

수학적 영상개념

박일영

신홍전문대학 방사선과

초 록

방사선영상의 충실도를 저하시키는 것에는 여러가지 물리적현상이 있다. 가장 보편적인 저하타입은 해상력의 상실과 노이즈의 증가이다. 본 논문은 해상력과 해상력에 미치는 인자, 그리고 그 인자들의 특성을 다룬다. 영상을 흐리게 하는 일반적인 현상때문에 생기는 해상력 상실을, 일차원 및 이차원 신호를 대상으로 그림과 수학으로 설명한다. 점분산함수, 선분산함수, 컨볼루션 적분함수 및 모듈전달함수등을 논의한다. 또한 푸리에 변환을 사용해서 주파수영역의 연산개념을 언급한다.

1. 머릿말

방사선과의 영상시스템은 X-선, 라디오파, 음파를 포함한 여러가지 파장을 사용한다. 많은 영상시스템은 전자회로, 주사전자빔, 광방출 또는 화학반응을 포함한 신호의 중간단계를 이용한다. 영상내에는 다양한 신호타입과 기술이 관련되어 있는 반면, 모든 영상 모달리티 사이에 공통되는 사항이 있다. 즉 영상신호는 검출기로부터 출발하여 중간단계를 거쳐 디스플레이장치까지 전파되어간다. 또한 모든 영상시스템에 공통되는 것은 영상사슬내에 있는 각종 부품에 의해서 생기는 신호의 저하이다. 신호저하중에서 가장 두드러진 것이 해상력의 상실과 노이즈의 증가이다.

특정한 영상모달리티의 해상력 저하원인을 하나하나 상세히 설명코저 한다. 개념을 설명하기 위하여 평면 X-선 영상을 실예로 사용한다. 해상력을 주제로 했거나 그것에 대한 설명을 다룬 논문들은 수없이 많다^(1,2,3,4,5,6,7). 본 논문의 의도는 실제적 측정을 유도할 수 있는 이론적 논의에 초점을 맞추고 진단방사선전문의와 의학물리학자들이 익히 잘 알고 있는 예들을 사용한다.

2. 일차원 신호

2.1 단순 일차원 시스템에 있어서 해상력 상실

그림1은 증감지에 의한 X-선 광자의 흡수를 그림으로 보여주고 있다. X-선에너지가 광전효과에 의해서 완전히 흡수되거나 콤프톤산란에 의해서 부분적으로 흡수되면, 증감지내에서 광방출이 일어난다. 광방출은 등방성을 가지기 때문에 광에너지는 모든 방향으로 균등하게 방출한다. 증감지의 밑면에 도달한 일부의 빛은 필름의 유체를 감광시키는데 이용된다. 증감지로부터 등방

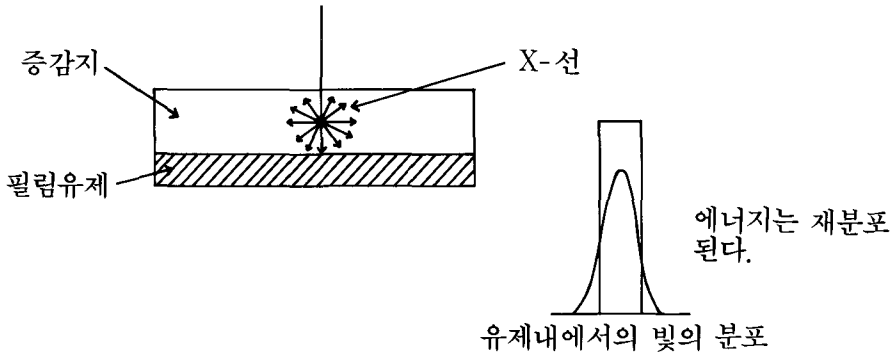


Fig 1. 영상에서 해상력의 손상을 일으키는 물리적 현상의 한 예. 입사 X-선은 등방성으로 빛을 방출하면서 흡수된다. 필름유제에서 보는 것처럼 빛의 분포는 점상(point) 입력에도 불구하고 출력은 보다 확산, 즉 흐르게 됨을 설명하고 있다.

