

# 고속 적응 MRP 알고리즘에 의한 저주파 신호 복원

## Simple Signal Reconstruction by Faster Adaptive MRP Algorithm

정 원 용\*, 김 종 수\*\*, 최 태 원\*\*\* 배 진 호\*\*\*\*

(W. Y. Chong\*, J. S. Kim\*\*, T. W. Choi\*\*\* J. H. Bae\*\*\*\*)

### 요 약

천문학, 통신, X선 결정학, 공학등 여러 분야에서 부분정보, 즉 크기 스펙트럼이나 위상 스펙트럼 중 어느 하나만 가지고 원래신호를 근사적으로 복원하는 일은 매우 중요하고도 유용하다.

본 논문에서는 위상정보로부터 크기정보를 추정하여 원래의 저주파신호를 복원하는 반복알고리즘을 시도하였다. 제안된 방법에서는 기존방법에서 제시된 일정상수 함수를 초기 크기정보로 택하는 대신에 지수함수를 택하고, 여기에 적응 알고리즘을 부가적용하여 수렴속도는 물론 메모리 사용면에서도 상당한 개선을 이룰 수가 있었다.

### ABSTRACT

In the fields of astronomy, communication, X-ray crystallography, and engineering, it is a very important and useful fact that the original signal can be reconstructed from a partial information, only spectral magnitude or phase, of the signal.

In this paper, we proposed a modified iterative algorithm to solve the Magnitude Retrieval Problem (MRP) for 1-D, 2-D signals.

In order to accelerate the convergence rate, the unit constant initial function which is used in the references is replaced by the exponential initial function for the modified adaptive iterative method.

As a result, MRP with 1-D signal and low-pass detail image is significantly enhanced from an iterative convergence rate and a computer storage memory points of view.

### 1. 서 론

어떤 신호를 푸리에 변환하여 극좌표로 표시하면 크기 스펙트럼(이하 크기정보)과 위상스펙트럼(이하 위상정보)을 얻는데, 이들 사이에는 서로 직접적인 관련성이 없으므로 이중 어느 한 정보를 알지 못하면

다른 한쪽만의 정보를 가지고 원래 신호를 유일하게 복원하는 것은 원칙적으로 불가능하다.

임의의 신호에 zero-phase 신호를 convolution하면 크기정보는 변화하나 위상정보는 변동이 없고, all-pass 신호를 convolution하면 반대로 위상정보는 변할 수 있으나 크기정보는 변동이 없기 때문이다.

그러나 복원 대상신호에 대한 선험적정보 즉, 신호의 깊이 양수라든지, 신호의 길이가 유한하다든지, 주파수 band가 제한적이라든지 또는 에너지가 유한

\*경남대학교 전기공학과  
 \*\*한국전기연구소 전력전자연구실  
 \*\*\*동의전문대학 전기공학과  
 \*\*\*\*영남대학교 전기공학과  
 접수일자: 1991. 9. 18.

하다는 등의 기지의 신호특성을 원리적 또는 경험적으로 알 수 있다면 이를 이용하여 잃어버린 정보의 근사적 복원이 가능하다.

Minimum-phase 신호와 같이 특수한 경우에 크기 정보나 위상정보 어느 하나만 주어지면 다른 하나는 Hilbert 변환을 통하여 추정할 수 있고 이것을 역푸리에 변환하여 원래 신호를 복원할 수 있다는 사실은 잘 알려져 있으나 불행히도 대부분의 신호는 pole, zero가 모두 단위원 안에 존재해야 한다는 minimum-phase 조건을 만족하지 못하고 있다.<sup>(1)</sup>

신호복원문제는 위상 정보에서 크기정보를 추출하는 MRP(Magnitude Retrieval Problem)와 크기정보에서 위상정보를 추출하는 PRP(Phase Retrieval Problem)의 두 분야로 나뉘어진다.

PRP의 응용분야 중, X선 결정학에서, 결정분자구조는 관측되어지는 X선 회절 pattern으로부터 추론되어지며, 회절 pattern과 확산밀도가 서로 관련되어 있지만 회절 pattern의 크기정보(intensity)만 측정되어 지므로 PRP를 적용하여 이의 위상정보를 추출하는 것은 결정구조를 파악하는데 필수 불가결한 문제이다.<sup>(2)</sup>

지진학, 수중음향학, 레이다, 포나 등의 MRP응용 분야에서는 반향신호(reverberatory)나 미지의 전파 신호와 같은 진행파를 여러번 관측하고, 이들의 cross spectrum 위상정보로부터 크기정보를 추출하여 도달시간과 감쇠계수를 결정할 수 있다.<sup>(3)</sup>

이러한 신호복원문제는 1948년에 Gabor가 파면(波面)을 가로지르는 위상함수를 결정하는 실험적 방법을 제안한 것을 시작으로 Hoppe(1970), Schiske(1968), Erickson과 Klug(1970)에 이어 Gerchberg, Saxton(1971)의 위상결정 알고리즘 제안으로 신호복원문제는 크게 활성화 되었으며<sup>(4)</sup>, 최근에는 Oppenheim, Lim, Hayes, Fienup, Bates 등에 의하여 계속 연구되고 있다.<sup>(5,8)</sup>

일반적으로 위상정보가 크기정보보다 복원신호에 관한 정보를 많이 가지고 있기 때문에 PRP보다 MRP에 대한 연구가 활발히 수행되어왔다<sup>(9)</sup>. MRP에서 주로 사용되어지는 방법으로는 Closed form solution과 반복법(iterative method)이 있으며 데이터 량이 적은 신호에 대해서는 비반복법인 Closed form solution이 효과적이나 확산신호와 같이 대량의

데이터 처리를 필요로 하는 경우에는 반복법이 우월하다.

