한국수학교육학회지(수학교육)
1992. 8. 제 31 권 제 3 호 83-92

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Aug. 1992: Vol. 31, No. 3, 83-92

평면도형의 작도에 관한 고찰
-제 6 차 교육과정내용체계를 중심으로-

정 창현 (한국교원대학교))

I. 서론

제 6차 수학과 교육과정에서 밝혔듯이 오늘날 수학교육의 중요한 목표 중의 하 나는 학생들의 창의적 사고력 신장이다.[9],[17]. 수학적으로 창의적 사고력을 기 른다는 것은 수학적 안목으로 문제를 해결하는 창조 능력을 기른다는 것과 동일시 될 수 있다.[16] 이를 위해서는 수학적 활동의 산물인 지식뿐 아니라 수학적 개념 이나 원리를 스스로 발견하는 과정인 수학적 활동 자체를 중요시하여야 한 다.[2], [3]

그러나 실제로는 과정보다 결과에 치우치는 경향이 많다. 이것은 문제를 오로지 답을 내기 위한, 점수를 벌기 위한 행위의 대상으로만 여겨 왔기 때문이다. 이러 한 식의 수학적 활동은 현대수학의 이해에도, 응용에도 바람직하지 못하다. 이러 한 현상을 개선하기 위하여 문제해결 학습지도가 1970년대 말부터 미국의 여러 연 구자나 여러 전문단체에 의해 제기되어 왔다.

문제해결 학습지도의 문제로서 정형문제는 비교적 연산적인 방법으로 해결할 수 있지만, 비정형문제는 발견적인 방법으로 그 문제나름의 해결전략을 찾아야 한다. 이는 창의성의 차원인 창조이며 발견이다.

그런데 창의적이라고 해서 무턱대고 새롭고 기발한 아이디어에만 집착해서는 안 될 것이다. 창의적인 창조나 발견은 적어도 문제해결에 유용한 기존의 것들을 면 밀히 살펴 봄으로써 가능하다.

본 논문은 평면도형의 작도(construction)에서 요구하는 학습지도 과정을 중요 시하고 있다. 이는 문제해결 과정에 보다 유용할 것이다.

II. 제 6차 교육과정내용체계 (기하부분을 중심으로) [9]

(국민학교 : 도형)

1학년: (가) 삼각형, 사각형, 원의 모양 (나) 각기둥, 원기둥, 각뿔과 원뿔, 구의 모양 (다) 모양 만들기

2학년: (가) 선분과 직선 (나) 삼각형 (다) 삼각형의 변, 꼭지점 (라) 사각형 (마) 사각형의 변, 꼭지점 (바) 원 (사) 모양만들기 (아) 직육면체 (자) 직육면체의 면, 모서리, 꼭지점

3학년: (가) 각, 직각 (나) 직각삼각형, 정삼각형, 이등변삼각형 (다) 직사각 형, 정사각형 (라) 원, 원의 중심, 반지름, 지름 (마) 여러 가지 모양 만들기

4학년: (가) 수직과 평행 (나) 평행선의 성질 (다) 예각 삼각형, 둔각 삼각형 (라) 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합 (마) 다각형 (바) 사다리꼴 (사) 평행사변형 (아) 마름모
5학년: (가) 도형의 합동 (나) 삼각형 그리기 (다) 선대칭 (라) 점대칭 (마) 직육면체 (바) 정육면체
6학년: (가) 확대,축소 (나) 닮음, 닮음비 (다) 원과 원주 (라) 부채꼴과 호 (마) 정다각형 (바) 각기둥 (사) 원기둥 (아) 각뿔 (자) 원뿔 (차) 회 전체 (카) 구

(중학교 : 도형)

