論 文 7-4-11

섭동계수를 갖는 저차특성방정식의 안정도 해석에 관한 연구

Analysis of Stability for a Low-Order Characteristic Equation with Perterbed Coefficients

盧 彰 注* 朴 瀚 錫**
Chang-Joo Noh Han-Suk Park

요 약

연속적이고 선형적인 시스템의 특성방정식에 대한 안정도 해석을 본 연구에서 제시한 간단한 조건들에 의하여 판정할 수 있으며, 이들 조건들을 이용하여 저차 특성방정식($N \leq 5$)의 계수들이 안정도를 유지하면서 얼마만큼 섭동할 수 있는가를 보여준다. 이 결과는 Kharitonov조건과 Hermite-Biehler 정리를 이용한 Anderson등의 결과와 유사하다.

It is shown that for a characteristic equation of continuous linear system, stability can be determined by conditions srggested in this paper. And also it is of interest to Know how much coefficients of the low-order characteristic equation($N \leq 5$) can be perturbed while simutanously preserving the stable condition of the equation. This result is analogous to result by Anderson et al. based on the Kharitonov's conditions and Hermite-Biehler theorem.

1. 서 론

일반적인 제어계에 대한 모델은 선형시불변계를 주로 다루고 있으므로 Routh-Hurwitz판별법, Nyquist판별법, 근궤적법, Bode선도 및 Lyapunov방법등에 의해 제어시스템의 안정성을 판별할 수 있다. 그런데 플랜트모델에는 여러가지 외란에 기인한 불확실성이 존재하며 이러한 불확실성은 제어계의 특성방정

* 한국해양대학교 기관공학과
** 정회원 : 부산공업대학 전기공학과

식의 계수들에 섭동을 가져오게되어 안정도 해석이나 제어기 설계시 중요한 문제로 대두되었다.

최근 Anderson, Jury, Mansour[1]는 Kharitonovov조건[2]에 Hermite-Biehler정리[3]를 응용하여 네개의 Kharitonov다항식을 모두 시험하지 않고 섭동계수를 갖는 특성방정식의 안정도를 판별하였다. 본 연구에서도 Hermite-Biehler정리를 근거로 하여 주파수 영역에서 섭동계수를 갖는 저차다항식(N ≤5)의 간단한 안정도 조건을 정리하였고, 이 관계에 대한 예를 보여주고 있다.

2. 특성방정식의 안정도 조건

섭동계수를 갖는 저차특성방정식(N=5)을 식(1) 이라하자

$$P(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4+a_5s^5 \qquad (1)$$

여기서 $s=\sigma+j\omega$이다. 식(1)은 s의 짝수승 부분과 s의 홀수승부분으로 나뉠 수 있으므로 식(2)가 된다.

$$P(s)=(a_0+a_2s^2+a_4s^4)+(a_1s+a_3s^3+a_5s^5)$$
$$=E(s^2)+sO(s^2) \qquad (2)$$

이식에서 $E(s^2)$와 $O(s^2)$은 s^2의 함수이므로, $s^2=\mu$를 식(2)에 대입하여 식(3)과 같이 만들 수 있다.

$$P(\mu)=E\mu+\mu^{1/2}O(\mu) \qquad (3)$$

따라서 $E(\mu)$와 $O(\mu)$의 근들은 식(4)(5)(6)(7)과 같이된다.

$$\mu_{e1}=\frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-4a_0a_4}}{2a_4} \qquad (4)$$

$$\mu_{e2}=\frac{-a_2-\sqrt{a_2^2-4a_0a_4}}{2a_4} \qquad (5)$$

$$\mu_{o1}=\frac{-a_3+\sqrt{a_3^2-4a_1a_5}}{2a_5} \qquad (6)$$

$$\mu_{o2}=\frac{-a_3+\sqrt{a_3^2-4a_1a_5}}{2a_5} \qquad (7)$$

주파수 영역에서 아래와 같은 Lemma를 만족하는 특성방정식의 근들은 안정하다는 것을 부록에서 증명한다.