성 광방출의 물리적 현상은, 핀-포인트(pin-point)의 X-선 에너지가 빛의 확산분포를 일으키고, 나중에 필름을 노광시키는 것이다. 이 빛의 흐림현상 (blurring)은 해상력의 손상을 일으키며 이 현상은 모든 의료영상시스템을 통해 반복적으로 일어나는 문제이다.

그림 1에서 설명하는 것처럼 빛이 흐려지는 현상은 정보(검출된 에너지)를 퍼지게 한다. 정밀하게 볼때, 영상정보의 분산은 어떻게 해상력의 저하를 가져오는가? 그림 1에 있어서 X-선은 "시스템", 즉 증감지에서 매우 좁은 입력으로 나타난다. 증감지 바닥에서 나오는 빛이 시스템의 출력이다. 영상시스템이나 영상시스템 연결부품에 대한 전통적인 블랙박스 분석에 있어서, 시스템이 입력에 대한 출력을 묘사해내는 방식을 시스템의 특성이라고 정의한다. 입력에 대한 출력의 그림설명을 시스템을 분산함수라고 한다.

그림 1에서 입력데이터는 출력을 계산하기 위하여 시스템의 분산함수와 컨볼루션(convolve)되었다. 컨볼루션(convolution)은 영상이 흐려지는 현상을 설명하는 수학적 연산방법이다. 그림 2에서 증감지에 입사하는 입력신호를 $S_{in}(X)$ 라고 두고 증감지로부터 나오는 빛의 분포를 $S_{out}(X)$ 라고 두자. 더 나아가서 분산함수를 $h(x)$ 라고 두자. $h(x)$ 는 가우시안(Gaussian)형태를 취하고 있다.

$$h(x) = e^{-1/2(x/\sigma)^2} \dots \dots \dots (1)$$

분산함수는 σ 증가와 함께 그 폭이 넓어진다. $S_{in}(x)$ 와 $S_{out}(x)$ 는 컨볼루션 적분(convolution integral)으로 설명된다.

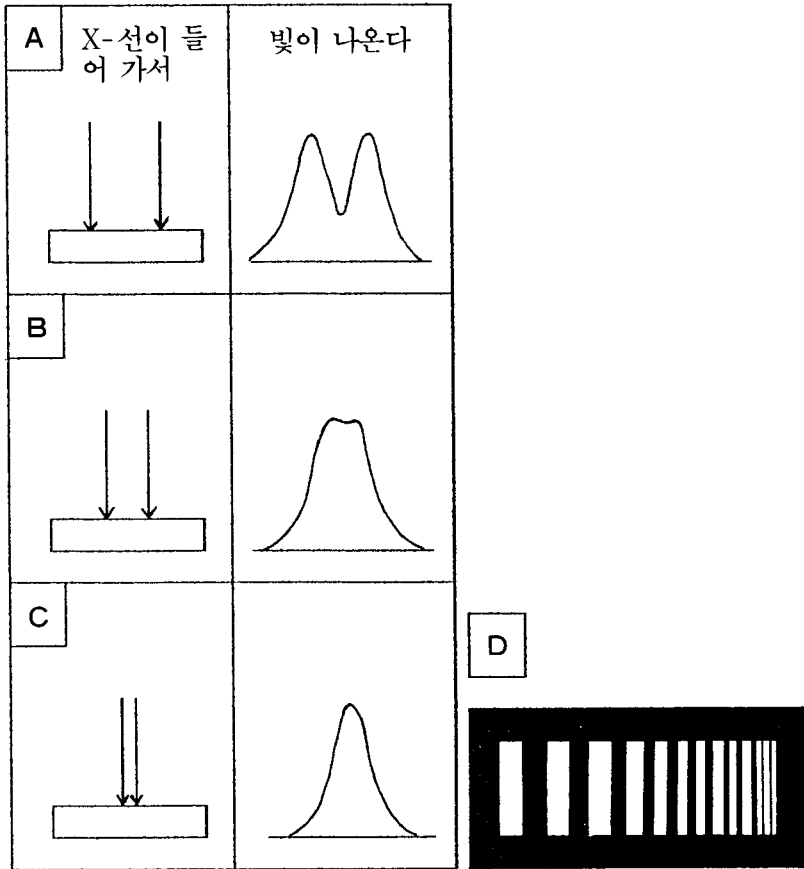
$$S_{out}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{in}(x)h(x-x')dx' \dots \dots \dots (2)$$