1학년: (가) 점, 선, 면, 각 (나) 점, 직선, 평면의 위치관계 (다) 평행선의 성질 (라) 간단한 작도 (마) 도형의 합동 (바) 삼각형의 합동 조건 (사) 원 (아) 다각형 (자) 다면체 (차) 회전체 (카) 부채꼴의 넓이와 호의 길이 (타) 입체도형의 겉넓이와 부피 (파) 단일폐곡선, 꼭지점과 변으로 이루어진 도형 (하) 오일러의 공식
2학년: (가) 삼각형의 성질 (나) 사각형의 성질 (다) 도형의 닮음 (라) 삼각 형의 닮음 조건 (마) 평행선과 선분의 길이의 비 (바) 닮음의 응용
3학년: (가) 피타고라스의 정리 (나) 피타고라스의 정리의 활용 (다) 원과 직 선 (라) 두 원 사이의 관계 (마) 원주각 (바) 원과 비례 (사) 삼각비 (아) 삼각비 사이의 관계 (자) 삼각비의 활용

(고등학교 : 기하)

공통수학: (가) 평면좌표 : 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점 (나) 직선의 방정식 : 직선의 방정식, 평행과 수직, 점과 직선 사이의 거 리 (다) 원의 방정식 : 원의 방정식, 원과 직선 (라) 도형의 이동 : 평행이동, 대칭이동 (마) 부등식의 영역 : 부등식의 영역, 최대 문 제와 최소 문제
수학 I :
수학 II : (가) 이차곡선 : 포물선, 타원, 쌍곡선 (나) 공간도형 : 평행과 수 직, 정사영 (다) 공간좌표 : 점의 좌표, 두 점 사이의 거리, 선분의 내분점과 외분점, 구의 방정식 (라) 벡터 : 벡터, 벡터의 덧셈과 뺄 셈, 벡터의 스칼라배, 벡터의 내적, 직선의 방정식, 평면의 방정식, 벡터의 활용
실용수학: (가) 도형과 그래프
수학 III : (가) 논증기하 : 추론, 중요정리, 작도, 자취 (나) 해석기하 : 극좌 표, 곡선의 방정식, 복소수와 복소평면, 복소수의 극형식, 간단한 이차곡면

III. 본론

1. 용어의 정의 [12]. 일반적으로 주어진 조건에 맞는 도형을 그리는 것을 작도(construction)라고 하 며 기하학에서 주어진 조건에 맞는 도형을 어느 특정한 도구만을 유한회 사용하여 그리는 일을 작도 문제(problem for construction)라고 한다. 또 주어진 조건에 맞는 도형을 작

도 문제의 해(풀이)(solution for construction)라 하고, 해를 구 하는 일을 작도 문제를 푼다고 한다.

2. 작도에서의 가정(postulate for construction) [12]. Euclid의 "기하학 원론(The Elements)" 에는 직선(strait lines)과 원(circles) 이 기본으로 되어 있다. 따라서 작도의 도구로 눈금이 없는 자와 컴퍼스만을 사용 하여 다음과 같은 작도를 할 수 있다고 가정하고, 이들 조작을 유한회 조합함으로 써 생기는 작도 문제를 작도 가능 문제라 한다.

(i) 주어진 두 점을 지나는 직선을 그리기 (눈금없는 자)

(ii) 주어진 점을 중심으로 하고 주어진 길이를 반지름으로 하는 원을 그리기 (컴퍼스)

(iii) 직선과 직선, 직선과 원, 원과 원의 교점을 구하기

3. 작도 문제의 완전해(complete solution of problem for construction). 작도 문제를 푸는 법은 주어진 조건에 맞는 모든 해를 구하는 것이다. 그렇게 하기 위해서는 다음 방법을 쓰지 않으면 안 된다. [13]

(解析:analysis) 주어진 조건에 맞는 해가 구하여졌다 하고, 추론을 거쳐 구하 고자 하는 도형과의 관계를 찾아 내어, 작도를 하기 위해서는 어떠한 조건이 만족 되어야 하는가를 조사한다.

(作圖:construction) 해석에서 얻은 조건을 기초로 하여 눈금없는 자와 컴퍼스 로써 구하는 도형을 그린다.

(證明:proof) 작도에 의하여 얻어진 도형이 주어진 조건에 맞는가를 확인한다.

(吟味:discussion) 조건에 맞는 도형을 그릴 수 있느가 없는가, 또 있다면 몇 가지가 있는가 등등, 가능한 모든 경우를 분류하여 해의 개수와 조건과의 관계를 조사한다. 실제로 작도 문제를 풀 때는 이 단계 중 해석, 증명, 음미 등에서 아주 명백한 것은 생략하는 경우가 많다.