Lemma : 식(3)의 $E(\mu)$와 $O(\mu)$의 근들이 부의 실근들이고, 그리고 그 절대값이 서로 교번적이면(즉, $|\mu_{e1}|<|\mu_{o1}|<|\mu_{e2}|<|\mu_{o2}|$), 그 특성방정식은 Hurwitz다항식이 된다.

지금 특성 방정식의 계수들, ai(i=0, 1, 2, 3, 4, 5)가 하한치 β_i와 상한치 γ_i에서 연속적으로 섭동한다고하자, 이때 섭동계수를 갖는 특성방정식의 섭동근들이 식 (8)(9)(10)를 만족할때,

$$\min(|\mu_{o1}|)>\max(|\mu_{e1}|) \qquad (8)$$
$$\min(|\mu_{e2}|)>\max(|\mu_{o1}|) \qquad (9)$$
$$\min(|\mu_{o2}|)>\max(|\mu_{e2}|) \qquad (10)$$

이 식들은 위의 Lemma을 만족하게되므로 섭동계수들을 갖는 그 특성방정식은 Hurwitz다항식이 된다.

3. 섭동계수들을 갖는 5차다항식에 대한 적용

5차다항식에서

$$P(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4+a_5s^5 \qquad (11)$$

계수들이 다음과 같이 섭동한다고 하자.

즉, $\beta_i\le a_i\le\gamma_i$, i=0, 1, 2, 3, 4, 5

이때 $E(\mu)$와 $O(\mu)$의 근들의 절대값의 최대, 최소값은

$$\min(|\mu_{o1}|)=\frac{\gamma_3-\sqrt{\gamma_3^2-4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5} \qquad (12)$$

$$\max(|\mu_{e1}|)=\frac{\beta_3-\sqrt{\beta_2^2-4\gamma_0\gamma_4}}{2\gamma_4} \qquad (13)$$

$$\min(|\mu_{e2}|)=\frac{\beta_3+\sqrt{\beta_2^2-4\gamma_0\gamma_4}}{2\gamma_4} \qquad (14)$$

$$\max(|\mu_{o1}|)=\frac{\beta_3-\sqrt{\beta_3^2-4\gamma_1\gamma_5}}{2\gamma_5} \qquad (15)$$

$$\min(|\mu_{o2}|)=\frac{\beta_3-\sqrt{\beta_3^2-4\gamma_1\gamma_5}}{2\gamma_5} \qquad (16)$$

$$\max(|\mu_{e2}|)=\frac{\gamma_3+\sqrt{\gamma_2^2-4\beta_0\beta_4}}{2\beta_4} \qquad (17)$$

따라서 다항식이 안정하기 위해서 위의 값들이 식(8)(9)(10)을 만족해야한다. 위와 같은 방법에 의해 2차, 3차및 4차다항식에 대해서도 더욱 간단한 안정도 조건을 얻을 수 있다.

4. 예 제

(1) 섭동계수를 갖는 5차다항식을 생각해보자.

$$P(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4+a_5s^5 \qquad (18)$$

여기서, 계수들의 섭동범위는 다음과 같다고 하자.

$$20\le a_0\le 28$$
$$36\le a_1\le 48$$
$$21\le a_2\le 30$$
$$16\le a_3\le 20$$
$$1\le a_4\le 1.7$$
$$0.1\le a_5\le 0.25$$

식(12)－(17)에 의해 E(μ)와 O(μ) 근들의 절대값은

$$\min(|\mu_{o1}|)=1.82$$
$$\max(|\mu_{e1}|)=1.52$$
$$\min(|\mu_{e2}|)=10.83$$
$$\max(|\mu_{o1}|)=3.16$$
$$\min(|\mu_{o2}|)=60.84$$
$$\max(|\mu_{e2}|)=29.32$$

따라서 이들값들은 식(8)(9)(10)을 만족하므로 계수들의 섭동범위안에서 위의 다항식은 안정하다.