기존의 MRP 반복법은 주파수영역에서의 초기 크기정보로 일정상수함수 사용, 위상정보대입, 시간영역의 원래신호 길이만큼의 절단 등의 비선형 변환과 신호복원의 유일성 및 수렴성에 근거하여 미지의 원래신호를 복원해 내는 알고리즘이며 큰신호 경우 복원에 많은 반복횟수가 요구되며 해당 알고리즘의 수렴속도가 반복법의 아주 중요한 문제로 대두된다.

본 논문에서는, 저주파신호(simple signal)가 일반적으로 저주파 성분을 많이 포함하고 있으므로 초기 크기정보로 저주파 성분을 많이 가지고 있는 지수함수를 택하였고 여기에 적용 알고리즘을 도입하므로서 수렴속도를 개선하였고, 아울러 zero-padding 영역의 전체 zero화 대신 일부 zero화를 시도하므로서 메모리 사용량과 계산속도의 향상을 함께 실현하였다.

## II. 초기 크기정보 결정

일반적으로 반복법에서는 초기점 또는, 초기함수 선정이 수렴속도의 증감에 상당한 영향을 주게 된다. 특히, 많은 데이터를 취급하는 확산복원 문제에서는 적절한 초기정보의 선택으로 바라는 신호를 가능한 빨리 복원시키고자 한다.

이에 저주파 신호의 일반적 성질을 공간영역에서 관찰하여 보면 많은량의 지류성분과 어느정도의 교류성분으로 구성되어 있어 이는 주파수 영역의 저주파부분 impulse와 고주파부분 ripple 형태로 변환 대응된다.

따라서 표준함수로서는 지수함수가 주파수 영역에서 위의 저주파신호의 일반적 성질을 잘 만족하므로 본 반복법에서는 주파수 영역의 초기크기 정보함수로 지수함수로 modelling 하였다.

저주파 복원대상 신호의 크기정보와 지수함수 크기정보를 그림 1, 2에 나타내었고 그의 다수의 다른 저주파 신호에 대하여 크기 정보를 관찰하여 본 결과 지수함수가 적절한 model임을 확인할 수 있었다.

한편, 지수함수 크기정보  $|F(u,v)| = \exp[-\alpha(u+v)]$ 의 매개변수  $\alpha$ 의 변화에 따른 수렴속도 관계를 조사하여 본 결과  $\alpha$ 의 값이 0.7-0.9 범위에서는 거의 같은

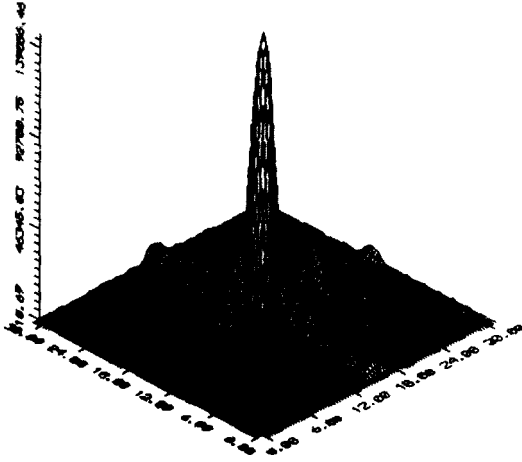


Fig. 1 Magnitude spectrum of 2-D signal,

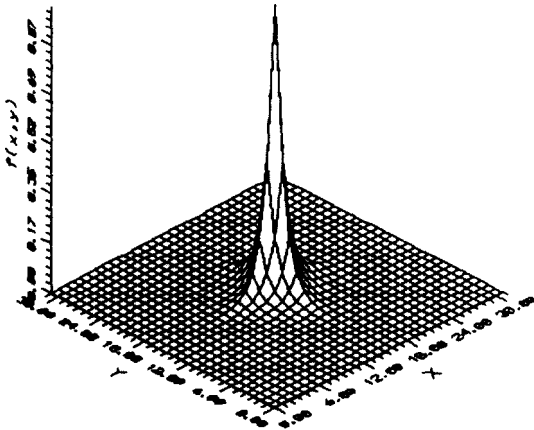


Fig. 2 Exponential function,

수렴속도를 보여주고 있음을 실험결과에서 확인할 수 있어서 매개변수 결정의 난이성을 경감시킬 수가 있었다.

본 논문의 초기함수로서의 지수함수 시도는 어디까지나 실험적 경험에 근거하였고 이의 해석적 이론 전개는 매우 난해한 부분으로 다음 연구 과제로 생각되어 진다.

그리고, 고주파 신호에 대하여 어떤 표준함수가 합당한지는 아직 실험하여 보지 못하였으나 지수함수와 역함수 관계가 있을 것으로 생각되어 진다.

### Ⅲ. MRP 알고리즘

신호  $x(n)$ 의 푸리에 변환,  $X(\omega)$ 는

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = |X(\omega)| e^{j\theta_x(\omega)} \quad (1)$$

이고,  $|X(\omega)|$ 와  $\theta_x(\omega)$ 는  $X(\omega)$ 의 크기, 위상정보이고 MRP는  $\theta_x(\omega)$ 만 주어지고,  $|X(\omega)|$ 를 추출하여 원래의 신호  $x(n)$ 을 복원하는 문제이다. MRP에서 사용하는 Closed form solution과 반복법을 다음에 설명한다.