4. 작도 문제.

A. 기본작도 문제

기본적인 도형의 성질을 써서 푸는, 가장 중요하다고 생각되는 문제로서 교육현 장에서 필수적으로 다루어야 한다.

(1) a, b를 주어진 두 선분의 길이라 할 때, 다음을 그리기

$$(i)a+b \qquad (ii)a-b(a>b) \qquad (iii)ab$$

(2) 주어진 선분의 수직 이등분선을 그리기 (중점 구하기 포함)

(3) 주어진 각의 이등분선을 그리기

(4) 주어진 직선 밖 또는 위의 한 점에서 이 직선에 수선을 그리기

(5) 주어진 직선을 한 변으로 하고 주어진 각을 그리기

(6) 주어진 점을 지나 주어진 직선에 평행한 직선을 그리기

(8) 주어진 선분을 현으로 하고 주어진 각을 그 현에 대한 원주각으로 하는 활 꼴을 그리기
(9) 주어진 원 밖 또는 위의 한 점에서 이 원에 접선을 그리기
(10) 주어진 선분을 주어진 비로 내분 또는 외분하기

B. 일반작도 문제

해석의 사고과정을 거쳐 작도의 실마리를 찾은 다음 이것을 기본작도 문제에 귀 착시킬 수 있는 문제로서 다음과 같은 것들이 있다.

(1) 직각을 3등분하기
(2) 주어진 선분을 n 등분하기
(3) 주어진 삼각형과 넓이가 같고 밑변을 공유하는 이등변삼각형 그리기
(4) 둘레와 높이가 주어진 이등변삼각형을 그리기
(5) 주어진 삼각형의 한 변 위에 주어진 점을 지나 이 삼각형의 넓이를 이등분 하는 직선을 그리기
(6) 주어진 다각형의 넓이와 같은 삼각형을 그리기 [7]
(7) a, b를 주어진 두 선분의 길이라 할 때, 다음을 그리기

$$(i)ab \qquad (ii)\sqrt{a}^2+b^2 \qquad (iii)\sqrt{a}^2-b^2(a>b)$$

(8) 주어진 두 원의 공통접선(내접선, 외접선)을 그리기
(9) 서로 다른 두 점을 품는 원이 주어질 때, 이 원을 접어서 원주가 두 점에 겹치도록 접기
(10) $\sin 15°$ 의 값을 구하기

C. 특별작도 문제

기본작도의 활용문제로서, 해석을 할 때 다음과 같은 방법을 써서 조건에 맞는 점이나 도형의 일부를 그려보아 작도의 실마리를 찾는다.

(i) 자취이용법
(ii) 대수해석법
(iii) 합동변환법 (평행, 대칭, 회전이동)
(iv) 닮음법

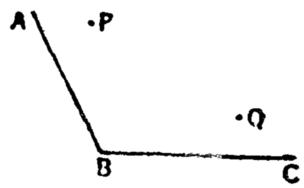
특별작도 문제로서 대표적인 것을 몇 개 열거한다.

(1) ABC의 변 BC에 평행한 직선을 그어 두 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $AP=CQ$ 가 되도록 하기
(2) 직선XY의 같은 쪽에 두 점 A, B가 있다. 직선 XY 위에 한 점 P를 잡아 $AP+BP$가 최소가 되도록 하기
(3) 주어진 삼각형에 내접하는 정사각형을 그리기 [1]
(4) 그림에서 P, Q는 마루 위의 두 점이고, ABC는 이 마루에 수직인 벽이다. 점 P에서 구르기 시작한 공이 AB, BC에 부딪힌 다음 점Q를 지났다고 할 때, 경로를 그리기

(5) 주어진 원의 내부에 있는 점을 지나, 이 원주를 2 : 1 로 나누는 현 그리기
(6) ABC 내부에 점 P 를 그려 다음이 성립하도록 하기

$$PAB : PBC : PCA = 1 : 2 : 3$$

(7) 포물선, 타원, 쌍곡선 위의 임의의 한 점에서 이 곡선에 접선 그리기 [14]
(8) 주어진 원에 내접하는 정오각형을 그리기



D. 기초 제도

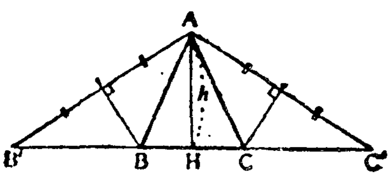
논리적으로 엄밀한 작도는 할 수 없으나 기술, 설계, 건축 등 실생활에 많이 응 용되는 근사적인 풀이이다. [15]

(1) 주어진 원호와 같은 길이의 직선을 그리기.
(2) 주어진 직선의 길이를 주어진 원주 위에 나타내기.

