

3점 압축하중을 받는 원판의 광탄성 해석 ANALYSIS FOR 3-POINT LOADED DISC BY PHOTOELASTICITY

함 경 춘*, 이 하 성**
Kyoung-Chun Ham, Ha-Seong Lee

ABSTRACT

Disc specimen with the center crack and edge crack simulated by two-dimensional static method is used to analyze the stress field around the crack tip in terms of the stress intensity factor, K . A simple and convenient method of testing to realize the mixed mode stress intensity factor of the cracked body is used,

The conclusions obtained in this photoelastic analysis are as follows ;

1. According to this experiment, cracked disc specimen can be used to demonstrate the mixed mode stress intensity factor analysis by simply changing the crack angle from the loading line.
2. Despite the simplicity and continuous data reading, the photoelastic method shows the slightly lower strain reading comparing to the FEM analysis method.
3. In this photoelastic analysis, K_I of center cracked disc specimen under a pair of compressive load shows negative value as the crack angle increases over 30° .

I. 緒 論

구조물과 기계부품에 부하를 주는 하중은 여러가지 종류가 있고, 이에 따르는 파괴의 형식도 여러가지이며, 이들 부하의 형태에 의한 크랙의 발생 및 파괴사고에 대한 예측은 산업안전에 필수적인 요건이 된다.

그중에서도, 연강압연용 로울러, 베어링, 레일 및 차 등은 집중압축하중을 받는데 이들 부재의 파괴사고¹⁻²⁾가 빈번히 일어나고 있고, 특히 흑한기의 레일의 파괴에 의한 안전사고는 중요한 문제중의 하나이다. 압축에 의한 파괴중 fretting, 피팅 등과 같은 마모 현상은 두재료의 표면이 서로 미끌어질 때 일어나며, 이것이 공구나 기계부품의 성능과 수명을 저하시키는

* 인하공업전문대학 기계설계과 교수

** 유한공업전문대학 금형설계과 교수

주 원인이 되며, 이러한 공구나 기계부품을 수리 또는 교환을 하기 위한 인적, 경제적 손실은 막대하며, 이러한 문제의 해결방법중의 하나로 널리 사용되고 있는 것이 파괴역학이다.

최근의 파괴역학의 가속적인 발전에도 불구하고 마모 등의 모델에서와 같이 특이성이 중첩되는 경우에는 아직도 설계조건, 안전성평가, 피로수명 및 사용조건 등을 확립하는데 있어서 여러가지 복잡한 선형, 비선형 이론, 탄소성문제, 실험방법의 제한 등으로 파괴역학을 응용하는데 있어 아직도 해결하지 못한 사항들이 많이 남아있다.

파괴역학을 폭넓게 적용하기 위하여서는 기초적인 응력확대계수의 결정이 필수적이다. 이러한 응력확대계수는 적절한 방법을 통하여 작용응력과 구조물 및 재료에 존재하고 있는 균열 및 크랙의 크기를 측정하고, 이를 토대로 파괴역학적인 방법을 이용하여 결정하게 된다.^{3~5)} 압축하중에 의한 파괴문제는 종래의 일반적인 파괴역학적 기법을 이용하여 해결하기가 어렵고,^{6~13)} 광탄성해석기법 및 이들 자료의 수치해석적인 기법^{14~16)}이 요구된다.

본 연구에서는 응력확대계수를 광탄성 해석하였고, 이들 결과를 수치해석하여 실용화 되어 있는 유한요소 해석법과 비교 검토하였다. 한편, 이들 해석결과를 실제의 로울러나 베어링축 등의 경우에 적용하기 위하여 원판시편을 모델로 하여 같은 방법으로 해석하였다.