#### 3.1 Closed Form Solution

반복법을 사용하지 않고 위상정보로부터 원래 신호를 정확히 복원하는 방법으로 Closed form solution이 있다. 이 방법은 푸리에 변환의 관계식으로부터 선형 연립방정식을 세워 해를 구하는 방법이다.

1-D 신호  $x(n)$ 의 푸리에 변환 정의와 극좌표 형식으로부터

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\cos n\omega - j \sin n\omega) \quad (2)$$

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta_x(\omega)} = |X(\omega)| (\cos \theta_x(\omega) + j \sin \theta_x(\omega)) \quad (3)$$

을 얻고, 식(2), (3)의 실수 부분을 같이하여

$$|X(\omega)| \cos \theta_x(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos n\omega \quad (4)$$

을 얻고, 식(2), (3)의 실수 부분을 같이하여

$$|X(\omega)| \sin \theta_x(\omega) = - \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \sin n\omega \quad (5)$$

을 얻으며, 식(4)에  $\sin \theta_x(\omega)$ 를 곱하고 식(5)에  $\cos \theta_x(\omega)$ 를 곱하여 빼면 즉,

$$\begin{aligned} & \sin \theta_x(\omega) * (4) - \cos \theta_x(\omega) * (5), \\ & \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\sin \theta_x(\omega) \cos n\omega + \cos \theta_x(\omega) \sin n\omega) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N-1} x(n) (\sin \theta_x(\omega) \cos n\omega + \cos \theta_x(\omega) \sin n\omega) \\ & = -x(0) \sin \theta_x(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

로 되며, 1-D의 최종 closed form은

$$\sum_{n=0}^{N_1} x(n) \sin(\theta_x(\omega) + n\omega) = -x(0) \sin\theta_x(\omega) \quad (8)$$

로 나타난다.

한편, 2-D 신호 경우에는  $x(n_1, n_2)$ 이 유일한 support  $R(N_1, N_2)$ 을 가지고,  $X(z_1, z_2)$ 은 irreducible 다항식이라고 가정한다. 편의상  $x(0,0) = \alpha_0$ 라 하고 이미 알고 있다고 한다. 이 경우  $2N_1 \times 2N_2$ -point DFT의 위상정보,  $\theta_x(\omega_1, \omega_2)$ 와  $\alpha_0$ 로서 2-D 신호  $x(n_1, n_2)$ 을 유일하게 규정할 수 있다<sup>(10)</sup>.

2-D closed form solution은 1-D 경우와 비슷하게 유도할 수 있으며

$$\sum_{n_1=1}^{N_1-1} \sum_{n_2=1}^{N_2-1} x(n_1, n_2) \sin[\theta_x(\omega_1, \omega_2) + n_1\omega_1 + n_2\omega_2] = -\alpha_0 \sin\theta_x(\omega_1, \omega_2) \quad (9)$$

로 표시된다.

주어진 위상정보를 위 식에 대입하면  $P = N_1 N_2$  변수와  $Q = 4N_1 N_2$ 개의 선형방정식으로 정리된다. 이를 벡터형식으로 간략하게 표시하면

$$A \mathbf{V}_x = -\alpha_0 \mathbf{B} \quad (10)$$

로 되고,  $A$ 는  $Q$ 행  $P$ 열 행렬이고  $\mathbf{B}$ 는  $Q$ 길이 벡터이며  $\mathbf{V}_x$ 는  $P$ 길이  $x(n_1, n_2)$  벡터이다.  $A$ 행렬의 열이 일차독립이면  $A^T A$ 는 non-singular가 되고 역행렬이 항상 존재하여

$$\mathbf{V}_x = -\alpha_0 (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{B} \quad (11)$$

가 되어  $x(n_1, n_2)$ 을 복원할 수 있다.

그러나 결정적인 단점은 선형 시스템 식(11)을 푸는 과정에  $(A^T A)^{-1}$  역행렬을 풀어야 하는데  $N$ 이 클 경우에는 메모리 저장능력과 반올림오차에 아주 심각한 문제가 야기된다.

### 3.2 반복법

신호  $x(n_1, n_2)$ 의 2-D DFT,  $X(k_1, k_2)$ 는

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{M_1-1} \sum_{n_2=0}^{M_2-1} x(n_1, n_2) \exp(-j \frac{2\pi}{M_1} n_1 k_1 - j \frac{2\pi}{M_2} n_2 k_2) \quad (12)$$

,  $0 \leq k_1 \leq M_1-1, 0 \leq k_2 \leq M_2-1$

로 표시된다.

만약  $x(n_1, n_2)$ 가 support  $R(N_1, N_2)$ 를 가진 화상 신호 이면,  $M_1 \geq 2N_1, M_2 \geq 2N_2$ 가 만족 될때만 aliasing이 발생되지 않는 정확한 변환이 가능하다는 점에 주목해야 한다.