5. 작도문제의 해. 작도문제의 해로서 다음 몇 가지 문제를 풀어보자.

예 1. 둘레가 l, 높이가 h인 이등변삼각형을 작도하여라.(B-6) [풀이] 해석 : 조건에 맞는 이등변삼각형 ABC $(AB = AC)$가 얻어졌다고 하자. BC 를 양 쪽 으로 연장하고 그 위에 두 점 B', C' 를 $BB' = BA$, $CC' = CA$ 되게 잡으면

$$\begin{aligned} B'C' &= B'B + BC + CC' \\ &= AB + BC + CA \\ &= l \end{aligned}$$



또 A 에서 BC 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면, H 는 선분 BC 의 중점이고, $AH = h$.

따라서, $AB'C'$는 일정하다. 한편, B, C 는 각각AB', AC'의 수직이등분선 위에 있으므로 다음의 작도를 얻는다.

작도 : 길이 ℓ인 선분 $B'C'$를 잡고 그 중점을 H라 하자. H에서 $B'C'$에 세운 수 선 위에 점 A를 $HA = h$ 되게 잡는다.

AB', AC'의 수직 이등분선과 $B'C'$와의 만난점을 각각 B, C라 하면, $\triangle ABC$가 구하 는 이등변 삼각형이다.

증명 : 두 점 B, C는 각각 AB', AC'치 수직 이등분선 위에 있으므로,

$$AB = B'B, \quad AC = C'C$$

$$AB + BC + CA = B'B + BC + CC' = B'C' = \ell$$

또 $AH \perp BC$, $AH = h$

그리고 $\triangle AB'B \cong AC'C$에서 $AB = AC$

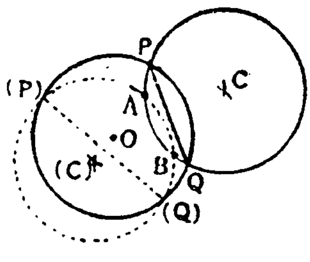
따라서, $\triangle ABC$는 조건에 맞는다.

음미 : $h < \frac{\ell}{2}$ 일 때, 풀이는 하나, $h >= \frac{\ell}{2}$일 때, 풀이는 없다.

예 2. 원 O 안에 두 점 A, B가 주어져 있다. 이 원을 접어서 그 원주가 A, B와 겹치도록 작도하여라. (B-9)

[풀이] 해석 : 원 O 위의 두 점 P, Q를 접는 금으로하여 열호 PQ를 접어서 이 원주 가 점 A, B에 접쳤다 하고 원 O 의 반지름 을 r이라 하자. 호 $PABQ$의 중심을 C라 하면 점 A, B는 원 C 위의 점이며,

$$CA = CB = r$$



작도 : A, B를 중심으로 하여 반지름 r인 원을 그려 이 원의 만난점을 C라 하 자. C를 중심으로 하여 반지름 r인 원을 그려 원 O 와의 만난점을 P, Q라 하고, 현 PQ를 긋는다.

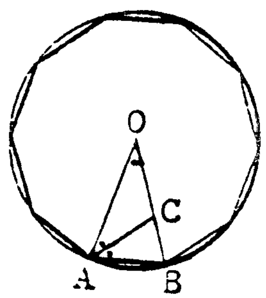
증명 : 작도에서, $CA = CB = r$

따라서, 원 C는 두점 A, B를 지난다. 또 두 원 O, C는 같은 원이므로 공통현 PQ 에 관해서 두 원은 대칭이다. 따라서 원 O의 호 PQ의 하나는 현 PQ에 관해서 원 C의 호 $PABQ$에 대칭이므로, 이를 현 PQ에 따라 접으면 두점 A, B를 지난다.

