 다중산란 문제는 각 산란체에서 전개된 파동함수가 모든 산란체 경계에서의 조건을 만족시켜야 하므로 단일산란(single scattering) 문제에 비하여 훨씬 복잡해져서, 무수히 많은 산란체가 있는 경우에는 모든 경계들을 고려하지 않고 경계들이 존재할 확률을 이용하여 구할 수 있는 평균파동(coherent or averaged wave)을 가정하는 것이 일반적이며, 그러 밀도가 높지 않는 경우에는 단일산란으로 근사화 한다.<sup>1)</sup> 다중산란체를 포함하고 있는 비균질성 매질에서는 일반적으로 분산(dispersion)이 발생하며 매질의 역학적 특성인 동탄성계수와 감쇠계수(attenuation coefficient)는 주파수와 파동의 전파속도의 관계로부터 알 수 있으므로, 분산관계식(dispersion relation)을 구하는 것은 매질의 특성 파악을 위하여 요구되는 기본적인 사항이다.

충격과 같은 과도하중에 의한 섬유강화 복합재료의 응답을 결정하기 위하여 주파수에 따른 동탄성계수 및 감쇠계수를 구하는 것이 필요하며, 그러한 동특성은 복합재료의 설계를 위한 기본적인 데이터이다. Bose와 Mall<sup>2)</sup>은 처음으로 다중산란 이론을 복합재료의 물성연구를 위하여 도입하였다. 그들은 지수형의 쌍분포함수(pair-correlation function)를 이용하여 저주파극한(low-frequency limit)에서 해석을 시도하였다. Varadan<sup>3,4)</sup>등은 전이행렬(transition matrix)를 이용하여 같은 해석을 하였으나, 쌍분포함수를 구체적으로 제시하지는 않았다.

본 논문에서는 실린더의 축방향으로 분극된 평면 전단파(vertically polarized plane shear wave: plane SH wave)가 원형 실린더에 입사되는 경우를 고려하기로 한다. 먼저 N개의 랜덤한 산란체들의 분포에 관한 조건부 확률밀도함수를 이용하여 통계적 평균이 취하여진 평균파동에 관한 식을 Lax<sup>5)</sup>가 제안한 준결정근사법(quasicrystalline approximation: QCA)을 이용하여 단순화시킨 다음, 평균 파동을 평균 복소파수(complex wavenumber)를 가진 평면파로 가정하여 매질에 대한 분산관계식을 얻게 된다. 이 분산관계식에 대한 수치해를 구하여 매질과 산란체의 평균 전파속도와 감쇠계수 및 유효전단탄성(effective shear modulus)을 주파수와 면적밀도의 함수로 구하게 된다.

## II. 다중산란의 수식화

무한매질의 전단탄성과 밀도를 각각  $\mu$ ,  $\rho$ 라하고, 반경이  $a$ 인 원형단면의 실린더의 전단탄성과 밀도를

각각  $\mu'$ ,  $\rho'$ 라하고, 다중산란에 의한 효과만을 보기 위하여 매질과 실린더 자체에서는 감쇠가 없다고 가정한다. 또한 똑같은 물성을 갖는 N개의 실린더는 길이가 무한하고 서로 평행하며, 균일한 등방성 매질내에 랜덤하게 분포한다고 가정한다.  $i$ -번째 실린더와  $j$ -번째 실린더를 Fig.1과 같이 표현하면,  $(R_i, \theta_i)$ 는  $j$ -번째 실린더에 고정된 좌표계를,  $(r, \phi)$ 는 기준좌표계에서의  $i$ -번째 실린더 중심의 위치를,  $(r_{ij}, \theta_{ij})$ 는  $i$ -번째 실린더의 상대적 거리와 각도를 각각 나타낸다. 또한 관심있는  $z$ 방향의 변위를  $w$ 라 한다.

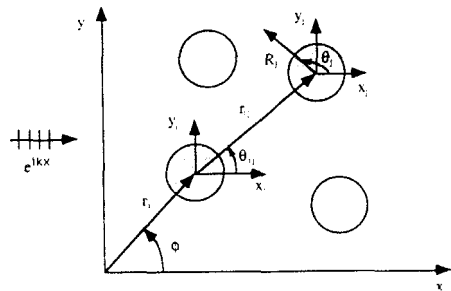


그림 1. 다중산란문제와 관련된 좌표계  
Fig. 1. Coordinate system associated with multiple scattering problem

이제  $\exp(-i\omega t)$ 의 시간항을 가지고  $+x$  방향으로 진행하여 실린더의 축에 대하여 수직으로 입사하는, 축방향으로 분극된 평면 입사파( $w^i$ )에 의한 (축, 축방향의 전단응력을 받는 경우) 산란에 있어서 실린더의 외부 산란파( $w^s$ )와 내부파동( $w^i$ )이 각각 다음과 같은 스칼라 Helmholtz 방정식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} \nabla^2 w^s + k^2 w^s &= 0, \\ \nabla^2 w^i + k'^2 w^i &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  이

