

## 유선함수를 이용한 3 차원압출의 상계해석 An Upper Bound Analysis of the Three-Dimensional extrusion of Shapes with the Use of Dual Stream Functions( I )

김 희 송\* 조 용 이\*

### ABSTRACT

This paper, describes analysis of three-dimensional extrusion with the use of dual stream functions. By this method admissible velocity fields for the extrusion of three-dimensional flow was newly derived kinematically. For square section the extrusion pressure was calculated by numerical solution program which was based on the upper bound analysis. The relationship between relative extrusion pressure and reduction of area, relative die length and constant friction factors were successfully calculated which was newly developed in this study. The results could be applied to design extrusion die.

#### 기 호 설 명

A, B : 최종단면의 장축과 단축길이	g(x), f(x) : 다이의 임의곡선식
J, j, J <sub>s</sub> , J <sub>f</sub> , J* : 내부 전단, 마찰 및 전체 에너지소비율	
L : 다이길이	m : 마찰상수
n : 임의곡선의 지수식	R : 빌렛의 초기 직경
p : 압출압력	U <sub>0</sub> : 초기속도
△V <sub>s</sub> , △V <sub>f</sub> : 상대속도불연속	X, Y, Z : 직각좌표계
ψ, X : 유선식	σ <sub>0</sub> : 재료의 평균유동응력
é <sub>x</sub> , é <sub>y</sub> , é <sub>xz</sub> , é <sub>xY</sub> , é <sub>Yz</sub> , é <sub>zx</sub> : 변형율속도성분	
é̄ : 유효변형율속도	

---

\* 정회원 : (주) 창륜산업

## 1. 서 론

최근 사업의 고도화, 다량 생산화 등의 경향에 따라 형재를 압출에 의해 생산하는 연구에 관심을 갖게 되고 이러한 연구가 진행되어 오고 있다. 압출공정의 해석에 관여하는 여러 연구자들에 의해 연구되었다. Hill<sup>1)</sup>은 미끄럼선 장법을 평면변형압출에 적용하였다. 이 방법은 그 후에 여러 연구자들에 의하여 주로 여러 가지 평면변형문제에 대하여 광범위하게 응용되었다. 그 후에 Kudo<sup>2,3)</sup>는 공정의 근사한 해석에 대한 상계해법을 발전시켰고 또한 그는 그응용을 축대칭 압출문제에 확장시켰다. Avitzur<sup>4)</sup>원추형속도장으로 축대칭 압출문제를 해석하였으며, Choi<sup>5)</sup>는 전방 압출 및 관압출에 있어서 임의 형상의 다이에 대하여 해석하였다. Sansome<sup>6)</sup>, Prakash<sup>7)</sup>, Yang<sup>8)</sup>, Kiuchi<sup>9)</sup>등은 3차원 비축대칭 압출에 대하여 상계정리를 적용시켰다. Nagpal<sup>10)</sup>과 Altan<sup>11)</sup>등은 유선함수의 개념을 도입하여 L-, T- 형재의 비축대칭 압출문제를 해석하였다. 원형봉재로부터 정사각형재로의 압출은 Avitzur<sup>12)</sup>와 Hoshino<sup>13)</sup>이 각각 다른속도장으로 해석하였다.

본 논문에서는 유선함수의 개념을 도입하여 평면변형압출, 축대칭압출 및 원형봉재 빌렛으로부터 타원과 사각형재로의 비축대칭압출에 대한 동적가용속도장을 제시하였다. 또한 원형봉재로부터 정사각형재로의 압출에 대한 상계해를 수치계산으로 구하여 이들 속도장을 검증하고자 하였다.

## 2. 이론 해석

### 2.1 동적가용속도장

동적가용속도장은 재료유동의 수학적 표현으로써, 소성변형역 내에서의 에너지소비율은 동적가용속도장으로부터 얻어지는 데 속도장이 동적으로 가용되기 위해서는 다음의 조건을 만족해야 한다.