II. 응력확대계수의 광탄성해석

본 연구에서는 연강 압연용 로울러, 베어링, 철도차량의 타이어 등에 발생하는 크랙의 문제를 파괴역학적으로 고찰하였다. Muschelishvili¹⁷⁾의 식에 의하여 크랙이 없는 원판에 대한 응력해석이 이루어져 있으며, Kim¹⁸⁾은 중앙에 관통크랙을 갖는 원판에 1축 압축하중이 작용할 때의 응력확대계수를 결정하였다. 본 연구에서는 이들의 연구결과를 확장시켜, 2차원 정적 광탄성 시험법으로 중앙에 관통크랙을 갖는 원판 시험편을 모델로 설정하여 원판 둘레에 3점 압축하중 및 4점 압축하중이 작용할 때의 mixed mode 상태에서의 응력확대계수를 측정 해석하였다. 또한, 앞에서 연구한 surface-breaking 크랙 모델을 본 연구모델에 적용시키기 위하여 원판에 edge크랙을 가공한 모델에 대하여

서도 해석하였다.

K_I 및 K_{II} 가 동시에 존재하는 혼합mode에서의 크랙선단 근방에서는 다음의 관계가 성립한다.

$$2\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_2) = (2\pi r)^{-1/2} ((K_I \sin \theta + 2K_{II} \cos \theta)^2 + 2(K_{II} \sin \theta)^2)^{1/2} \quad (1)$$

여기서, τ_m 는 최대 전단응력이고,

$\sigma_1 - \sigma_2$ 는 주응력의 차이값이다.

또한, 주응력차 $\sigma_1 - \sigma_2$ 와 광탄성등색성의 차수 N , 광탄성 재료의 두께 t 및 광탄성 감도 a 는 다음 식이 성립된다.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = N / (at) \quad (2)$$

따라서, 위의 두식으로 부터,

$$N / (at) = (2\pi r)^{-1/2} ((K_I \sin \theta + 2K_{II} \cos \theta)^2 + 2(K_{II} \sin \theta)^2)^{1/2} \quad (3)$$

또한, 크랙선단 근방의 등색선에서 Fig. 1에 표시된 일정한 거리 r 에 대한 최대 주응력차(τ_m)_{max}에 대한 각도를 θ_m 라고 하면, θ_m 과 응력확대계수비 K_I/K_{II} 사이에는 다음의 식이 성립한다.

$$K_I/K_{II} = A \quad (4)$$

Fig. 1에 보인바와 같이 균열선단에서 θ_m 의 방향

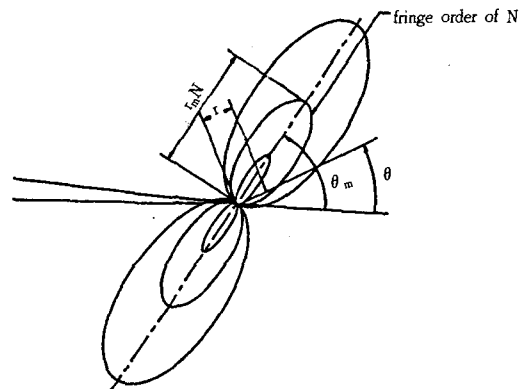


Fig. 1 Isochromatic fringe patterns of the crack tip in the mixed mode.

으로 측정된 N차의 등색선까지의 거리를 $r_m N$ 이라고 하고, 위의 식 (3)에 $\theta = \theta_m$, $r = r_m N$ 및 $K_I = AK_{II}$ 를 대입하여 정리하면 다음의 관계가 얻어진다.

$$K_{II} = (N/\alpha t)(2\pi r_m N)^{2/2} ((A \sin \theta_m + 2 \cos \theta_m)^2 + (\sin \theta_m)^2)^{-1/2} \quad (5)$$

여기서, $(2\pi r_m N)^{2/2} ((A \sin \theta_m + 2 \cos \theta_m)^2 + (\sin \theta_m)^2)^{-1/2} = C$ 로 놓으면, 위의 식들은 다음의 식을 간단히 정리된다.