며,  $k = \omega/c_0$ ,  $c_0 = \sqrt{\mu/\rho}$ ,  $k' = \omega/c'_0$ ,  $c'_0 = \sqrt{\mu'/\rho'}$  인데, 이는 각각 실린더 외부( $k, c_0$ )와 내부( $k', c'_0$ )에서의 파수와 전파속도를 가리킨다. 입사파와 N개의 실린더에 의한 산란파의 총 변위는 식(1)과, 무한대에서의 경계조건을 만족시키는 해로서, 다음과 같이 각 산란체에 고정된 좌표계에서 기술한 단일 산란의 중첩으로 나타내어진다.

$$w = w^i + w^s = \exp(ikx) + \sum_{i=1}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{in} H_n(kR_i) \exp(in\theta_i) \quad (2)$$

여기서  $H_n(x)$ 은 제1종 Hankel 함수를,  $A_{in}$ 은  $i$ -번째 실린더의  $n$ 차 파동함수의 계수를 가리킨다. 식 (2)에서 입사파와 산란파가  $j$ -번째 실린더 경계에서의 조건을 만족하기 위하여, 각 좌표계에서 표현된 산란파를  $j$ -번째 실린더에 고정된 극좌표에서 표현하는 것이 필요하므로, Hankel함수의 합정리(addition theorem)<sup>[13]</sup>를 생각하면,

$$H_n(kR_i) \exp(in\theta_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m+n} J_m(kR_j) \exp(im\theta_j) H_{m-n}(kR_j) \exp(i(m-n)\theta_j) \quad (3)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 식(3)을 식(2)에 대입하면

$$w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_{im} H_m(kR_i) + J_m(kR_j) \{i^m \exp(ikx_j) + \sum_{n=1}^N \sum_{m'=-\infty}^{\infty} A_{in'} H_{n'}(kR_{i'}) \exp(in'\theta_{i'})\}] \exp(im\theta) \quad (4)$$

로 된다. 여기서  $x_j = r_j \cos\phi_j$ 이며,  $\sum_{i=1}^N$ 는  $j$ -번째 실린더를 제외한 합을 의미한다. 또한 외부의 파동에 의하여  $j$ -번째 실린더 내부로 굴절되어 발생하는 변위는 식 (2)에서와 마찬가지로 식 (1)을 만족시키며 실린더 내부장의 유한성을 만족시키는 해로서,

$$w' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n J_n(k'R) \exp(in\theta) \quad (5)$$

로 표현되는데,  $J_n(x)$ 는 제1종 Bessel 함수를 가리킨다. 모든 실린더의 표면에서의 경계조건이 변위와 응력의 연속임을 고려하면

$$w|_{r=a} = w'|_{r=a} \\ \tau_{rz}|_{r=a} = \tau'_{rz}|_{r=a} \quad (6)$$

이 성립하여야 한다. 여기서  $\tau_{rz} = \mu(\partial w / \partial r)$ , 즉 실린더 축 방향의 전단응력을 나타낸다. 식(4) 및 (5)를 식 (6)에 대입하면

$$A_{im} = T_{im} [i^m \exp(ikx_j) + \sum_{n=1}^N \sum_{m'=-\infty}^{\infty} A_{in'} H_{n'}(kR_{i'}) \exp(in'\theta_{i'})], \quad (7)$$

$$T_m = \frac{\mu'(k'a) J'_m(k'a) J_m(ka) - \mu(ka) J'_m(ka) J_m(k'a)}{\mu(ka) J_m(k'a) H'_m(ka) - \mu'(k'a) J'_m(k'a) H_m(ka)}$$

를 얻게 된다. 여기서  $J'_n(x) = dJ_n(x) / dx$ 이며 마찬가지로  $H'_n(x) = dH_n(x) / dx$ 를 나타낸다. 식 (7)에서  $T_{im} \exp(ikx_j)$ 은  $j$ -번째 실린더에 의한 단일 산란계수인데, Varadan등<sup>[8,9]</sup>의 실린더에 대한 천이행렬에 의한 결과와 동등하다. 특히 수직입사의 SH 탄성파는 모우드 변환(mode conversion)을 일으키지 않으므로, 다른 성분의 변위와 응력은 발생되지 않아서 음파(acoustic wave)와 같은 스칼라 장의 경우에도 똑같이 적용 가능하다. 또한 식 (7)의 의미는  $j$ -번째 실린더의 입장에서 원래의 입사파 뿐만 아니라, 나머지 다른 실린더에 의한 산란파들도 유효한 입사파가 된다는 것을 말한다.

### III. 통계적 평균파동

만일, 산란체의 갯수가 단지 몇 개라면 식 (7)을 모든 경계에 적용하고 ( $j=1, \dots, N$ ) 무한 선형방정식을 유한한 갯수의 항까지만 고려하여(truncation) 산란계수를 구할 수 있지만<sup>[6]</sup>, 산란체의 갯수가 매우 많을 경우에는 주기적인 배열과 같은 특수한 경우<sup>[5]</sup>를 제외하면 실제로 산란계수를 구하기 어렵다. 그러나, 분포가 완전히 랜덤할 경우에는, 다음과 같이 산란체의 분포에 대한 조건부 확률을 이용하여, 다중산란 계수를 모든 산란체에 대하여 앙상블 평균을 취함으로써 얻을 수 있게 된다<sup>[2]</sup>.