Closed form solution의 대안으로 제안된 Gerchberg-Saxton 반복법은  $x(n_1, n_2)$ 에 대하여 공간영역과 주파수영역에서 다음과 같이 정의된 연산자와 이미 알고있는 제약점, 즉,

Windowing 연산자,  $D[\cdot]$

$$D[x(n_1, n_2)] = \begin{cases} x(n_1, n_2) & : \text{if } (n_1, n_2) \in R(N_1, N_2), (n_1, n_2) \neq (0,0) \\ \alpha_0 & : \text{if } (n_1, n_2) = (0,0) \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

DFT 연산자,  $W[\cdot]$ , 역 DFT 연산자  $W^{-1}[\cdot]$ ,

$$W[x(n_1, n_2)] = X(k_1, k_2) \quad (14)$$

위상 대입연산자,  $\Phi[\cdot]$

$$\Phi[Y(k_1, k_2)] = |Y(k_1, k_2)| \exp[j\theta_x(k_1, k_2)] \quad (15)$$

제약점

$$\begin{cases} \alpha_0 = x(0,0) \\ R(N_1, N_2) = x(n_1, n_2) \text{의 support} \\ \theta_x(k_1, k_2) = M_1 \times M_2\text{-point DFT 위상정보} \end{cases} \quad (16)$$

을 이용하여 비선형 고정점 방정식

$$x_{p+1}(n_1, n_2) = F\theta[x_p(n_1, n_2)] = W^{-1} \Phi W D[x_p(n_1, n_2)] \quad (17)$$

을 만족하는 해를 반복적으로 유일하게 복원하는 알고리즘이다.

이제, 반복 loop를 실제로 수행 해보면 초기크기정보  $|G(k_1, k_2)|$ 와 주어진 위상정보  $\theta_x(k_1, k_2)$ 로부터  $x(n_1, n_2)$ 의 첫번째 추정치  $y_1(n_1, n_2)$ 가 다음과 같이 얻어진다.

$$y_1(n_1, n_2) = \text{IDFT} [ |G(k_1, k_2)| \exp(j\theta_x(k_1, k_2)) ] \quad (18)$$

$y_1(n_1, n_2)$ 는  $M_1 \geq 2N_1$ ,  $M_2 \geq 2N_2$ 을 만족하는  $M_1 \times M_2$ -point IDFT에 의해서 얻어졌기때문에  $x(n_1, n_2)$ 의 support을 제외한 영역의 nonzero 값을 모두 zero 화하는 windowing 연산자  $D[\cdot]$ 를 통과한 신호  $x_1(n_1, n_2)$ 는

$$x_1(n_1, n_2) = \begin{cases} y_1(n_1, n_2), & x(n_1, n_2) \text{의 support 영역} \\ \text{arbitrary constant}, & n_1 = n_2 = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

로 되고,  $x_1(n_1, n_2)$ 을 DFT하여  $|X_1(k_1, k_2)|$ 를 얻으며, 주어진 위상정보  $\theta_x(k_1, k_2)$ 를  $x_1(n_1, n_2)$ 의 위상정보 대신 대입하여서  $x(n_1, n_2)$ 의 두번째 추정치  $y_2(n_1, n_2)$ 는

$$y_2(n_1, n_2) = \text{IDFT} [ |X_1(k_1, k_2)| \exp(j\theta_x(n_1, n_2)) ] \quad (20)$$

로 되고, windowing 연산자  $D[\cdot]$ 를 통과하면  $x_2(n_1, n_2)$ 가 얻어진다. 이 과정을 반복수행하는 도중 오차변화율이 충분히 적든지, 정해진 반복횟수가 되면 알고리즘을 종료한다.

원래신호  $x(n_1, n_2)$ 와 추정치  $x_p(n_1, n_2)$ 사이의 오차 함수  $E_p$ 는

$$E_p = \sum_{n_1=0}^{M_1-1} \sum_{n_2=0}^{M_2-1} (x(n_1, n_2) - x_p(n_1, n_2))^2 \quad (21)$$

Parseval 정리를 적용하면

$$E_p = \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{k_1=0}^{M_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} |X(k_1, k_2) - X_p(k_1, k_2)|^2 \quad (22)$$

가 되고  $X(k_1, k_2)$ 와  $X_p(k_1, k_2)$ 의 위상이 같으므로

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{k_1=0}^{M_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} [ |X(k_1, k_2)| - |X_p(k_1, k_2)| ]^2 \\ &= \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{k_1=0}^{M_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} [ |X(k_1, k_2)| - |Y_{p-1}(k_1, k_2)| ]^2 \end{aligned} \quad (23)$$

이된다.

삼각 부등식을 사용하면.

$$E_p \leq \frac{1}{M_1 M_2} \sum_{k_1=0}^{M_1-1} \sum_{k_2=0}^{M_2-1} |X(k_1, k_2) - |Y_{p-1}(k_1, k_2)||^2 \quad (24)$$

이 되고, 다시 Parseval 정리를 사용하면,

$$E_p \leq \sum_{n_1=0}^{M_1-1} \sum_{n_2=0}^{M_2-1} (x(n_1, n_2) - y_{p-1}(n_1, n_2))^2 \quad (25)$$

가 된다.

구간  $0 \leq n_1 \leq N_1-1$ ,  $0 \leq n_2 \leq N_2-1$ 에서

$$x_{p-1}(n_1, n_2) = y_{p-1}(n_1, n_2) \quad (26)$$

이고,

구간  $N_1 \leq n_1 \leq M_1-1$ ,  $N_2 \leq n_2 \leq M_2-1$ 에서는

$$x_{p-1}(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) = 0 \quad (27)$$

이 되므로

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1=0}^{M_1-1} \sum_{n_2=0}^{M_2-1} (x(n_1, n_2) - y_{p-1}(n_1, n_2))^2 \\ & \leq \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} (x(n_1, n_2) - x_{p-1}(n_1, n_2))^2 = E_{p-1} \end{aligned} \quad (28)$$

이 된다. 따라서,  $E_p \leq E_{p-1}$ 이 성립한다.