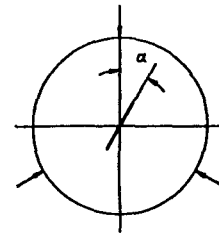
$$K_{II} = (C/\alpha t)N(r_m N)^{1/2} \quad (6)$$

이 식에서 α 및 t 는 광탄성감도와 광탄성재료의 두께이며, 사용되는 시편의 재료가 결정되면 일정한 값을 갖게 된다. 따라서, K_I 과 K_{II} 는 임의의 일정한 θ_m 에 대해서 $N(r_m N)^{1/2}$ 과 비례관계를 갖게 된다. 즉, $N(r_m N)^{1/2}$ 은 크랙선단에 근방의 광탄성 등색선으로부터 응력확대계수를 결정할 수 있는 Parameter라고 볼 수 있다.

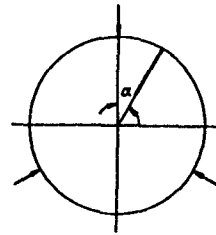
III. 실험방법 및 실험결과

3점 압축하중을 받는 원판내의 크랙 근방의 응력분포를 관찰하기 위하여 2차원 광탄성 실험을 하였다. 시험모델은, 원판에 Fig. 2와 같이 인공크랙을 가공하여, 중앙크랙과 edge크랙을 모델화하였다. 원판의 둘레에 집중하중을 경계면을 수직으로 작용시켜 광탄성 해석하였다. 본 연구에서는 혼합모드의 응력확대계수를 결정하기 위하여 2종류의 실험을 하였다. 6mm두께의 에폭시판으로 원판시험편과 하중장치를 만들었고, 크랙의 길이는 측정의 정도 및 시험오차 등을 고려하여 $a/R=0.3$ 으로 가공하였다. 하중장치의 접촉면은 항상 수직으로 접촉할 수 있도록 장치를 고안하였다. 또한 하중은 충분한 등색선을 얻을 수 있도록 하중을 부하였다.

본 광탄성해석 모델의 하중조건으로는, 첫번째로 중앙 관통크랙을 갖는 원판 시편이 3점 압축하중을 받는 경우의 모델, 두번째는 edge 관통크랙을 갖는 원판 시편이 3점 압축하중을 받는 경우의 모델에 대하여 해석하였다.



a) 3-point loading for center crack



b) 3-point loading for edge crack

Fig. 2 Loading angle α for disc specimen.

Fig. 3에는 중앙 관통크랙을 갖는 원판 시편이 3점 압축하중을 받는 경우에 대한 해석 모델의 실험결과 얻어진 결과를 보였고, Fig. 4에는 edge 관통크랙을 갖는 원판 시편이 3점 압축하중을 받는 경우의 실험결과 얻어진 결과를 보였다.

전술한 실험결과를 고찰하기 위하여 먼저 크랙 선단으로부터의 등색선의 차수 N과의 관계를 측정하여 그



Fig. 3 Isochromatic fringe patterns of the center cracked disc specimen.

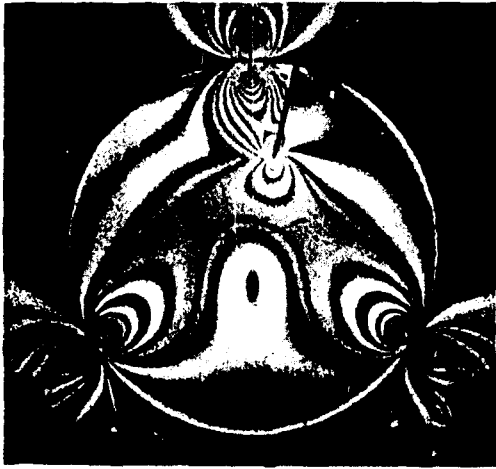


Fig. 4 Isochromatic fringe patterns of the edge cracked disc specimen.