먼저  $j$ -번째 산란체의 중심의 위치벡터를  $r_j$ 라 하면, 산란체들이  $r_1, r_2, \dots, r_N$ 에 존재할 결합확률밀도(joint probability density)  $p(r_1, r_2, \dots, r_N)$ 는 조건부 확률밀도에 관한 Bayes 정리<sup>[14]</sup>에 의하여

$$p(r_1, r_2, \dots, r_N) = p(r_1) p(r_2, \dots, r_N | r_1) \\ = p(r_1) p(r_2 | r_1) p(r_3, \dots, r_N | r_1, r_2) \quad (8)$$

의 관계를 가진다. 여기서  $p(r_1)$ 는 하나의 실린더가 면적내에 있을 확률밀도를,  $p(r_j | r_1)$ 는  $r_1$ 에 하나가 존재하고  $r_j$ 에 다른 하나가 존재할 조건부 확률밀도를 나타내며, '는  $r_1$  혹은  $r_1$ 와  $r_j$ 를 제외한다는 뜻이다. 모든 산란체를 포함하는 면적  $S$ 가 무한하다면(따라서  $N \rightarrow \infty$ ),

$$p(r_i) = \frac{1}{S} \quad r_i \in S \quad (9)$$

이고, 또한 조건부 확률밀도는

$$p(r_i | r_j) = \frac{g(r_{ij}/2a)}{S} \quad r_{ij} > 2a, \\ = 0 \quad r_{ij} < 2a \quad (10)$$

로 주어진다. 여기서 쌍분포함수  $g(x)$  ( $x=r_{ij}/2a$ )를 통계역학적<sup>[12]</sup> 용어로 반경분포함수(Radial Distribution Function: RDF)이라 하는데, 원래 통계역학에서는 액체의 상태방정식을 구하기 위하여 사용되었다. RDF는  $x$ 에 다른 산란체가 존재할 확률을 나타내는데, 식 (10)의 두번째 식의 의미는 산란체들이 서로 침투불가능하다는 것을 의미한다. 산란체의 갯수가 작으면  $x > 1$ 인 조건에서  $g(x) = 1$  혹은  $1/(1-c)$ 이고  $x < 1$ 에서는  $g(x) = 0$ 이 되어,  $j$ -번째 산란체가 있을 확률이  $i$ -번째 산란체의 위치에 영향을 받지 않는다는 뜻이 된다. 여기서  $c(=n_0\pi a^2)$ 는 면적 밀도를 나타내고  $n_0$ 는  $N/S$ 를 가리킨다. 그러나 산란체의 갯수와 밀도가 높은 경우에 특히 간섭에 의한 감쇠는 산란체의 상대적 위치에 의존하기 때문에 위의 값은 잘못된 해를 준다.  $g(x)$ 를 구하는 방법<sup>[12]</sup>은 Percus-Yevick 근사, self-consistent 근사, 몬테카를로 모의 실험 등 여러가지 방법이 있으나 면적밀도가 높을 때에도 정확한 해를 줄 수 있는 방법은 몬테카를로 모의 실험이다. 본 연구에서는 산란체들의 위치에 대하여는 2차원 제멋대로 걷기(random walking)를 통하여 새로운 배치를 계속 만들어 내고 각 상황에서의 분포상황을 평균함으로써 구하는 몬테카를로 모의 실험을 이용하였는데<sup>[11]</sup>, 이 방법은 랜덤 샘플의 갯수를 많이함으로써, 정확한 해를 효과적으로 구할 수 있다.

그리하여, 각각  $i$ -번째,  $j$ -번째 산란체가 고정된 상황에서 어떤 통계적 량  $F$ 의 조건부 기대값은

$$\langle F \rangle = \int_{s_1} \dots \int_{s_N} Fp(r_1, r_2, \dots, r_N | r_i, r_j) dr_1 dr_2 \dots dr_N, \\ \langle F \rangle_0 = \int_{s_1} \dots \int_{s_N} Fp(r_1, r_2, \dots, r_N | r_i, r_j) dr_1 dr_2 \dots dr_N \quad (11)$$

이다. 식 (7)에 식 (9)의 확률밀도를 양변에 곱하면, 식 (8), 식 (11)에 의하여 한개의 산란체가 고정되었을 때의 다중산란계수의 기대값이

$$\langle A_{jm} \rangle_j = T_m [i^m e^{ikx_j} + \frac{N-1}{S} \sum_{n=1}^x \int_{|r_n - r_j| \geq 2a} \langle A_{jn} \rangle_0 H_{n-m}(kr_{jn}) e^{i(n-m)\theta_{jn}} g(r_{jn}/2a) dr_n] \quad (12)$$