- (1) 속도성분과 이들의 1차 미분은 속도불연속면을 제외하고는 연속적이어야 한다.
- (2) 속도성분은 주변형을 또는 주변형을속도성분의 합이 영인 비압축성조건을 만족해야 한다.
- (3) 기하학적으로 요구되는 경계조건을 만족해야 한다.

다이 내로의 초기속도를  $V_0$ 로 하고, 재료의 각 방향에 대한 속도를  $V_x, V_y, V_z$ 로 한다. 또한 3 차원 동적가용속도장을 유도하기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

- (1) 재료는 강소성체이고 다이 입 · 출구의 단면이 강소성의 경계이다.
- (2) 다이 내에서 압출축에 수직한 단면상의 압출 축방향 속도성분( $V_x$ )는 일정하다.

### 2.2 해석모델

3차원 공간에서 비압축성유동에 대한 속도장은 유선함수로 나타낼 수 있으며, 직각좌표계로 나타낸 동적가용속도장의 성분( $V_x, V_y, V_z$ )은 다음과 같이 된다.

$$V_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \chi}{\partial Z} - \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \chi}{\partial Y}$$

$$V_y = \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \chi}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \chi}{\partial Z} \tag{1}$$

$$V_z = \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \chi}{\partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \chi}{\partial X}$$

여기서  $\Psi$ 와  $\chi$ 는 Fig.1에 나타난 두 유선함수이다.

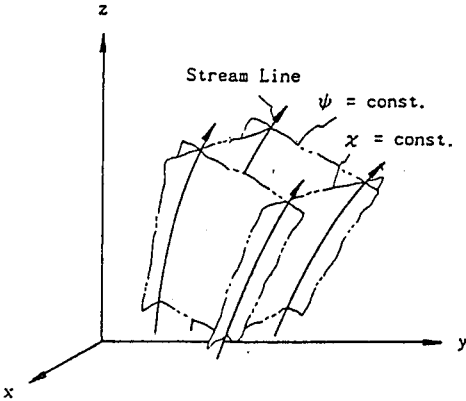


Fig. 1 Three-dimensional metal flow through a stream tube bounded by pairs of stream surfaces

### 2.2 평면변형유동

Fig.2의 평면변형 압출에 대한 동적가용속도장은 단위폭에 대한 흐름면을 선택함으로써 얻어지며 이때의 두 유선식은 다음과 같이 된다.

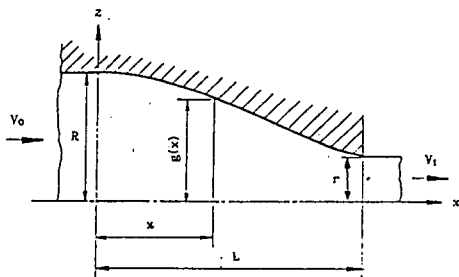


Fig. 2 Shape configuration of an arbitrarily curved die

$$\begin{aligned} \psi &= Y \\ x &= U_0 \frac{Z}{g(X)} \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $g(X)$  는  $X$ 만의 함수이고 다음 경계조건에 의해 제한된다.

$$\begin{aligned} g(X) &= H & \text{for } X=0 \\ g(X) &= h & \text{for } X=L \end{aligned} \quad (3)$$

$H$  와  $h$  는 평면변형압출에서 입구와 출구높이의 1/2이고, 이때의 속도장은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} V_x &= U_0 g(X) \\ V_y &= 0 \\ V_z &= U_0 Z \frac{g'(X)}{g^2(X)} \end{aligned} \quad (4)$$

단  $g'(X)$  는  $g(X)$ 에 관한 도함수이다.