실험결과를 정리하면 Fig. 5와 같이 직선상에 놓이게 된다. 이 그림에서 각각의 데이터점들은 등색선의 명시야 및 암시야로부터 얻어진 것인데, 이 그림에서 관찰하여 보면 큰 측정오차는 없다.

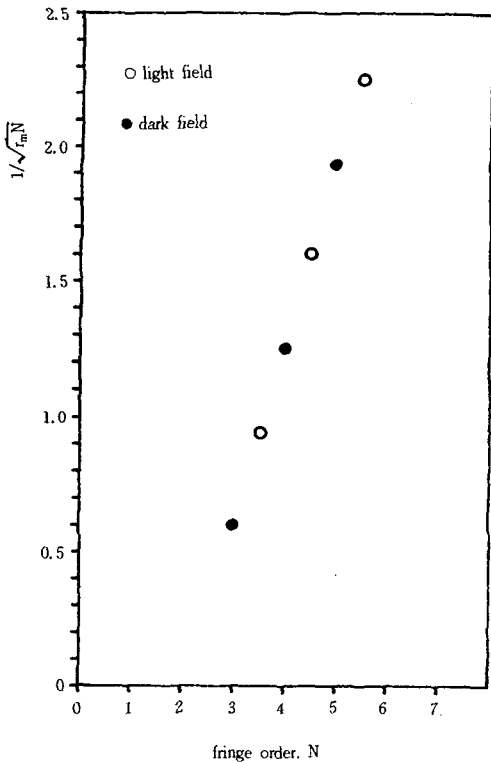


Fig. 5 Fringe order vs. micrometer setting for determining $\Delta N/\Delta D$.

Fig. 6에는 중앙 관통크랙을 갖는 원판 시편이 3점 압축하중을 받는 경우에 등색선으로부터 얻어진 결과를 사용하여 응력확대계수를 계산하여 정리하여 놓았다. 이 그림에서 opening mode에서의 응력확대계수 K_I 은 하중각도가 60°일 때가 가장 크고, sliding mode에서의 응력확대계수는 하중각도가 30°일 때에 $+K_{II}$ 가 가장 크게 나타났고, 하중각도가 90°일 때에 $-K_{II}$ 가 가장 작게 나타났다.

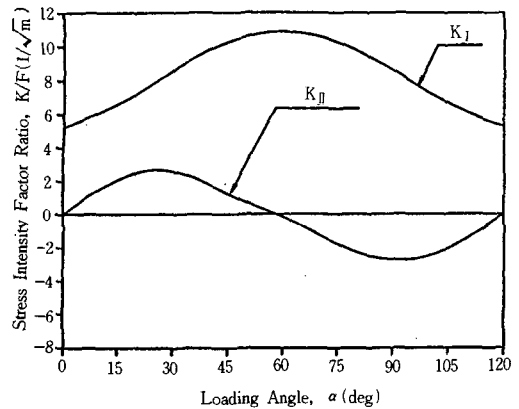


Fig. 6 K_I and K_{II} as a function of crack angle α by photoelastic analysis of center cracked disc specimen.

Fig. 7에는 edge관통크랙을 갖는 원판 시편이 3점 압축하중을 받는 경우의 실험결과 얻어진 결과를 보였는데, 이 그림에서 K_I 은 하중각도가 60°일 때가 가장

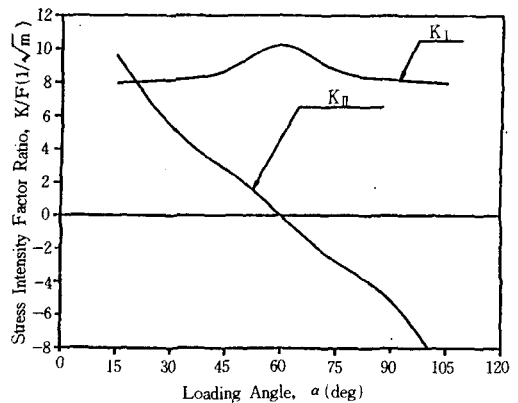


Fig. 7 K_I and K_{II} as a function of crack angle α by photoelastic analysis of edge cracked disc specimen.