이 되는데, 두 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값이 적분항 내에 있음을 볼 수 있다. 마찬가지로 두 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값을 얻기 위해서는 세 개의 산란체가 고정되었을 때의 조건부 기대값이 필요하게 되므로 실제로는 무한개의 조건부 기대값을 알아야 한다. 이러한 무한 구조(infinite hierarchy)를 간단화하기 위하여  $Lax$ <sup>[12]</sup>는 다음과 같이 준결정근사법을 제안하였다. 즉,

$$\langle A_{jn} \rangle_0 \cong \langle A_{jn} \rangle, \quad (13)$$

식 (13)을 준결정근사라 하는 이유는, 만일 산란체가 결정(crystal)과 같이 주기적 배열을 가진다면 하나의 산란체에 대한 정보가 전부이므로  $\langle A_{jn} \rangle$ 만 필요하다. 그런데 랜덤하게 분포하지만 면적밀도가 비교적 높은 경우 그 분포가 주기적 분포에서 그리 많이 벗어나지는 않을 것이므로, 식 (13)은 근사적으로 성립함을 알 수 있다. 실린더의 갯수가 매우 많을 때는  $(N-1)/S$ 가  $N/S(=n_0)$ 로 근사되므로, 식 (13)에 의하여 식(12)는,

$$\langle A_{jm} \rangle_j = T_m [i^m e^{ikx_j} + n_0 \sum_{n=1}^x \int_{|r_n - r_j| \geq 2a} \langle A_{jn} \rangle_0 H_{n-m}(kr_{jn}) e^{i(n-m)\theta_{jn}} g(r_{jn}/2a) dr_n] \quad (14)$$

이 된다.

결국 한 산란체의 다중산란계수를 구하는데 있어서 나머지 산란체들의 기여는, 기준산란체에 대한 나머지 각 산란체 들 간의 공간적 분포만에 의해서 포함됨을 알 수 있다.

#### IV. 분산관계식

이제 평균파동을 입사파와 같은 방향으로 진행하는 평면파로 가정하면,

$$\langle A_{jm} \rangle_j = i^m X_m \exp[iK(\omega) x_j] \quad (15)$$

이고,  $K=(K_1+iK_2)$ 는 평균파동의 복소파수를 나타내는데, 실수부는 복합된 매질을 지나는 파동의 전파

속도를, 허수부는 다중산란에 의한 감쇠계수를 나타내며, 모두 주파수의 함수이다. 식 (15)를 식 (14)에 대입하면

$$i^m X_m \exp(iKX_j) = T_m [i^n e^{iKX_j} + n_0 \sum_{j=1}^{\infty} j^n X_n \int_{|r_1-r_2| \geq 2a} e^{iKX_j} H_{n-m}(kr_1) e^{i\alpha \cdot m \cdot r_1} g(r_1/2a) dr_1] \quad (16)$$

이 된다. 식 (16)의 적분을 수행하고 extinction theorem<sup>(2)</sup>에 의하여(부록 참조) 다음과 같은 무한 재차선형 연립방정식을 얻을 수 있다. 즉,

$$\sum_{j=1}^{\infty} [\delta_{mn} - 8c T_m F_{n-m}] X_n = 0 \quad (17)$$

여기서,

$$F_n = \frac{1}{(2ka)^2 - (2Ka)^2}$$

$$[(2ka)J_n(2Ka)H'_n(2ka) - (2Ka)J'_n(2Ka)H_n(2ka)] + \int_1^x [g(x)-1]H_n(2kax)J_n(2Kax)xdx$$

이다. 식 (17)의 의미있는 해는 계수행렬의 행렬식(determinant)이 영이 될 때이므로, 일반화된 고유치 문제로 귀결된다. 즉,

$$|\delta_{mn} - 8c T_m F_{n-m}| = 0, \quad m, n \in \{-\infty, \infty\} \quad (18)$$

유도된 분산관계식 식 (18)은 Varadan<sup>(8,9)</sup> 등의 천이 행렬을 이용하여 구한 식과, Bose와 Mal<sup>(7)</sup>의 지수형 쌍분포함수를 사용한 식과 동등한 식이다.

### V. 수치계산의 결과 및 고찰

#### (1) 몬테카를로 모의실험에 의한 쌍분포함수

조진부확률밀도함수  $p(n|r_1)$ 는 쌍분포함수(혹은 RDF)  $g(x)$ 와 식 (10)에 정의된 관계를 가지는데, RDF는 다음과 같은 몬테카를로 모의실험을 이용하여 구하였다: 즉 먼저 주기적인 경계를 가진 표본이 되는 표본면적 내에 면적밀도에 해당하는 원(hard disks)을 분포시킨 다음 서로 겹쳐지지 않도록 각각의 원들에 대해 난수(random number)를 이용하여 예뻐대로 위치를 시킨다. 표본면적의 경계가 주기적

이기 때문에 어떤 원이 한 경계 밖으로 나가면 반대편 경계에서 새로운 원이 표본면적 내로 들어오게 되므로 무한대의 표본면적을 취하지 않아도 된다. 기준이 되는 원을 중심으로 반경을 증가시키면서 증가된 면적내에 존재할 수 있는 원의 갯수의 양상을 평균은 원의 갯수가  $N$ , 반복되는 모의실험의 횟수를  $T$ ,  $j$ -번째 원이 고정되었을 때의 거리  $r$ 에 따른 평균 갯수를  $n_j(r)$ 라 할 때

$$\langle n(r) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \langle n_j(r) \rangle = \frac{1}{NT} \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N n_{ij}(r) \quad (19)$$

이며, 만일 두 원이 서로 무관하게 분포한다면(uncorrelated), 거리  $r$ 에 있을 평균 갯수는 증가된 면적  $\Delta A(r) = 2\pi r \Delta r$ 에 대하여

$$\langle n(r) \rangle_{unc} = \Delta A(r) c \frac{N-1}{N} \quad (20)$$

이므로,  $r$ 에 원이 존재할 확률은

$$g(r) = \frac{\langle n(r) \rangle}{\langle n(r) \rangle_{unc}} = \frac{\sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N n_{ij}(r)}{c(N-1)T\Delta A(r)} \quad (21)$$

로써 구해진다.  $g(r)$ 은 성질상  $g(r) = 0, 0 \leq r < 1$ 이며,  $g(r) \rightarrow 1, r \rightarrow \infty$ 이다.