음미 : A, B를 중심으로 하는 반지름 r인 원의 만난점은 항상 두 개 생기므로 풀이는 두 개 있다.

예 3. 주어진 원에 내접하는 정오각형을 작도하여라. (C-2) [6]

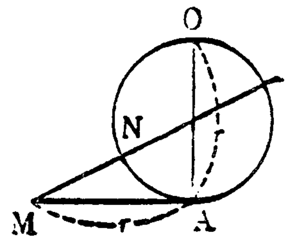
[풀이] 해석 : 오른쪽 그림에서 $OA = OB = r, \angle O = 36°$ 인 $\triangle OAB$를 생각하자. A의 이등분선이 OB와 만나는 점을 C 라 하면, $\triangle OAB \sim \triangle ABC$ 이므로,



$$\frac{AB}{OA} = \frac{BC}{AB}$$

$AB = x$라 놓으면,

$$\frac{x}{r} = \frac{r-x}{x}$$



따라서,

$$x = \sqrt{(\frac{r}{x})^2 + r^2} - \frac{r}{2}$$

작도 : 주어진 원 O의 반지름 OA $(= r)$인 끝점 A에서 OA에 수직인 선분 AM $(= r)$을 긋는다. OA를 지름으로 하는 원과, 점 M과 이 원의 중심을 맺는 선분과의 교점을 N이라 하자. 이 때, 주어진 원주를 MN의 길이로 차례대로 자르면 정십각형을 얻는다.

증명 : 오른쪽 그림에서, MN $(= x)$이 원 O에 내접하는 정 10각형의 한 변의 길이 이다.

(참고) : 주어진 원에 내접하는 정n각형은 $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17$ 일 때, 작도 가능한 것으로 알려져 있다. [5]

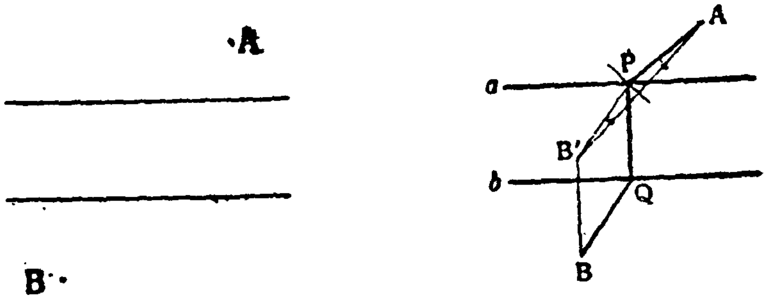
예 4. 그림과 같이 강을 사이에 두고 A, B 두 채의 집이 있다. 두 집에서 같은 거리 에 있도록 이 강에 다리를 놓고자 할 때, 다리의 위치를 작도하여라. 단, 강은 폭이 일정하며 다리는 강물이 흐르는 방향과 수직되게 놓아야 한다.

[풀이] 해석 : 그림처럼 두 강둑을 a, b라 하고 조건에 맞는 다리 PQ가 얻어졌다하자. 이 때, 평행사변형 $PQBB'$를 만들어 보면

$$BB' = PQ, \quad BB' \perp b$$

$$B'P = BQ = AP$$

따라서, 점 P는 정선분 AB'의 수직 이등분선 위에 있다.



작도 : A에서 가까운 강둑부터 차례로 a, b라 할 때 B에서 b에 내린 수선 위에 BB' = (강나비)가 되게 점 B'를 잡고, AB'의 이등분선과 a와의 만난점을 P라 하 자. P에서 b에 수선 PQ를 내리면 PQ가 구하는 다리의 위치이다.

증명 : 사각형 $BB'PQ$는 평행사변형 이므로, $BQ = B'P$ 또 점 P는 선분 AB'위의 수직 이등분선 위에 있으므로, $AP = B'P$ 따라서, $AP = BQ$ 또한, $BB' \perp b$ 그러므로, PQ는 조건에 맞는다.

6. 작도불능문제(problem for impossibility of construction). 구하는 도형이 실제로는 존재하나 작도를 할 수 없는 경우는 여러가지 있을 수 있다. 초등작도 중에서 그리이스의 삼대작도불능문제는 유명하다.