크고, sliding mode에서는 하중각도가 15°일 때에 + K_{II} 가 가장 크게 나타났고, 하중각도가 105°일 때에 - K_{II} 가 가장 작게 나타났다.

IV. 연구에 대한 고찰

본 연구에서는 원판에 크랙모델을 설정하여 2차원 광탄성법으로 경계층 근방에 크랙이 존재하는 반평면에 집중하중이 작용할 때 발생하는 등색선을 파괴역학적으로 해석하였는데, 일반화된 해석법으로 혼합모드에서의 응력확대계수를 결정하였다.

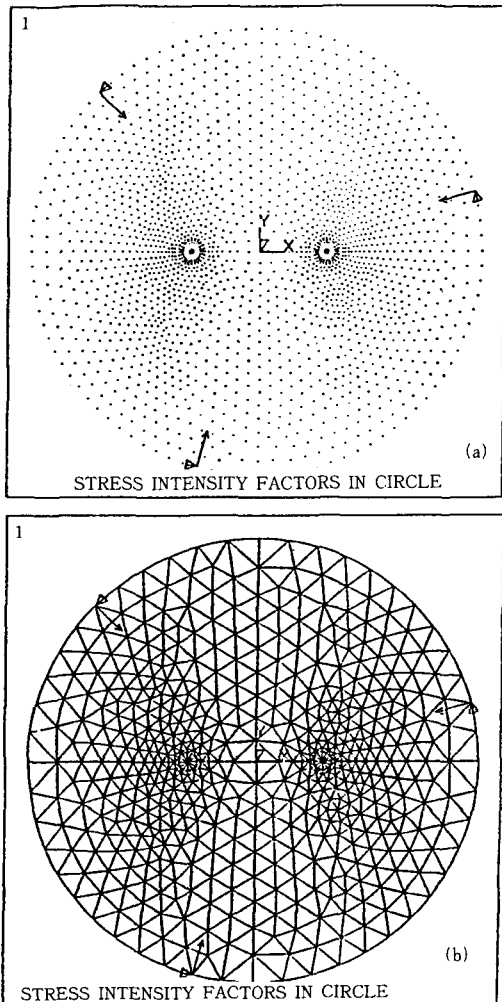


Fig. 8 Boundary condition of center cracked disc.

집중하중을 받는 크랙의 유한요소법에 의한 검토과정은 다음과 같다. Fig. 8(a)에 ANSYS프로그램의 pre-processing기능을 사용하여 시편을 자동요소분할하기 위하여 요소의 경계구속 조건을 표시하였다. 2차원 삼각형 모델을 선택하여 해석하였는데, 구속조건 및 요소의 분할을 Fig. 8(b)의 그림과 같이 하였는데, 크랙선단의 요소분할은 실험모델의 특이성을 고려하여 요소의 분할을 많이 하였다. 이때, 모델에 대한 요소의 수는 1248개, 절점의 수는 2591개로 충분히 분할하였고, 해석의 정도를 고려하여 distorted method를 사용하여 해석하였는데, 이들 모델은 전에 광탄성 실험으로 해석하였던 경우를 모두 해석하였다.

Fig. 9에는 3점 집중하중을 받는 모델의 해석결과 얻어진 등응력선도를 보였는데 광탄성실험결과 얻어진 fringe pattern과 비슷한 양상을 보이고 있음을 알 수 있다. Table 1에 유한요소해석결과 얻어진 응력확대계수와 광탄성실험 결과와 비교하였다.