Fig.2에서는 면적밀도의 변화에 따른 RDF의 변화를 예시하였는데 기본적으로 위의 성질을 만족하며, Chandler<sup>(5)</sup>의 결과와 일치한다. 면적밀도가 커질수록 진폭이 커짐을 볼 수 있는데, 이것은 실린더들이 서로 가까이 존재하여야 하므로 위치에 대한 상관성이 커짐으로써 발생하는 것이다. 또한 면적밀도가 높아 질수록 진동의 주기가  $1(r_0 = 2a)$ 에 가까워짐을 볼

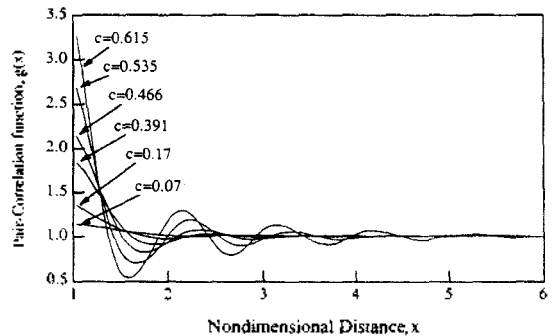


그림 2. 몬테카를로 모의실험에 의한 쌍분포함수  
Fig. 2. Pair correlation function by Monte Carlo simulation

수 있는데 그 내용을 Fig.3에서 기하학적으로 설명해 주고 있다. Fig.4에서는 몬테카를로 모의실험에 사용된  $c=0.466$  일때의 초기 표본면적과 6000번의 제멋대로 걸기를 행한 후의 분포를 보여주고 있다.

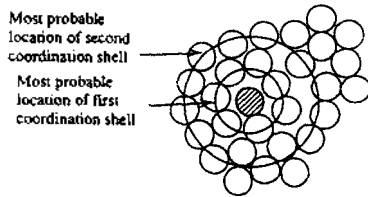


그림 3. 고밀도 복합재료내에서의 실린더의 분포  
Fig. 3. Distribution of cylinders in highly packed composite materials

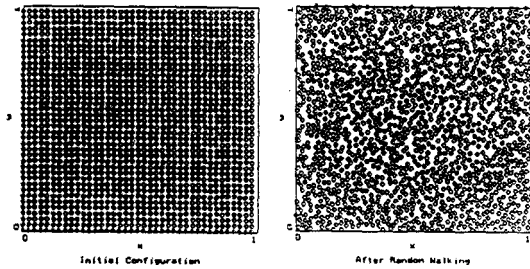


그림 4. 몬테카를로 모의실험에 사용된 표본면적 ( $c=0.466$ )  
Fig. 4. Sample area used in Monte Carlo simulations ( $c=0.466$ )

(2) 유효전단강성과 감쇠계수의 수치해

본 연구에서는 섬유강화 복합재료의 한 예로서 기지(matrix)가 알루미늄이고 섬유가 Boron으로 된 Boron/Aluminum 복합재료를 대상으로 하였다. 이 재료는 우주왕복선에 사용되어 기존의 알루미늄 구조에 대하여 40% 이상의 중량절감 효과를 얻어낸 예가 있다. 수치계산에 사용된 재료의 물성은 Table 1과 같다.

표 1. Boron-Aluminum 복합재료의 물성치 (재료 : 알루미늄)

Table 1. Material properties composing the Boron/Aluminum composites

Material	Density(kg/m <sup>3</sup> )	Shear Modulus(GPa)	Phase Velocity(m/sec)
Aluminum	2720	38.7	3772
Boron	2530	253	9940

식 (18)의 분산관계식의 고유치를 구하기 위하여 행렬의 크기를 (21×21)로 하여 계산에 사용된 주파수 범위 ( $ka=0.05\sim 3$ )에서 파동함수가 수렴하도록 하였다. 또한 행렬식의 판은 IMSL 루틴 ZANLYT를 사용하여 구하였고, 계산은 MIPS workstation 컴퓨터에서 수행하였다. Fig. 5에서는 기지에 대한 복합재료에서의 평균 전파속도비  $Re(C_{avg})/c_p = Re(k/K)$ 를 변적밀도와 주파수의 함수로 계산한 예를 보여주고 있다.  $C_{avg}$ 는 복합재료에서의 평균 속도를 말한다. Table 1에서와 같이 섬유에서의 전파속도가 상대적으로 더 크므로 변적밀도가 높아짐에 따라 평균 전파속도는 커짐을 볼 수 있다. 변적밀도가 약 40% 이상에서는 전파속도 비의 오르내림이 많아지는데, 이는 실린더 간의 거리가 가까워짐으로 인한 산란파들의 공명효과에 의한 것이다. Kinra<sup>[16]</sup> 등은 입자복합재료(particulate composite)에 대한 실험을 통하여 이와 같은 현상을 관찰한 바 있다.