### 2.3 축대칭, 비 축대칭 유동

#### (1) 원형단면으로의 압출

Fig.3과 같은 원형봉재로부터의 원단면으로의 축대칭압출은  $X$ 축을 압출축으로 잡으면 이때의 원의 방정식으로 단면형상이 표현된다.

$$\frac{Y^2}{g^2(X)} + \frac{Z^2}{g^2(X)} = 1 \quad (5)$$

여기서  $g(X)$  는 압출이 진행된 지점  $X$ 에서의 단면의 반경을 나타내며, 변형영역의 유동은 다음의 유선함수식으로 나타낼 수 있다.

$$\psi = -\frac{Y}{g(X)} \quad (6)$$

$$x = U Z g(X)$$

이때의 동적가용 속도장은 다음과 같이 구해진다.

$$V_x = U_0 \frac{1}{g^2(X)}$$

$$V_y = U_0 Y \frac{g^2(X)}{g^3(X)}$$

$$(7) \quad V_z = u_0 Z \frac{g'(X)}{g^3(X)}$$

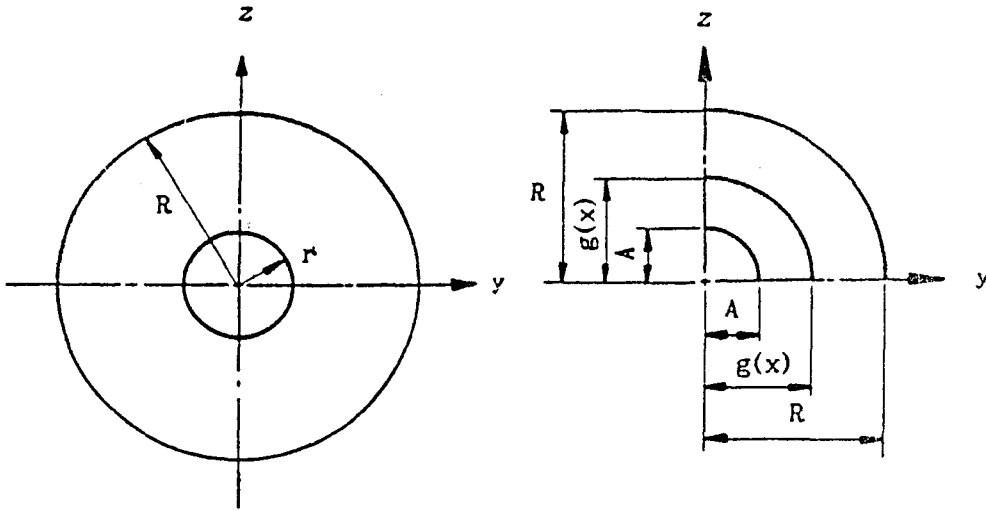


Fig. 3 Schematic illustration of circular shape die from cylindrical billet

(2) 사각형재로의 압출

에서의 압출이 진행된 지점 X에서 X추가에 수직한 단면의 형상은 다음과 같이 임의의 곡선식으로 나타낼수 있다.