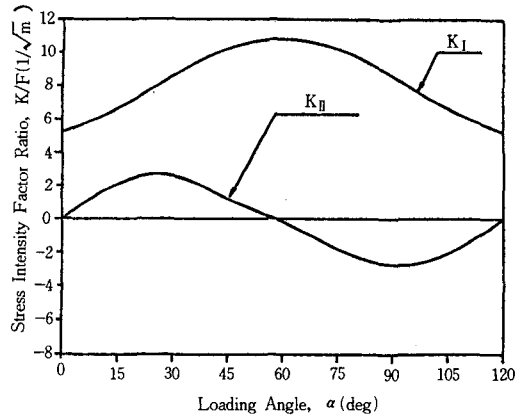


Fig. 9 Stress intensity factors as a function of the load angle α for center cracked disc specimen.

Fig. 10에는 크랙이 있는 원판 시편이 2점 집중 압축하중을 받는 경우에 Kim¹⁸⁾에 의한 광탄성 해석과 근사해석 및 수치해석결과를 하중 작용각도에 대하여 정리한 것인데, 이들 결과를 살펴보면 각각의 해가 서로 잘 맞음을 알 수 있다.

집중하중을 받는 원판 edge 크랙도 해석하였는데, Fig. 11(a)에 ANSYS 프로그램의 pre-processing기능을 사용하여 시편을 자동요소분할을 하기 위한 구속 번호를 지정하였고, Fig. 11(b)에 요소의 경계구속

Table 1. Statistics for K_I and K_{II} by FEM analysis of center cracked disc specimen.

Specimen (deg.)	Photoelastic		FEM	
	K_I/F ($m^{1/2}$)	K_{II}/F ($m^{1/2}$)	K_I/F ($m^{1/2}$)	K_{II}/F ($m^{1/2}$)
0	5.20	0.00	5.25	0.00
15	6.38	2.48	6.49	2.42
30	8.67	3.15	8.71	3.07
45	10.41	1.07	10.64	1.42
60	11.01	0.00	11.32	0.00
75	10.41	-1.07	10.64	-1.42
90	8.67	-3.15	8.71	-3.07
105	6.38	-2.48	6.49	-2.42
120	5.20	0.00	5.25	0.00

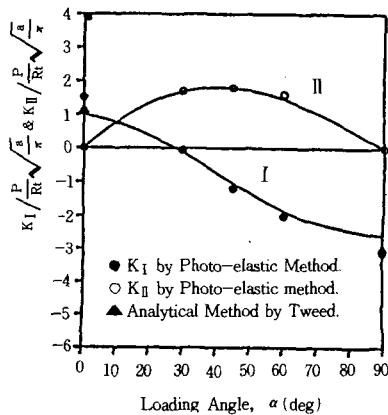


Fig. 10 Stress intensity factors as a function of the load angle α for center cracked disc specimen under 2, point loading.

조건을 표시하였다. 앞서서와 같이 2차원 삼각형 모델을 선택하여 해석하였는데, 구속조건 및 크랙선단의 요소분할은 실험모델의 특이성을 고려하여 요소의 분할을 많이하였다. 이때, 모델에 대한 요소의 수는 1124개, 절점의 수는 2328개로 충분히 분할하였고, 해석의 정도를 고려하여 전술한 distorted method를 사용하여 해석하였는데, 이들 모델은 전에 광탄성 실험으로 해석하였던 경우를 모두 해석하였다.

Fig. 12 및 Fig. 13에는 3점 집중하중을 받는 모델의 해석결과 얻어진 등응력선도를 보였는데 광탄성 실험결과 얻어진 fringe pattern과 비슷한 양상을 보이고