(2) 다음과 같이 섭동계수를 갖는 4차당항식을 생각해보자.

$$P(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4 \qquad (19)$$

여기서, $20\le a_0\le 28$

$$36\le a_1\le 48$$
$$14\le a_2\le 20$$
$$7\le a_3\le 10$$
$$0.9\le a_4\le 1.2$$

계수들의 섭동범위안에서 위의 다항식이 안정한가를 판정하기 위해 식(12)－(17)를 적용하는데 있어서 4차다항식인 경우 E(μ)는 2개의 근을 갖고, O(μ)는 1개의 근을 가지므로 min$|\mu_{o2}|$과 max$|\mu_{e2}|$는 필요가 없다. 즉,

$$\min(|\mu_{o1}|)=3.6$$
$$\max(|\mu_{e1}|)=2.56$$
$$\min(|\mu_{e2}|)=9.1$$
$$\max(|\mu_{o1}|)=4$$

따라서 두개의 조건을 모두 만족하므로 계수들의 섭동범위안에서 위의 당항식은 안정하다.

5. 결 론

계수들이 섭동하는 저차특성방정식(N≤5)에 대한 안정도 조건들을 유도하여 보았다. Anderson등의 결과와 매우 유사하지만 그 접근방법이 명확하고 간단함을 볼수 있다. 대부분의 시스템의 특성방정식의 차수가 5차 이내이므로 본 논문에서 제시된 해석방법을 적용하여 불확실성이 존재하는 모델에 대한 강인한 제어기 설계시 매우 유용할것이라 기대된다.

참 고 문 헌

[1] B. D. O. Anderson, E. I. Jury, M. Mansour," On Robust Hurwitz Polynomials," IEEE Trans. Automat. Cont., Vol. AC－32, pp.909－913, 1987.

[2] V. L. Kharitonov," Asymptotic Stability of an Equilibrium Postitin of a family of systems of linear differential equations," Differensialnye Uraveniya, Vol.14, No.11, pp.2086－2088, 1978.

[3] F. R. Fantmacher, The Theory of Matrices, Vol. II., Now York : Chelsea, 1964, ch.15.

[4] I. J. Nagrath, M. Gopal, Control Systems Engineering, Wile Eastern, 1982, pp.201－208.

부 록

Lemma에 대한 증명

본문의 식(3)은 식(i)과 같이 쓸수있다.

$$\frac{E(\mu)}{\mu^{1/2}O(\mu)}=-1 \qquad (i)$$

이 식은 s평면에서 근의 궤적을 이용하여 안정도를

판정하기 편리한 형태가 된다. 지금 이 특성방정식의 E(μ)와 O(μ)의 근들의 角의 실근을 갖게 되며 이들은 s평면의 허수축상에 놓이게된다. 또한 이들의 절대값이 교번적일때 식(i)의 근의 궤적을 2개의 Evans 조건[5]을 이용하여 조사하여보자. 즉,

$$\left|\frac{E(\mu)}{\mu^{1/2}O(\mu)}\right|=1 \tag{ii}$$

$$\angle\left|\frac{E(\mu)}{\mu^{1/2}O(\mu)}\right|=\pm(2q+1)\pi,\ q=0,1,2,3,\cdots\cdots \tag{iii}$$

첫째로 허수축상은 식(iii)의 조건을 만족하지 못하므로 근궤적이 될수없다. 즉 근궤적은 허수축을 통과하지 못함을 알 수 있다. 둘째로 $\mu=0$와 O(μ)의 근들에서 궤적의 출발각을 조사해보면 s의 좌평면을 향한다. 셋째로 E(μ)의 근들에서 궤적의 도착각을 살펴보면 역시 s의 좌평면으로부터 온다. 결론적으로 식(i)의 근궤적은 s의 좌평면에 존재하게 될 것이고 이것으로부터 이 특성방정식이 안정함을 알 수 있다. 만일 근들의 절대값이 교번적이지 못하면 O(μ)과 E(μ)의 근들 중 일부에서 궤적의 출발각이나 도착각이 s의 우평면으로 향한다. 즉 궤적의 일부가 우평면에 존재하므로 이 시스템은 불안정함을 예측할 수 있다.