Fig.4의 원형봉재로부터 마름모꼴단면으로의 압출

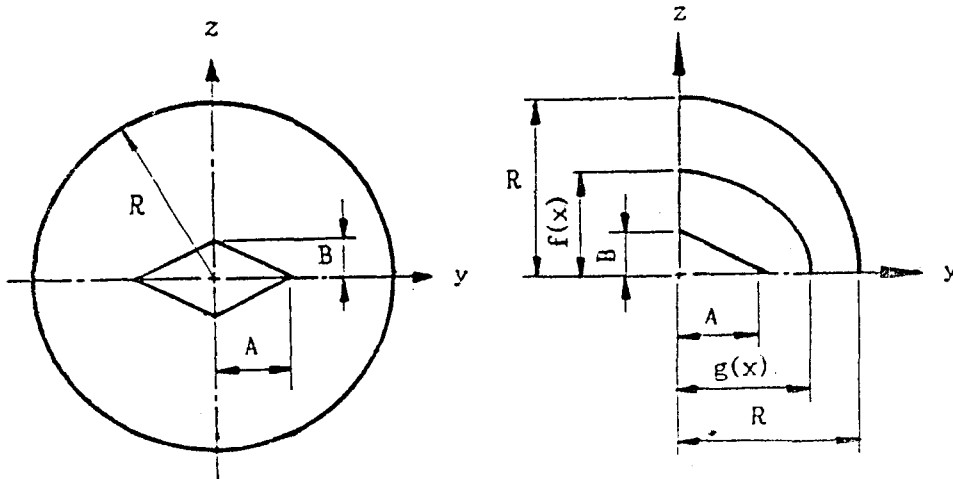


Fig. 4 Schematic illustration of diamond shape die from cylindrical billet

$$\frac{Y^n}{g^n(X)} + \frac{Z^n}{f^n(X)} = 1 \quad (8)$$

여기서  $g(X)$ 와  $f(X)$  그리고 지수  $n$ 은  $X$ 만의 함

수이고 이들의 경계 조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} g(X) = f(X) = R, \quad n=2 \quad \text{단, } X=0 \\ g(X) = A, f(X) = B, n=2 \quad \text{단, } X=L \end{aligned}$$

단, A와 B는 최종 압출된지점(X=L)에서의 대각선 길이의 반이고, n은 다음식으로 구해진다.

$$n = 2 - \frac{R^2 - f(X)g(X)}{R^2 - AB} \quad (9)$$

따라서 이때의 유선식은 다음식과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{Y}{g(X)} \\ x &= U \frac{Z}{g(X)} \end{aligned} \quad (10)$$

이때의 동적가용 속도장은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} V_x &= U_0 \frac{1}{g^2(X)} \\ V_y &= U_0 Y \frac{g'(X)}{f(X) g^2(X)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$V_z = U_0 Z \frac{f'(X)}{f^2(X) g(X)}$$

만일 A = B이면 정사각형이 된다. 이 경우에 대하여서는 여러 연구자들에 의하여 연구 되었다. 따라서 본 연구에서도 이 경우에 대한 수치 계산으로 제안된 속도장들의 검증을 하고자 하였다.

(3) 타원형봉재로의 압출

Fig.5의 원형봉재 빌렛으로부터 타원형 봉재로의 압출에서 압출이 진행된 지점 X에서의 단면의 형상은 다음의 타원식으로 표시 될 수 있다.

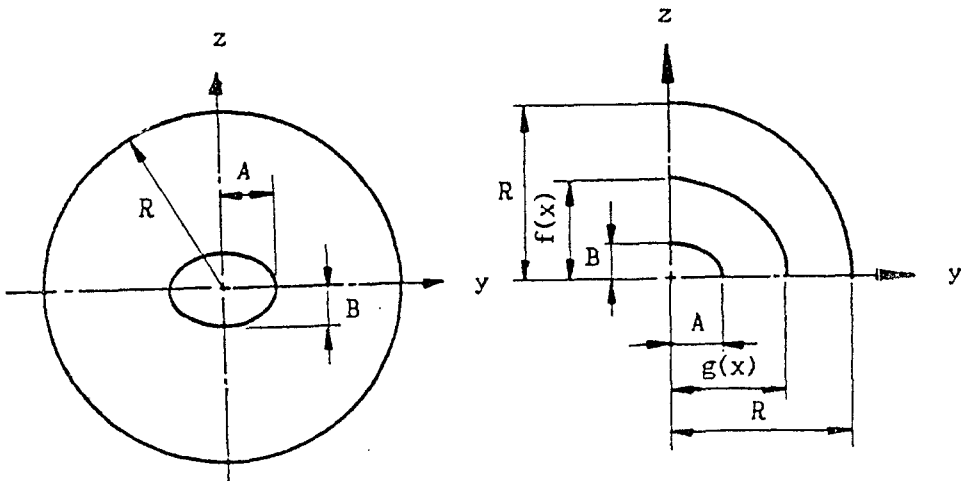


Fig. 5 Schematic illustration of elliptic shape die from cylindrical billet

$$\frac{Y^2}{g^2(X)} + \frac{Z^2}{f^2(X)} = 1 \quad (12)$$

여기서 g(X)와 f(X)는 X만의 함수이고 이들의 경계 조건은 다음과 같이 된다.