즉, 반복횟수  $p$ 가 증가함에 따라 해의 유일성정리와  $M \geq 2N$ 의 DFT 제약점에 의하여  $x_p(n_1, n_2)$ 가 항상 복원대상신호  $x(n_1, n_2)$ 에 수렴함을 알 수 있다.

그 결과로 임의의 초기정보를 어떻게 택할지라도 반복횟수를 충분히 늘리면 원래의 신호로 수렴된다.

원래신호  $x(n_1, n_2)$ 와 추정치  $x_p(n_1, n_2)$  사이의 NMSE,  $\varepsilon_p$ 는

$$\varepsilon_p = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left[ \frac{x(n_1, n_2)}{\sigma_x} - \frac{x_p(n_1, n_2)}{\sigma_p} \right]^2 \quad (29)$$

이고,  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_p^2$ 은 각각  $x(n_1, n_2)$ ,  $x_p(n_1, n_2)$ 의 variance 들이다.

3.3 적응 반복법

반복 계산중 IDFT후 공간영역의 zero padding 부분에 나타나는 non-zero성분을 zero화 시키므로서 화상 신호의 support부분의 값이 원래 신호에 적응적으로 수렴해하는 적응 알고리즘을 반복법에 부가적용하면 수렴속도가 더욱더 개선 될것으로 생각되어진다.

이제, 식(17)에 아래와 같은 적응알고리즘을 적용한다.

고정점 문제

$$x_{p+1}(n_1, n_2) = F\theta[x_p(n_1, n_2)] \quad (30)$$

에서 오차신호  $r_p(n_1, n_2)$ 를

$$r_p(n_1, n_2) = x_{p+1}(n_1, n_2) - x_p(n_1, n_2) \quad (31)$$

로 정의하고, step size  $\alpha_p$ 를 고려하면 다음의 적응알고리즘을 얻을 수 있다.

$$x_{p+1}(n_1, n_2) = x_p(n_1, n_2) + \alpha_p r_p(n_1, n_2) \quad (32)$$

또는

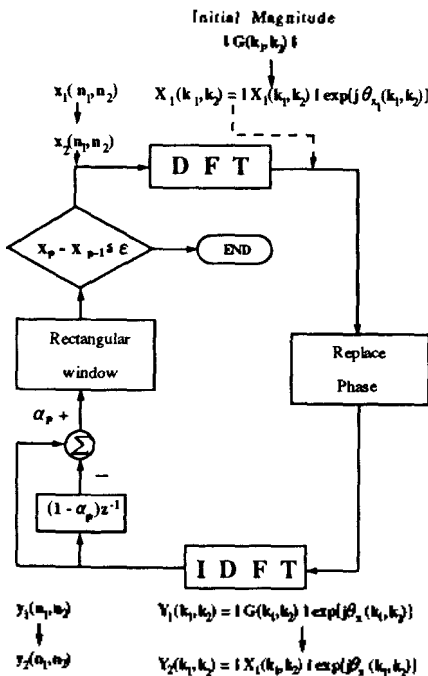


Fig. 3 Adaptive iterative method.

$$x_{p+1}(n_1, n_2) = \alpha_p F\theta[x_p(n_1, n_2)] + (1 - \alpha_p)x_p(n_1, n_2) \quad (33)$$

이를 Block diagram으로 표시하면 그림 3이된다.

적응반복 알고리즘에서는 일반적으로 step size  $\alpha_p$ 를 어떻게 결정하느냐에 따라 수렴속도에 상당한 영향을 준다.

이제 zero padding 영역의 에너지를 최소화하기 위한  $\alpha_p$ 의 최적치를 유도해보자.

식(32)을 support 부분과 zero padding 영역을 나누어 표시하면

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X(n_1, n_2) & X(n_1, n_2) \\ s(p+1) & z^{2(P+1)} \\ \hline X(n_1, n_2) & X(n_1, n_2) \\ z^{3(p+1)} & z^{4(P+1)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X(n_1, n_2) & X(n_1, n_2) \\ s(p) & z^{2(P)} \\ \hline X(n_1, n_2) & X(n_1, n_2) \\ z^{3(p)} & z^{4(P)} \end{bmatrix} \\ &+ \alpha_p \begin{bmatrix} r(n_1, n_2) & r(n_1, n_2) \\ s(p) & z^{2(P)} \\ \hline r(n_1, n_2) & r(n_1, n_2) \\ z^{3(p)} & z^{4(P)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

zero padding 부분의  $X_{zp}$ 가 zero로 수렴하면 support 영역의  $X_{sp}$ 가 원래신호로 수렴한다는 사실에 주목하여  $\alpha_p$ 의 최적치를 결정하는 한 방법으로  $X_{z(p+1)}$ 의 Euclidean norm,  $\|X_{z(p+1)}\|^2$ 을 최소화 시키므로서 다음과 같이  $\alpha_p$ 의 최적치  $\alpha_p^*$ 를 구할 수 있다.

$$\left[ \frac{d}{d\alpha_p} \|X_{z(p+1)}\|^2 \right]_{\alpha_p = \alpha_p^*} = 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \|X_{z(p+1)}\|^2 &= \langle X_{z(p+1)}, X_{z(p+1)} \rangle \\ &= \langle X_{z(p+1)}, X_{zp} + \alpha_p r_{zp} \rangle \end{aligned} \quad (36)$$