$S_{in}(x)$ 와 $h(x)$ 의 함수형태를 알고 있다면 컨볼루션은 분석적방법(analytical)으로 수행될 수 있다. 실제로 이 함수는 보통 분석적으로 알려져 있지 않으며, 컨볼루션은 컴퓨터를 사용하여 수치해석법(numerically)으로 구한다. 방정식 (2)는 C단어를 사용하여 컴퓨터코드로 나타내면

```

/ Define the output from ix1 to ix2. */
/ nkern is the maximum length of the spread function. */
/ This assumes spread function to be symmetrical. */
for(ix=ix1:ix(ix2; ++ix) {S_out[ix]=0.0;
for(kx=(ix-nkern);kx<=(ix+nkern); ++kx) {k=i abs(kx-ix);
S_out[ix]=S_out[ix]+S_in[kx] * lsf[k];}}
    
```

분산함수의 모양이 변하지 않는다는 전제조건은 분석적이고도 이산적인 컨볼루션 형태임을 의미한다. 만일 분산함수가 위치함수가 아니라면 (즉 그 모양이 일정하다면) 그 시스템은 정태적이라고 한다. 증감지의 경우에 물리적 설정조건, 즉 증감지는 그 재료와 두께가 균일하고 X-선이 수직으로 증감지에 들어간다고 가정하면, 증감지의 분산함수는 위치에 상관없이 동일하다고 생각할 수 있다. 증감지는 이와같이 정태적 시스템이다.



해상력을 검사하는 데 사용하는 라인패어팬텀

Fig 2. 영상시스템의 영상식특성이 어떻게 해상력의 감소를 일으키는 지를 보여주는 그림. 해상력의 고전적 정의는 두 물체를 분간할 수 있는 능력을 말한다. 한계 해상력은 각 피사체가 보이는 두개의 작은 피사체가 보이는 두개의 작은 피사체사이의 최소거리이다.

그림 2는 두 피사체간의 거리가, 분산함수의 모양과 관련해서, 두개의 피사체가 별개로 보이게 되는지의 능력에 어떻게 영향을 미치는 지를 보여준다. 이 상황의 잘 알려진 예는 라인 페어 팬텀 (line pair phantom, 그림 2D)이 스크린/필름시스템의 해상력을 평가하는 데 사용되는 곳이다. 분산함수는 정태적이다. 그렇지만 해상력기구속에 있는 납 막대 사이의 구멍은 틀의 길이쪽으로 갈수록 더 근접해 있다. 두개의 X선 점선원은 그림 2A로부터 2C로 가면서 더 가까이 있기 때문에 출력 광분포는 점차 하나로 되어가고, 그 결과 2C에서는 두 피사체가 서로 분별되지 못함이 명백하다. 2A와 2C사이 어디엔가, 2B쯤에서 검출시스템의 한계 해상력에 도달했다. 라인 페어팬텀 영상에서 인간의 눈은 (어느 정도 주관적으로) 한계 해상력에 해당하는 점을 발견하고, 팬텀상에 인쇄된 납막대의 간격에 해당하는 값이 한계 해상력으로 기록된다(밀리미터당 라인페어로). 해상력을 계산하는 이 단순한 방법은 표준에 미치지지는 못하지만, 방사선과에서 편의적 해상력 측정방법으로 보통 사용된다.

때때로 여러가지 필름/증감지조합과 같은, 다른 영상시스템을 비교하는 것은, 그것을 평가하는데 중요하다. 이 경우에 시스템이 다르면 분산함수특성도 다르게 나타나고, 동일한 피사체(동일한 거리로 떨어진 두점)을 구분하는 능력도 변할 것이다.