$g(X) = f(X) = R, \quad n=2 \quad \text{단, } X=0$   
 $g(X) = A, f(X) = B, n=2 \quad \text{단, } X=L$   
 단, A와 B는 최종압출된지점(X=L)에서의 타원의 장축과 단축을 의미한다.  
 이때의 유선식은 다음식과 같이 된다.

$$\psi = -\frac{Y}{g(X)}$$

$$x = U \frac{Z}{g(X)} \quad (13)$$

따라서 동적가용 속도장은 이태의 속도장은 다음과 같이 구해진다.

$$V_x = U_0 \frac{1}{g^2(X)}$$

$$V_y = U_0 Y \frac{g'(X)}{f(X) g^2(X)} \quad (14)$$

$$V_z = U_0 Z \frac{f'(X)}{f^2(X) g(X)}$$

### 2.3 변형율속도 및 에너지 소비율의 계산

#### 1) 변형율속도와 내부에너지 소비율

직각좌표계(X,Y,Z)로 나타낸 다이 내의 임의점에 대한 변형율속도는 앞절에서의 동적가용속도장에 의하여 다음과 같이 계산된다.

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial V_x}{\partial X}$$

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{\partial V_y}{\partial Y}$$

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial Z} \quad (15)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x}{\partial Y} + \frac{\partial V_y}{\partial X} \right)$$

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_y}{\partial Z} + \frac{\partial V_z}{\partial Y} \right)$$

$$\dot{\epsilon}_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_z}{\partial X} + \frac{\partial V_x}{\partial Z} \right)$$

식 (2-25)의 변형율속도에서 유효변형율속도는 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \{ (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 + \dot{\epsilon}_z^2)/2 + (\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_{zx}^2) \}^{1/2} \quad (16)$$

내부에너지 소비율은 각각의 영역에 대하여 식 (2-26)에서 구한 유효변형률속도를 체적에 대하여 적분한 다음 이들을 합하여 반 피치에 대한 내부에너지 소비율을 계산한다.

$$J_i = \int_v \sigma_0 \dot{\epsilon} dv \quad (17)$$

단.  $dv = dx \cdot dY \cdot dZ$

#### 2) 전단에너지 소비율

(1) 다이 입 · 출구에서의 전단에너지 소비율  
 가정 1) 에서 다이 입 · 출구는 강소성의 경계이므로 이면이 속도불연속면으로 되고 상대속도 불연속  $\Delta V_{s1}$ . 전단에너지 소비율  $J_{s1}$  은 다음과 같이 계산된다.

$$J_{s1} = \int_{s1} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \Delta V_{s1} dS_1 \quad (18)$$

$$\Delta V_{s1} = \{V_y^2 + V_z^2\}^{1/2} \quad (19)$$

단,  $Z = 0, Z = Li$

여기서,  $dS_1$  은 속도불연속면의 미소면적을 나타낸

다.

(3) 마찰에너지 소비율

마찰손실은 다이면과 다이랜드면에서의 마찰손실이 있으며 상대미끄럼 속도  $\Delta Vf$  와 마찰손실일을  $J_f$ 는 다음과 같다.

$$J_f = \int_A \frac{m\sigma_0}{\sqrt{3}} \Delta Vf \, dA \quad (20)$$

$$\Delta Vf = \{Vx^2 + Vy^2 + Vz^2\}^{1/2} \quad (21)$$

여기서  $dA$  는 마찰면의 미소면적을 나타낸다.