로 정의하면,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\alpha_p} \|X_{z(p+1)}\|^2 \\ &= \frac{d}{d\alpha_p} \langle X_{z(p+1)}, X_{zp} + \alpha_p r_{zp} \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{d\alpha_c} \langle X_{z(p+1)}, X_{zp} \rangle + \frac{d}{d\alpha_c} \langle X_{z(p+1)}, \alpha_n r_{zn} \rangle \\
 &- \frac{d}{d\alpha_p} \langle X_{zp} + \alpha_p r_{zp}, X_{zp} \rangle + \frac{d}{d\alpha_p} \langle X_{zp} + \alpha_p r_{zp}, \alpha_p r_{zp} \rangle \\
 &= 2 \langle r_{zp}, X_{zp} \rangle + 2\alpha_p \langle r_{zp}, r_{zp} \rangle = 0 \quad (37)
 \end{aligned}$$

고로, 최적치  $\alpha_p^*$ 는

$$\alpha_p^* = \frac{\langle r_{zp}, X_{zp} \rangle}{\langle r_{zp}, r_{zp} \rangle} = \frac{\langle r_{zp}, X_{zp} \rangle}{\|r_{zp}\|^2} \quad (38)$$

이 된다.

#### IV. 시뮬레이션 결과 및 고찰

1-D 복원 대상신호로 medium-phase 신호를 택하였으며 초기 크기정보 함수로 일정상수 함수를 택한 경우와 지수함수를 취한 경우의 결과를 반복횟수에 따라 그림 4(10회), 그림 5(100회)에 비교 표시하였다. 이 시뮬레이션 결과를 관찰해 보면 일정상수 경우의 10회 까지 수행한 결과보다 지수함수 경우에는 10회 정도에서 이미 더 개선된 결과를 보여주고 있다.

더 나아가서 medium-phase 신호외에 maximum, minimum phase 신호에 대하여서도 이러한 실험을 확장하여 본 결과 역시 지수함수 경우가 훨씬 나은 수렴속도를 보여주고 있음을 확인할 수 있었다.

같은 방법으로 2-D 화상신호의 실험결과를 고찰해 보면 초기크기정보로 일정상수화상을 취한 경우와 지수화상을 취한 경우의 시뮬레이션 결과를 그림 6, 7에 나타내었으며 왼쪽 상단이 원래 복원대상화상이고, 시계 반대방향으로 진행하여 반복횟수 0, 1, 10, 20, 30, 50회에 해당되는 복원화상이 정렬되어 있다.

그림에서 보는 바와 같이 지수화상의 경우는 30회 정도의 반복횟수에서 이미 복원대상화상을 거의 원상대로 복원한 반면 일정상수화상의 경우는 아직도 미진한 화상을 보여주고 있어 수렴속도 면에서 상당한 개선이 이루어졌음을 볼 수 있다.

또한, IDFT 과정에서 발생한 nonzero zeropadding 영역중 3, 4상환을 부분 zero화 하는 적응알고리즘을 부과하여 본 결과 그림 8에서 보는바와 같이 적응알고리즘을 부과하지 않은 그림 6, 7보다 현저한 수렴

속도 개선이 이루어졌음을 알 수 있다.

이상의 결과를 그림 9의 NMSE 비교로서 이를 정량적으로 확인할 수가 있다.

한편, 시수 초기크기정보의 매개변수  $\alpha$ 의 변화에 따른 수렴속도 관계를 조사하여 본 결과  $\alpha$ 의 값이 0.7~0.9 범위에서는 대부분 저주파 화상신호에 대하여 거의 같은 수렴속도를 보여주고 있음을 그림 10에서 확인할 수 있었으며 매개변수 선택에서 어느 정도의 여유있는 범위를 제공하고 있음을 알 수 있었다.

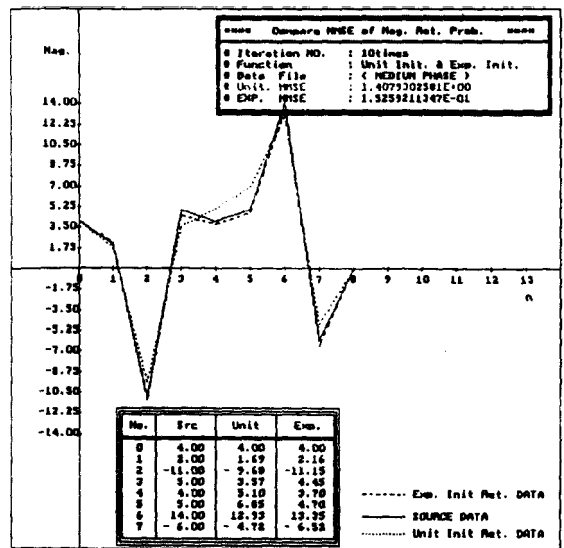


Fig. 4 MRP results at 10 iterations.