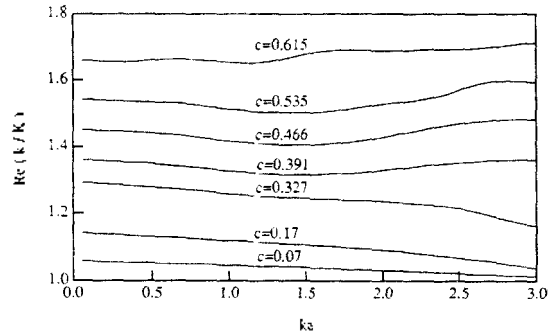


그림 5. 주파수와 변적밀도에 대한 전파속도비  
Fig. 5. Phase velocity ratio with respect to frequency and area density

Fig.6에서는 부착원화 된 비감쇠계수(specific attenuation coefficient:  $4\pi(K_2/K_1)$ )의 변화를 주파수와 변적밀도의 함수로 제시하였다. 복합재료를 구성하는 재료자체에 어떠한 감쇠기구가 존재하지 않더라도, 발생하는 다중산란파에 의하여 매우 큰 감쇠효과를 나타내고 있음을 보여주고 있다. 변적밀도가

약 50%까지는 일정 주파수에서 면적밀도가 증가함에 따라 감소는 증가함을 보여주고 있으나, 면적밀도가 50% 이상에서는 면적밀도가 증가함에 따라 오히려 감소하는 경향이 있다. 이는 산란에 의한 감소효과가 재료의 비균질성에 비례한다고 볼 수 있는데, 50% 이상에서는 기지와 비균질재료(보강재)를 서로 바꾸어 생각하면 50% 이하의 비균질성으로 볼 수 있으므로 면적밀도가 50% 이상에서 오히려 감소효과가 감소하게 된다. 이 결과는 고 면적밀도에서 쌍분포함수를 포함시킴으로써 나타나는 결과이다.

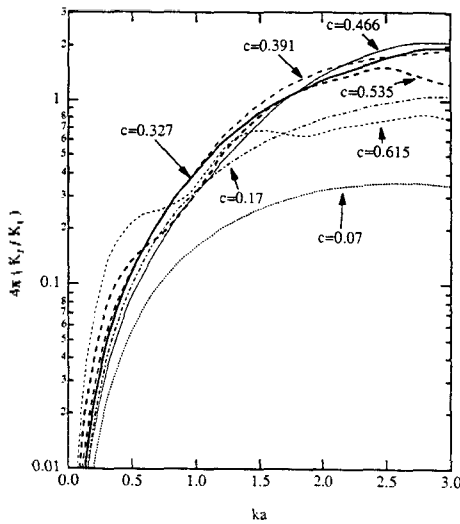


그림 6. 주파수와 면적밀도에 따른 비감쇠계수  
Fig. 6. Specific attenuation coefficient with respect

Fig.7 및 8에서는 각각 주파수와 면적밀도에 따른 유효전단강성의 실수부와 허수부의 변호를 보여주고 있다. 유효 전단강성은  $\langle \mu \rangle = \omega^2 \langle \rho \rangle / K^2$ , 평균밀도는  $\langle \rho \rangle = cp + (1-c)\rho$  이다. Fig.7에서와 같이 기지물 약 50%의 섬유로 강화했을 때 약 2.3 배의 강성이 증가하며, 약 30%의 강화에 대해서는 약 1.5배의 강성 증가를 가져옴을 알 수 있다. Hashin 등<sup>[11]</sup>은 정적 하중 상태에서의 유효전단강성에 대한 재료역학적 해석을 통하여

$$\frac{\langle \mu \rangle}{\mu} = \frac{1+c(m-1)/(m+1)}{1-c(m-1)/(m+1)} \quad (22)$$

라는 식을 얻었다. 여기서  $m = \mu' / \mu$ 이다. Fig.9에서 식 (22)와 본 논문에서 얻은 유효 전단강성의  $ka \rightarrow 0$ 에서의 값을 비교하였는데, 두 결과는 정확하게 일치함을 알 수가 있다.

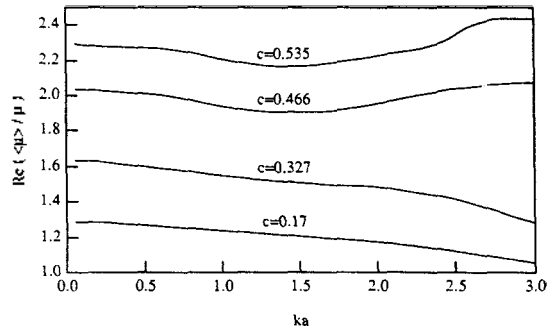


그림 7. 주파수와 면적밀도에 따른 유효전단강성비  
Fig. 7. Effective shear modulus ratio with respect to frequency and area density