3) 전체 에너지소비율

전체에너지 소비율 즉, 요구되는 압출력은 앞에서 구한 1/4 형상에 대한 에너지 소비율을 전체형상으로 확장시켜서 구한다. 즉, 1/4형상에 대한 에너지소비율( $J_T$ )은

$$J_T = J_i + J_s + J_f \quad (22)$$

로 되고 전체 에너지소비율 ( $J^*$ )은

$$J^* = 4 \times J_T \quad (23)$$

가 된다. 상대압출력은 전체 에너지소비율을 펀치의 면적  $A_0$ 와 평균 유동응력  $\sigma_0$ 로 나누어 구한다. 즉 다음 식으로 계산된다.

$$\frac{P}{\sigma_0} = \frac{J^*}{V_0 A_0 \sigma_0} \quad (24)$$

### 3. 결과 및 고찰

유선함수의 개념을 도입하여 평면변형압출, 축대칭 압출 및 원형봉재 빌렛으로부터 타원과 사각형재로의 비축대칭압출에 대한 동적가용속도장을 제시하고 원

형봉재로부터 정사각형재로의 압출에 대한 상계해를 수치계산으로 구하여 이들 속도장을 검증하고자 하였다. 즉 다이의 형상이 임의의 곡선식에 의하여 결정되는 정사각형재의 압출에 있어서 동적가용속도장을 유선함수를 도입하여 유도하고 유효변형율속도를 구하고 이를 다이의 형상에 따라 적분하여 상계해를 구한다. 그러나 원형봉재로부터 정사각형재로의 압출은 압출의 진행에 따라 그점에서 다이의 형상곡선식이 정의 되도록 동적가용속도장이 구성되므로 단순히 계산될 수 없고, 3차원 수치계산에 의하여야만 계산될 수 있다.

따라서 본 연구에서는 Fig.6과 같은 유통도를 갖는 수치해석 프로그램을 개발하여 해석을 수행하였다.

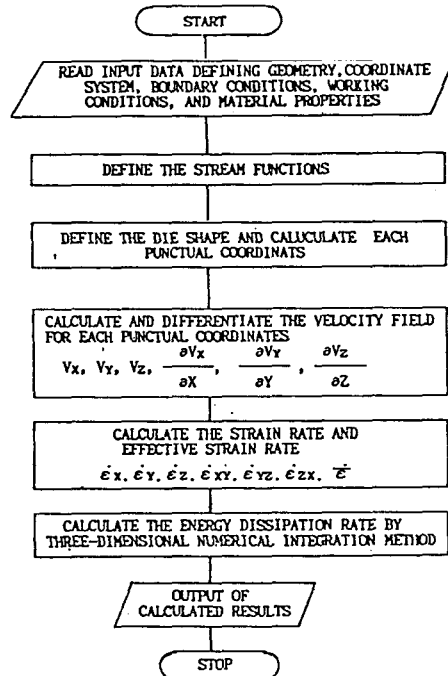


Fig. 6 Flow-chart of numerical solution program

프로그램의 구성은 금형의 치수와 초기속도 경계조건 등을 입력하여, 먼저 압출이 진행된 지점의 다이

의 형상곡선을 정의하고 정의된 형상곡선으로 각방향의 속도  $V_x, V_y, V_z$ 를 구하고 이들에 대한 도함수를 구한다. 정의된 형상곡선과 속도 그리고 속도의 도함수를 이용하여 각 방향의 변형율속도를 구한다. 이들은 각각의 절점에 대하여 계산되며, 체적적분하는 서브루틴(subroutine)에서 각각에 대한 변형율속도와 유효변형율속도를 적분하여 최종적으로 상계해를 계산한다.

Fig.7과 Fig.8은 단면감소율이 40% 일때와 80% 일때의 상대다이길이(L/R<sub>0</sub>)에 따른 무차원압출압력(P/σ<sub>0</sub>)의 변화를 마찰조건(m)에 대하여 수치계산한 상계해석의 결과로써 상대다이길이가 0에 가까워지면 무차원압출압력은 급격히 증가한다. 이후 다이길이가 증가함에 따라 무차원압출압력은 급격히 감소하여 각 마찰조건에서의 최저점을 나타낸후 다이길이가 증가하여도 변화가 거의 없는 부분을 지나 점차 증가한다.