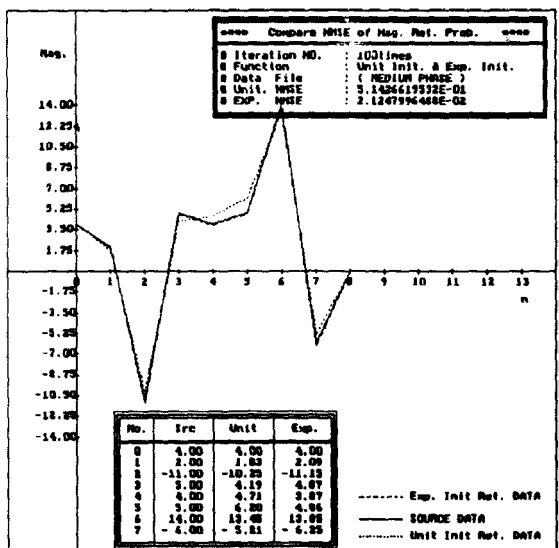


Fig. 5 MRP results at 100 iterations.

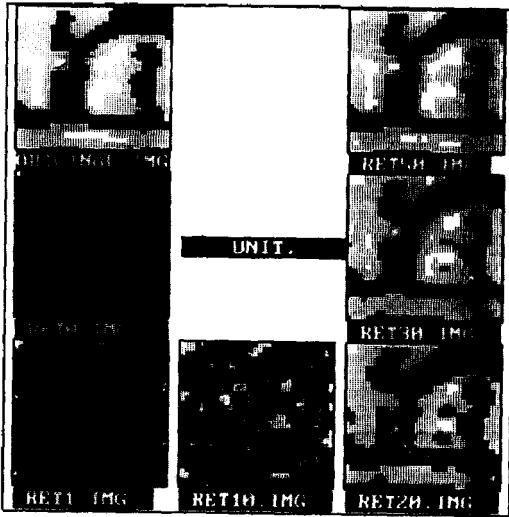


Fig. 6 MRP results with unit initial magnitude.

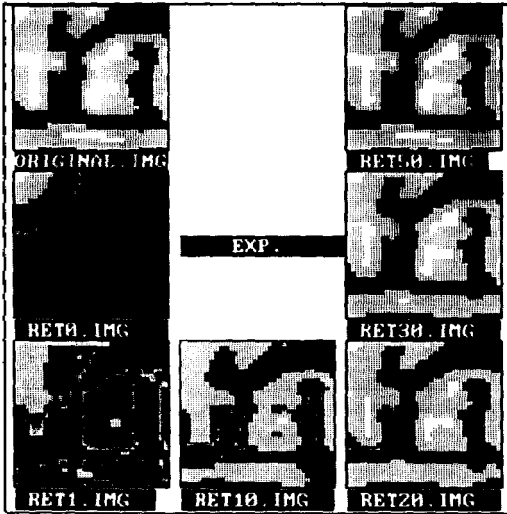


Fig. 7 MRP results with exp. initial magnitude.

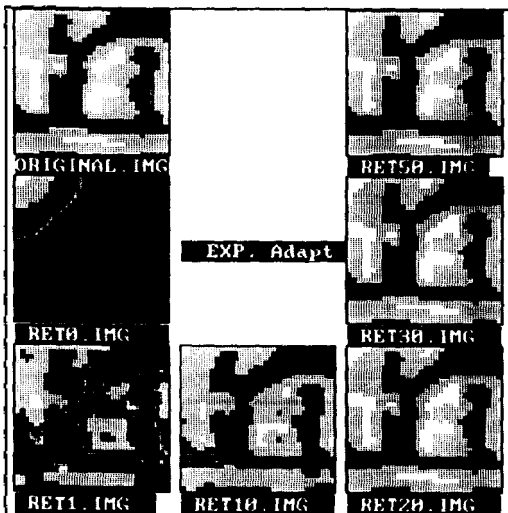


Fig. 8 MRP results with adapt. exp. initial mag.

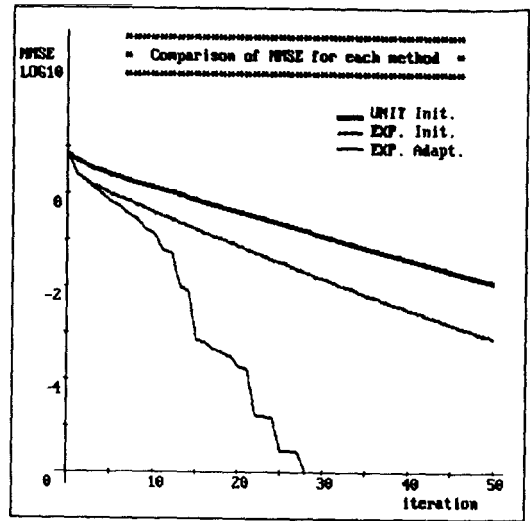


Fig. 9 Comparison of MRP results with respect to NMSE.

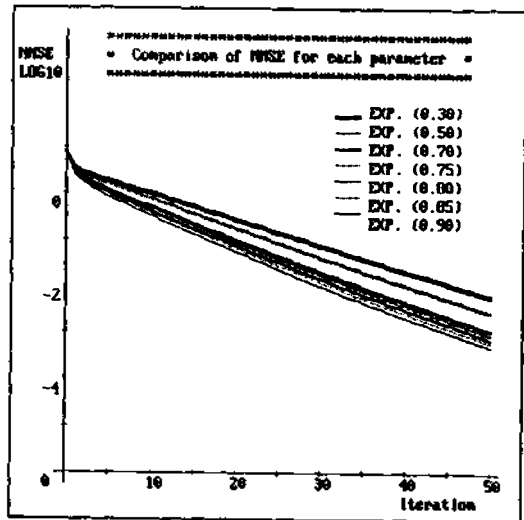


Fig. 10 MRP results with different exp. parameter.