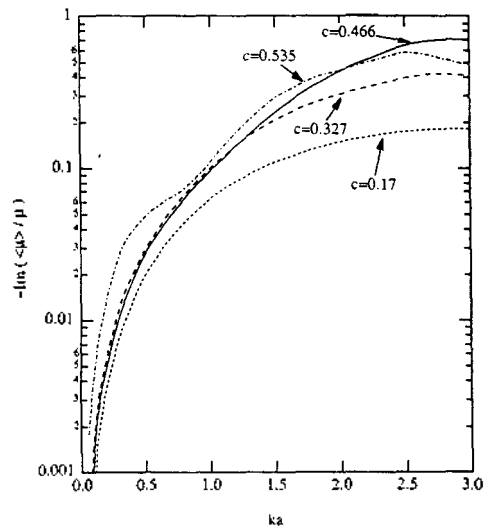


그림 8. 주파수와 면적밀도에 따른 유효전단강성의 허수부  
Fig. 8. Imaginary parts of effective shear modulus with respect to frequency and area density

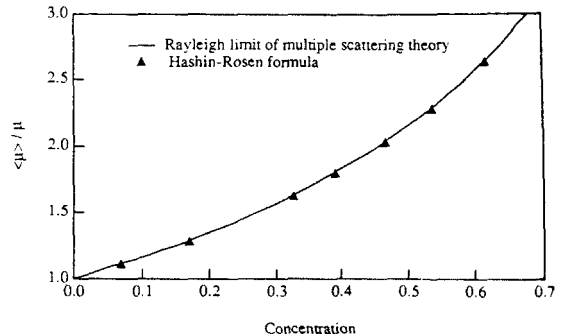


그림 9. 저주파극한에서의 유효전단강성  
Fig. 9. Effective shear modulus at low frequency limit

VI. 결 론

본 연구에서는 섬유강화 복합재료의 동특성을 파악하기 위하여 랜덤하게 분포한 원형 실린더에 의한 다중산란문제를 해석함으로써, 복합재료의 유효전단강성, 감쇠특성, 평균전파속도 등을 기지에 대한 섬유 면적밀도와 주파수의 함수로 얻었다.

얻어진 결과로부터 다음과 같은 결론을 내렸다.

첫째, 전파속도비는 면적밀도가 커지면 따라서 커지나, 주파수의 변화에는 비교적 둔감하다.

둘째, 면적밀도가 높은 범위에서는 산란파들의 간섭에 의한 공명효과에 의하여 전파속도비의 크기 변화가 많아진다.

셋째, 저주파수에서의 ( $ka < 1$ ) 비감쇠계수는 면적밀도가 커질수록 커진다.

넷째, 고주파수에서 면적밀도가 50% 이내에서는 비감쇠계수가 면적밀도가 증가함에 따라 증가하나, 50% 이상에서는 면적밀도의 증가에 따라 오히려 감소하는 경향을 보인다.

다섯째, 본 연구에서 얻은 유효전단강성의 저주파 극한값은 정적하중상태에서 구한 것과 일치하므로, 유효전단강성의 주파수영역에서의 확장이라 할 수 있다.

여섯째, 고주파수에서와 높은 면적밀도에서는 실린더간의 쌍분포함수가 복합재료의 감쇠효과에 매우 큰 영향을 준다.

본 논문에서는 기지와 섬유 자체에는 감소가 없는 금속 복합재료를 대상으로 하였으나, 사용된 물성들을  $\mu = \mu_0 - i\mu_2$ ,  $k = k_1 + ik_2$ 의 복소수로 치환함으로써 기지나 섬유가 점탄성재료일 수 있는 고분자 중합체 (polymer) 복합재료에도 본 논문에서의 이론을 바뀐 가지로 적용할 수 있다. 또한 현재 다른 방향의 동적 물성치를 구하기 위하여 압축 탄성파(longitudinal elastic wave) 및 SV 탄성파(horizontally polarized shear elastic wave)의 복합재료내에서의 전파에 관하여서도 연구 중이며, 이론적으로 구한 동적 물성치 들을 실험을 통하여 얻은 값과 비교할 계획이다.

부록. 식 (16)의 적분과 Extinction theorem

평면파와 Hankel 함수로 전개된 원통파는 모두 파동방정식을 만족하므로

$$I = \int_{|r-r_0| > 2a} e^{ikx} H_n(kr_0) e^{in\theta_0} dr_0 \\ = \frac{1}{k^2 - K^2} \int_{|r-r_0| > 2a} \nabla^2 (e^{ikx}) H_n(kr_0) e^{in\theta_0} \\ - e^{ikx} \nabla^2 (H_n(kr_0) e^{in\theta_0}) dr_0 \tag{A1}$$

Green의 정리에 의하여 선적분으로 바꾸면

$$I = \frac{1}{k^2 - K^2} \int_{L_x - L_{2a}} \frac{\partial}{\partial r} (e^{ikx}) H_n(kr_0) e^{in\theta_0} \\ - e^{ikx} \frac{\partial}{\partial r} (H_n(kr_0) e^{in\theta_0}) dl \tag{A2}$$

먼저  $L_{2a}$ 에서의 적분만 생각하면,

$$e^{iKx_0} = e^{iKx_0} \sum_n i^n J_n(Kr_0) e^{in\theta_0}$$

이고 실린더의 경우

$$\int_{L_{2a}} F(r, \theta) dl = 2a \int_0^{2\pi} F(2a, \theta) d\theta, \int_0^{2\pi} e^{i(n-\nu)\theta} d\theta = 2\pi \delta_{n\nu}$$

이므로 각각을 (A2)에 대입하면

$$I_{2a} = 2\pi i^{-n} e^{iKx_0} [(2Ka) H_n(2ka) J_n'(2Ka) \\ - (2ka) H_n'(2ka) J_n(2Ka)] \tag{A3}$$

이 된다.