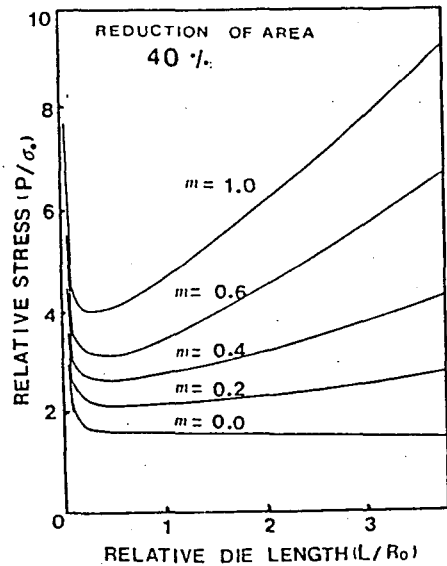


Fig. 7 Relationship between relative pressure and relative die length for each friction conditions at 40% area reduction

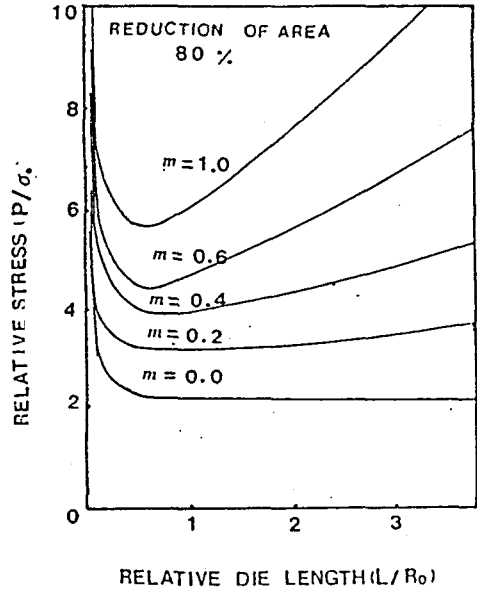


Fig. 8 Relationship between relative pressure and relative die length for each friction conditions at 80% area reduction

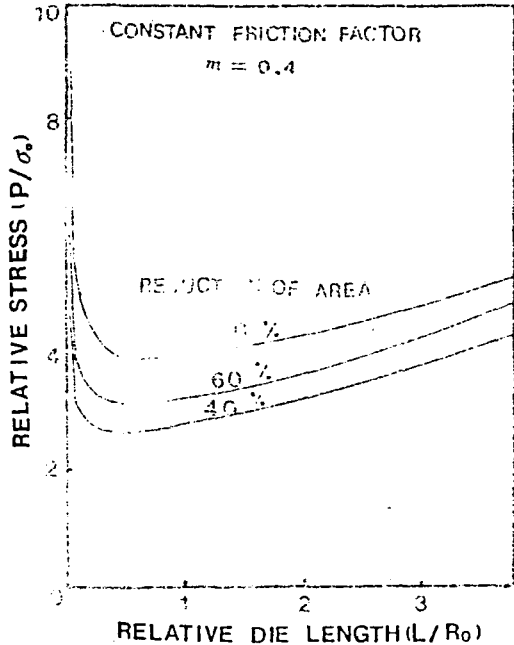


Fig. 9 Relationship between relative pressure and relative die length for constant friction factor at various area reductions



relative die length for each area reductions  
at constant friction factor  $m=0.4$

한편 Fig.9는 마찰상수를  $m=0.4$ 로 고정시켜두고 상대다이길이의 변화에 따른 무차원압출압력의 변화에 대하여 각각 단면감소율이 40%, 60% 및 80% 일때에 대하여 수치계산한 상계해로써 여기서도 앞의 그림에서와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 압출금형의 설계시에는 이와같이 상대압출압력의 변화가 없는 영역을 선택하면 될것이다.