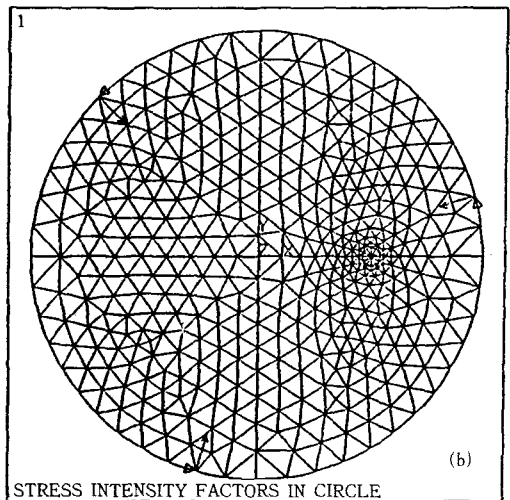
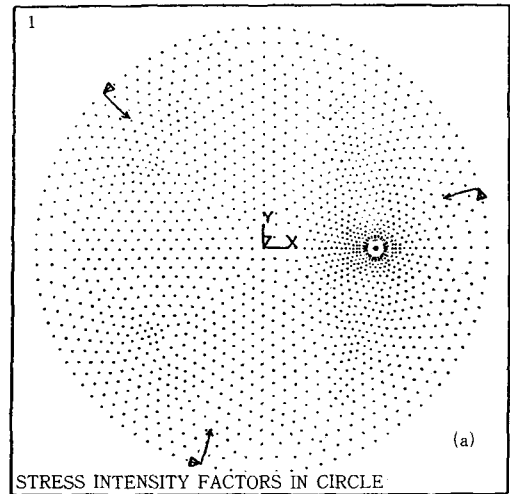


Fig. 11 Boundary condition of edge cracked disc.

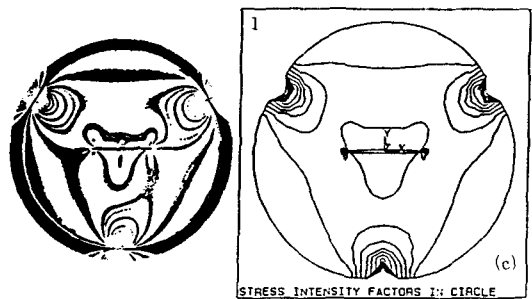


Fig. 12 Equivalent stress distribution of center cracked disc.

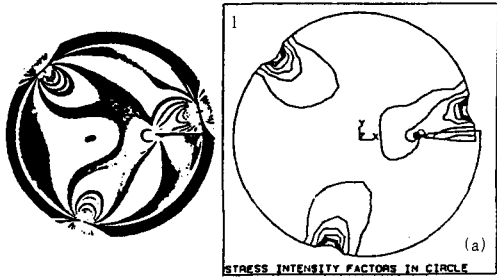


Fig. 13 Equivalent stress distribution of edge cracked disc.

있음을 알 수 있다. Table 2에 유한요소해석 결과 얻어진 응력확대계수와 광탄성실험 결과와 비교하였다.

Table 2. Statistics for K_I and K_{II} by FEM analysis of edge cracked disc specimen.

Specimen (deg.)	Photoelastic		FEM	
	K_I/F ($m^{1/2}$)	K_{II}/F ($m^{1/2}$)	K_I/F ($m^{1/2}$)	K_{II}/F ($m^{1/2}$)
15	7.92	9.62	7.27	7.90
30	8.18	4.56	6.69	3.97
45	8.02	3.15	6.59	1.13
60	11.29	0.00	10.48	0.00
75	8.02	-3.15	6.59	-1.13
90	8.18	-4.56	6.69	-3.97
105	7.92	-9.62	7.27	-7.90

V. 결 론

본 연구에서는 기계구조물의 중요한 부품인 베어링 및 베어링 축 등의 파괴현상을 해석하기 위하여 Center 크랙이 있는 원판시편과 Edge 크랙이 있는 원판시편을 택하여 해석, 검토하였다. 이들 부재들은 집중압축하중을 받는데 이들의 파괴사고를 해석하기 위하여 응력확대계수를 광탄성법에 의하여 결정하였고, 해석 결과의 검토에는 수치해석법을 사용하였으며, 이들 실험결과를 유한요소법을 사용하여 비교, 검토하였다.