(1) 주어진 각을 3등분하기

(2) 주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체를 만들기

(3) 주어진 원과 같은 넓이를 갖는 정사각형을 만들기.

(참고) 이들은 모두 대수방정식의 문제로 귀착되고 19세기에 이르러 작도가 불 가능하다는 것이 증명되었다. (1), (2)는 1837년에 Wantzel이, (3)은 1882년에 Lindemann이 원주율 가 초월수임을 밝히는 과정에서 증명하였다. [6]

IV. 결론

본론에서 작도문제 풀이과정 4단계와 중고등학교 교육에서 반드시 다루어야할 작도문제(기본작도10개, 일반작도 9개)를 열거하였다. 그리고 작도문제의 풀이과 정을 몇 가지 예를 통하여 설명하였다. 이와같은 관점에서 본론의 주요 결론은 다 음과 같다.

1. 작도에서 요구되는 사항(학습자가 자문하고 실천할 주체적인 사항)을 Polya [4]가 제시한 문제해결 과정과 연관시켜 보면 다음과 같다.

단계	작도문제 풀이 과정	단계	Polya의 문제해결 과정
I	해석(analysis)	I II	문제이해(understanding the problem) 계획수립(devising a plan)
II III	작도(construction) 증명(proof)	III	계획실행(carring out the plan)
IV	음미(discussion)	IV	반성, 검토(looking out)

2. 제시된 기본작도와 일반작도 문제는 제 6차 교육과정의 내용체계에서 반드시 다루어져야 한다. 작도문제를 해당되는 학년 또는 과목의 단원에 연관지으면 다음 과 같다. [8], [9], [10], [11]

작도학습의 내용체계표

수학과목		작도문제
중학교	1학년	A-(1),(2),(3),(4),(5),(6), B-(1)
	2학년	A-(7), B-(2),(3),(4),(5),(6), C-(1),(2),(3),(4)
	3학년	A-(8),(9), B-(7),(8),(9), C-(5)
고등학교	공통수학	A-(10), C-(6)
	수학 I	
	수학 II	B-(10), C-(7)
	실용수학	D-(1),(2)
	수학 III	C-(8)

3. 기본 작도는 교과서에서 필수적으로 다루어져야 한다. 또한 일반작도는 연습 문제 또는 응용 문제로서 다루어져야 한다.

4. 추론과 논증을 통한 문제 해결을 위한 사고력 신장의 중요성과 도형을 이용 한 학습이 이들에 효과적임을 인식하고 기하교육이 더욱 강조되어야 한다.

참 고 문 헌

1. Brown.S.I. & Walter.M.I., 問題- 問題 設定 技術, 平林一榮 監譯, 1983.

2. Kantowskii.M.G., *Process Involved Mathematical Problem Solving*, Journal for Research in Mathematical Education (1977).
3. NCTM, *Aganda for Action*, VA: The National Council of Teachers of Mathematics. Inc., 1980.
4. Polya,G., *How to Solve It*, Princeton Univ. press., 1957.
5. 窪田忠彦, 初等幾何學 作圖問題,, 內田老鶴圃新社, 1951.
6. 栗田稔, 具象幾何學, 日本評論社, 1980.
7. 문교부, 基礎製圖, 1985.
8. ________, 제 5차 교육과정 각론, 1988.
9. ________, 제 6차 교육과정 각론, 1992.
10. ________, 중학교 수학 교과서, 1989.
11. ________, 고등학교 수학 교과서, 1990.
12. 박한식 외, 數學大辭典,, 한국사전연구원, 1981.
13. 이성헌, 幾何大全, 경문사, 1960.
14. ________, 解析幾何學, 진명출판사, 1963.
15. 이형식 외, 最新圖學, 동명사, 1975.
16. 정창현, 수학의 이해, 한국교원대학교 교육연구원(시, 도 교육 전문직 연찬회 자료), 1990.
17. 한명희 외, 제 6차 교육과정 개정을 위한 초 중등학교 교육과정의 체제 및 구조 개선 연구, 교육과정 개정 연구 위원회, 1991.