한편 Fig.7, 8 및 9의 상계해석 결과는 Hoshino 등<sup>13)</sup>의 결과와도 잘 일치하였다. 따라서 유선함수의 개념을 도입한 동적가용 속도장은 압출금형의 설계와 압출압력의 예측등에 매우 유용할 것으로 생각된다. 이와같이 무차원압출압력의 변화가 없는 다이길이를 선택하여 금형을 설계할 수 있다.

#### 4. 결론

이상에서의 결과를 고찰하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 유선함수의 개념을 도입하여 평면변형, 축대칭 및 비축대칭 압출의 해석에 대한 동적가용속도장을 제시하였으며, 이 중에서 대표적으로 원형봉재로부터 정사각형재로의 압출에 대하여 수치계산으로 상계해석하여 검증하였다.
- (2) 원형봉재빌렛으로부터 정사각형재로의 압출에 대한 상계해석의 결과 다른속도장에 의한 해석결과와 잘 일치하였다.
- (3) 원형봉재 빌렛으로부터 정사각형재로 압출금형 설계시의 압출압력이 최소로 될 수있는 다이길이를 결정할 수 있었다.

#### 참고문헌

1. Hill, R., 1950, "The Mathematical Theory of

Plasticity", Oxford at the Clarendon Press, pp.181-186

2. Kudo, H., 1960 "Some Analytical and Experimental Studies of Axisymmetric Cold Forging and Extrusion I", Int. J. Mech. Sci., 2, 102
3. Kudo, H., 1960, "An Upper Bound Approach to Plane Strain Forging and Extrusion II", Int. j. Mech. Sci., 3, 109, pp.91-117
4. Avitzur, B., 1967, Fueyo, J. and Thompson, J., "Analysis of Plastic Flow Through Inclined Planes in Plane Strain", J. Eng. for Industry, Trans. ASME ser. B, 89, 2, pp.361-375
5. Chang, K. T. and Choi, J. C., 1972, "Upper-Bound Solutions to Extrusion Problems Through Curved Dies", J. Eng. for Industry, Trans. ASME, pp.1108-1112
6. Basily, B. B. and Sansome, D. H., 1976, "Some Theoretical Considerations for the Direct Drawing of Section rod from Round Bar", Int. J. Mech. Sci. 18, pp.201-207
7. Juneja, B. L. and Prakash, R., 1975, "An Analysis for Drawing and Extrusion of Polygonal Sections", Int. J. Mach. Tool Des. Res. 15, pp.1-30
8. Yand, D. Y. and Lee, C. H., 1978, "Analysis of Three-dimensional Extrusion of Sections Through Curved Dies by Conformal Transformation", Int. J. Mech. Sci. 20, pp.54-552
9. Kiuchi, M. and Ishikawa, M., 1983, "Upper Bound Analysis of Extrusion and/or Drawing of L-, T- and H- Sections -Study on Non-symmetric Extrusion and Drawing II-", J. JSTP, 24, 270, pp.722-729
10. Nagpal, V., 1977, "On the Solution of Three-Dimensional Metal-Forming Process", J. Eng. for industry, Trans, ASME, pp.624-629

11. Nagpal, V., Billhardt, C. F. and Altan, T., 1979 "Lubricated Extrusion of 'T' Sections from Al, Ti and Steel Using Computer-aided Techniques", J. Ins. 101, pp.319-325
12. Boer, C. R., Schneider, W. R, Eliasson, B and Avitzur, B., '979, "An Upper Bound Approthe Direct Drawing of Square Section Rod from Round Bar" Int. Mach. Tool Des. Res. Conf., pp. 149-156
13. Hoshino, S. and Cunasekera, J. S., 1980, "An Upper Bound Solution for the Extrusion of Square Section from Round Bar Through Converging Dies" Proc. 21st Mcah. Tool Des. REs., pp.97-105