본 연구에서 얻어진 결론을 요약하면 다음과 같다.

- 1) 본 연구의 결과 원판시편을 사용하면, 3점 압

축하중상태에서 혼합모드의 응력확대계수의 해석을 간단히 하중각도만을 변화시켜 해석할 수 있다.

2) 중앙크랙을 갖는 원판 시편의 경우에는 유한요소법의 해석결과 비교하여 보면 각각의 응력확대계수의 오차가 그다지 크지 않음을 알 수 있다. 그러나, Edge crack이 있는 시편의 경우에는 근접크랙의 경우와 같이 오차범위가 크며, 특히, 하중점 근방으로 접근할수록 오차가 많이짐을 알 수 있다.

REFERENCE

- 1) P.H. Dowson, "Contact Fatigue in Hard Steel Specimens with Point and Line Contact." J. of Mech. Eng. Sic., Vol. 9, No. 1, (1967), p. 67.
- 2) P.H. Dowson, "Contact Fatigue in Soft Steel Specimens with Random Loading." J. of Mech. Eng. Sic., Vol. 9, No. 1, (1967), p. 79.
- 3) I.N. Sneddon, "The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid." Proc. Roy. Soc. of London, A-187, (1946), p. 229.
- 4) G.R. Irwin, "Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Transversing a Plate." Trans. ASME, Series E, Vol. 24, (1957), p. 361.
- 5) M.L. Williams, "On the Stress Distribution at the Base of a Stational Crack." Trans. ASME, Series E, Vol. 24, (1957), p. 109.
- 6) R.E. Elling, W. H. Munse, N.M. Newmark, "Fatigue Tests in Axial Compression." Proc. ASTM, 54th Annual Meeting, (1951), p. 792.
- 7) F.A. McClintock, J.B. Walsh, "Friction on Griffith Cracks in Rock under Pressure." Proc. 4th US Nat. Cong. Appl. Mech., (1962), p. 101.
- 8) E. Hoek, Z.T. Bieniawsk, "Brittle Fracture Propagation in Rock under Compression." Int. J. of Fract. Mech., Vol. 1, (1965), p. 137.
- 9) B. Paul, M. Gangal, "Initial and Subsequent

- Fracture Curves for Biaxial Compression of Brittle Materials." Fracture and Breakage of Rocks, ed. by Fairhurst, Ch. 5, (1966), p. 113.
- 10) C. Fairhurst, N.G.W. Cook, "The Phenomenon of Rock Splitting Parallel to the Direction of Maximum Compression in the Neighbourhood of a Surface." Proc. 1st Intern. Cong., Int. Soc. Rock. Mech., Vol. 1, (1966), p. 687.
 - 11) E.G. Bombolakis, "Photoelastic Study of Initial Stages of Brittle Fracture in Compression." Technophysics, Vol. 6, (1968), p. 461.
 - 12) T.L. Gerber, H.O. Fuchs, "Analysis of Non-propagating Fatigue Cracks in Notched Parts with Compressive Mean Stress." J. of Materials, Vol. 5, (1968), p. 359.
 - 13) B. Cotterel, "Brittle Fracture in Compression." Int. J. of Fract. Mech., Vol. 8, No. 2, (1972), p. 195.
 - 14) N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity." P. Noordhoff, p. 332.
 - 15) M. Isida, "Arbitrary Loading Problems of Double Symmetric Regions Containing a Central Crack." Pro. Japan-US Seminar, Vol. 2, (1974), p. 8-1.
 - 16) J. Tweed, S. C. Das, D. P. Rooke, "The Stress Intensity Factors of a Radial Crack in a Finite Elastic Disc." Intern. J. Eng. Sci. Vol. 10, (1972), p. 323.
 - 17) N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity." P. Noordhoff, p. 332.
 - 18) S.C. Kim, Basic Study on the Compressive Strength by the Use of Fracture Mechanics, Doctoral Dissertation, Tokyo University, (1976).