또한  $L_x$ 에서의 적분의 거동을 알기 위하여 피적분항의 점근표현을 구하면

$$r_0 = |r_0 - r_1| \rightarrow |r_1 - \frac{\hat{r}_1 \cdot r_0}{|r_1|}|, r_0^{-1} \rightarrow |r_1|^{-1}, \theta_0 \rightarrow \theta$$

이므로

$$H_n(kr_0) e^{in\theta_0} \rightarrow i^{-n} e^{ik_1 r_1} \frac{2}{\pi k_1} e^{i(k_2 r_1 + n\theta)}$$

이다. 그러므로

$$I_{L_x} = \frac{i^n}{k^2 - K^2} \int_{L_x} e^{i(k_1 r_1 + n\theta)}$$



$$\left[ \frac{\partial}{\partial r_1} (e^{ikr_1}) - \frac{2}{\pi kr_1} e^{ikr_1} - e^{ikr_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{2}{\pi kr_1} e^{ikr_1} \right) \right] r_1 d\theta, \quad (A4)$$

식 (A4)는  $k$ 에 관한 파동방정식을 만족한다. 마찬가지로 (A2)는  $K$ 에 관한 파동방정식을 만족한다. 이 사실로부터 식 (14)는 두 개의 독립된 파동방정식을 만족하는 항들로 구성되어 있으므로  $K$ ,  $k$ 에 관한 파동방정식을 만족하는 항들을 각각 분리하여 영으로 놓을 수 있다. 그러므로 무한대에서의 적분과 입사파는 서로 상쇄되게 된다. 이를 Extinction theorem<sup>[2]</sup>이라 한다.

### 참 고 문 헌

1. J.W.S.Strutt(Lord Rayleigh), "On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension and on the origin of the blue sky," *Phil. Mag.* 47, 375-383(1899).
2. M.Lax, "Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense system," *Phys. Rev.* 85, 621-629(1952).
3. V.Twersky, "Acoustic bulk parameters in distributions of pair-correlated scatterers," *J. Acoust. Soc. Am.* 64, 1710-1719(1978).
4. P.C.Waterman and R. Trueil, "Multiple scattering of waves," *J. Math. Phys.* 2, 512-537(1961).
5. V.Twersky, "On scattering of waves by the infinite grating of circular cylinders," *IRE Trans. Antenn. Propag.* 10, 737-756(1962).
6. H.L. Gustafson, III and P.R. Stepanishen, "Effects of multiple scattering and acoustic interactions among two parallel hydrophones and a planar

7. S.K.Bose and A.K. Mal, "Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite," *Int. J. Solids Structures* 9, 1075-1085 (1973).
8. V.K. Varadan, V.V. Varadan, and Y.H. Pao "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section I. SH waves," *J. Acous. Soc. Am.* 63, 1310-1319(1978).
9. V.K. Varadan, V.V. Varadan, and Y. Ma, "Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross section. II. Pair-correlated cylinder," *J. Acoust. Soc. Am.* 78, 1874-1878(1985).
10. W.W. Wood, "Monte Carlo calculation for hard disks in the isothermal isobaric ensemble," *J. Chem Phys.* 48, 415-434(1968).
11. Z.Hashin and B.W. Rosen, "The elastic moduli of fiber-reinforced materials," *J. Appl. Mech.* 31, 223-232 (1964).
12. D. McQuarrie, *Statistical Mechanics*, Harper & Row, N.Y., 1976.
13. M. Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Pub. Inc., N.Y., 1972.
14. A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Process*, McGraw-Hill, N.Y., 1991.
15. D. Chandler, *Introduction to Modern Statistical Mechanics*, Oxford University Press, N.Y., 1987.
16. V.K. Kinra and A. Anand, "Wave propagation in a random particulate composite at long and short wavelength," *Int. J. Solids Structures* 18, 367-380 (1982).
17. 한성섭, 김영한, "금속복합 재료의 제조 및 응용," *대한기계학회지* 32, 46-56(1992).

#### ▲ 김 진 연

1986년 : 연세대학교 기계공학과(학사)  
 1988년 : KAIST 기계공학과(석사)  
 1988년~현재 : KAIST 기계공학과 박사과정

#### ▲ 이 정 권

1979년 : 서울대학교 기계공학과(학사)  
 1981년 : KAIST 기계공학과(석사)  
 1985년 : KAIST 기계공학과(박사)  
 1985년~1990년 7월 : 대우자동차(주) 기술연구소 NVH 담당차장  
 1987년~1988년 : 영국 Southampton Univ., ISAR, Research Staff  
 1990년 8월~현재 : KAIST 기계공학과 부교수