### V. 결 론

어떤 신호의 위상정보, 크기정보 중 어느 한 정보만 주어지고 이로부터 다른 쪽 정보를 추정하여 원래 신호를 정확히 복원하는 것은 원칙적으로 불가능하다. 그러나 신호에 대한 부분정보를 경험적 또는 원리적으로 알 수 있으면, 이것을 이용하여 원래신호를 상당히 근사하게 복원하는 것은 가능하다.

본 논문에서는 이러한 신호복원 문제를 개선하기 위한 한 방법으로 기존 방법과는 달리 초기정보로 일정상수함수 대신 지수함수를 선택하였고, 여기에 적



용 알고리즘을 부가하여서 수렴속도는 물론 메모리 사용면에서도 상당한 개선을 이루었다.

모든 종류의 1-D 신호에 대하여, 일정상수함수 경우에는 100회 까지 수행하여도 얻지 못하는 근사 복원신호를 지수함수 경우에는 10회 미만에서도 원래신호에 매우 근사한 복원신호를 얻을 수가 있었다.

2-D 신호 경우에는 복원 대상화상으로 비교적 단순 화상을 택하였다. 저주파영역에 크기정보를 많이 가지고 있는 지수함수를 초기크기정보로 한 경우 일정상수함수 경우 보다 수렴속도 면에서 2배 이상의 개선이 이루어 졌다.

zero padding 영역의 zero화 적용 알고리즘을 단순 반복법에 부가하여 본 결과 단순반복법 보다 더 좋은 결과를 보여주었으며, 수렴속도와 메모리 사용면에서 가장 우수한 결과를 보여주었다.

한편, 고주파영역에 많은 정보를 가지고있는 고주파 신호에 대하여는 어떤 초기신호가 적절한지, 또 본 논문의 시도가 phase retrieval problem에도 잘 적용이 될지는 앞으로의 연구 과제로 본다.

### 참 고 문 헌

1. A.V.Oppenheim, and R.W.Schafer, Discrete Time Signal Processing, P.H. Englewood Cliffs, N.J., 1989.
2. Monson H.Hayes, "The Reconstruction of a Multidimensional Sequence from the Phase or Magnitude of its Fourier Transform", IEEE Trans. ASSP, Vol.ASSP-30, NO.2, pp.140-154, April, 1982.
3. Y. T. Li, A. L. Kurkjian, "Arrival Time Determination Using Iterative Signal Reconstruction from the Phase of the Cross Spectrum", IEEE Trans. ASSP Vol.ASSP-31, NO.2, pp.502-504, April 1983.
4. R. W. Gerchberg and W. O. Saxton, "A Practical Algorithm for the Determination of Phase from Image and Diffraction Plane Pictures", Optik, Vol.35, No.2, pp.237-246, 1972.
5. P.L. Van Hove, Monson H. Hayes, Jae S. Lim, Alan V. Oppenheim, "Signal Reconstruction from Signed Fourier transform Magnitude", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol., ASSP-31, NO.5, pp.1286-1293, Oct. 1983.
6. M.H.Hayes, J S.Lim, Alan V.Oppenheim, "Signal Reconstruct. from Phase or Magnitude", IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol.ASSP-28, NO.6, pp.672-680, Dec. 1980.
7. Alan V.Oppenheim, Monson H.Hayes, Jae S.Lim, "Iterative Procedure for signal reconstruction from Fourier transform phase", Opt.Eng., Vol.21, NO.1, pp.122-127, Feb., 1982.
8. M.H.Hayes, J.S.Lim, Alan V.Oppenheim, "Phase-only Signal Reconstruction," Proceeding of the IEEE, Vol.70, No.6, Mar, 1983.
9. Alan V. Oppenheim, Jae S. Lim, "The Importance of Phase in Signals", Proceedings of the IEEE, Vol. 69, NO.5, pp.529-541, May 1981.
10. V.T.Tom, T.F.Quatieri, M.H.Hayes, and J.McClellan, "Convergence of iterative Nonexpansive Signal Reconstruction Algorithms", IEEE Trans. ASSP, Vol.ASSP-29, NO.5, pp.1052-1058, Oct., 1981.

▲정 원 응(정회원)

1949년 7월 22일생.



- 1975년 부산대학교 전기공학과(학사)
- 1977년 부산대학교 대학원 전기공학과(석사)
- 1978년 성지공전 전임 강사
- 1983년 Florida Inst. of Tech. 전기공학과(석사)

1988년 Georgia Inst. of Tech. 전기공학과 박사과정 수료

1991년 영남대학교 대학원 전기공학과(박사)

1978년~현재 경남대학교 전기공학과 부교수

▲김 종 수(정회원)

1959년 12월 26일생.



- 1982년 서울대학교 공대 전기공학과 졸업
- 1991년 경남대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사)
- 1982년~현재 한국전기연구소 전력전자연구실 선임연구원.

▲최 태 원(정회원)

1943년 5월 21일생.



- 1969년 부산대학교 공대 전기공학과
- 1969년 한국전력 근무
- 1978년 부산대학교 대학원 전기공학과(석사)
- 1978년 동의공업 전문대학 조교수

1991년 경남대학교 전기공학과 박사과정.

▲배 진 호(정회원)

1931년 7월 6일생.



- 1956년 서울공대 전기공학과 졸업
- 1975년 영남대학 공학박사
- 1961년 경북대학교 전임강사
- 1964년 부산대학교 조교수
- 1966년 영남대학교 교수