이러한 상황을 그림 3에서 본다. 그림 3에서 입력 X-선의 떨어진 거리는 동일하고, 분산함수는 증감지의 두께가 증가할수록 넓어진다.

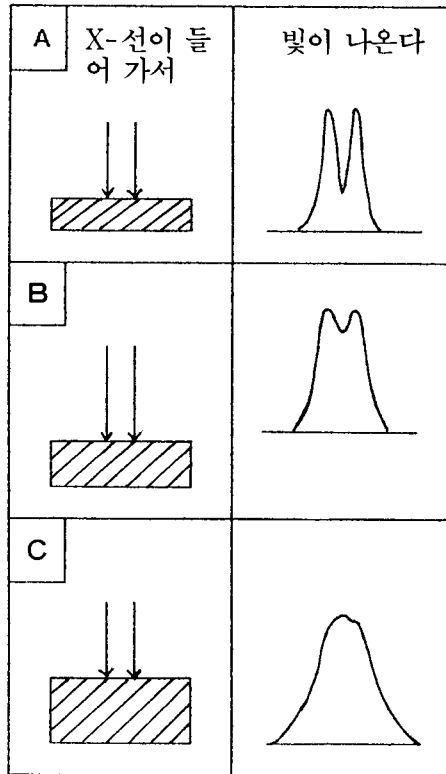


Fig 3. 세가지 다른 증감지/필름 시스템의 비교. 증감지가 두꺼울수록 감도가 크고 인물질로부터 방출되는 빛이 더 많이 사방으로 퍼진다. 결과적으로 그 분산함수는 넓어지고 작은 물체를 분별하는 능력은 손상된다.

그림 2와 3은 동일한 개념을 다른 방법으로 설명하고 있다. 그림 2는 해상력자체 뒤에 숨어있는 원리를 설명하며, 라인 페어 패턴측정과 아주 비슷하다. 그림 3은 특정수준의 작은 피사체의 해상력이 검출기시스템에 의해서 어떻게 영향을 받는지를 보여주고 있다. 그림 3에서 두개의 X-선 입력사이의 간격이, 예컨대, 골사진에서 주상골의 문양을 분별하는 데 필요한 간격과 같다면, 그림 3A의 증감지는 주상골의 문양을 분별하기 위한 좋은 선택이 될수 있을 것이다.

2.2 의료용영상에 있어서 일차원 분산함수

2차원 평면 X-선에서 2D신호는 영상사슬의 중간단계에서 1-D 신호로 변한다. 예컨대, 영상 증배관/TV 장치에서 TV카메라는 평면 입력 영상데이터 (영상증배관의 광 출력)를 비디오 케이블을 따라 비디오 모니터에 전송된 비디오 신호 (전압대 시간)에서의 단순일차 공간적 차원으로 변환시킨다. 비디오 모니터에서 1-D 비디오 신호는 2-D 영상으로 재조립된다. 영상 사슬의 어떤 부품이, 일차원 형태로 존재하는 신호의 악화를 일으킨다면, 그 결과로 오는 해상력 상실은 영상위에서 공간적 일차원에서 일어날 것이다. 비디오영상은 모니터상에서 수많은 전자 빔의 매우 신속한 수평주사로 생성된다. 비디오 시스템 회로의 요소들은 TV모니터에서 영상의 수평방향의 해상력을 감소시킬수 있는 전자 신호의 왜곡을 일으킬 수 있다. 비디오 시스템에서 한계 수평 해상력 (Δx)은 비디오부품의 ($\Delta x = \Delta t \times$ 유효주사속도) 한계 시간 해상력 (Δt)에 의해서 보통 통제된다. Δt 의 값은 $BW = 1/(2\Delta t)$ 관계를 사용해서 시스템의 대역폭 (bandwidth)으로 보통 표현된다. 비디오 시스템에서 생기는 극단적인 예제를 그림 4에서 본다.

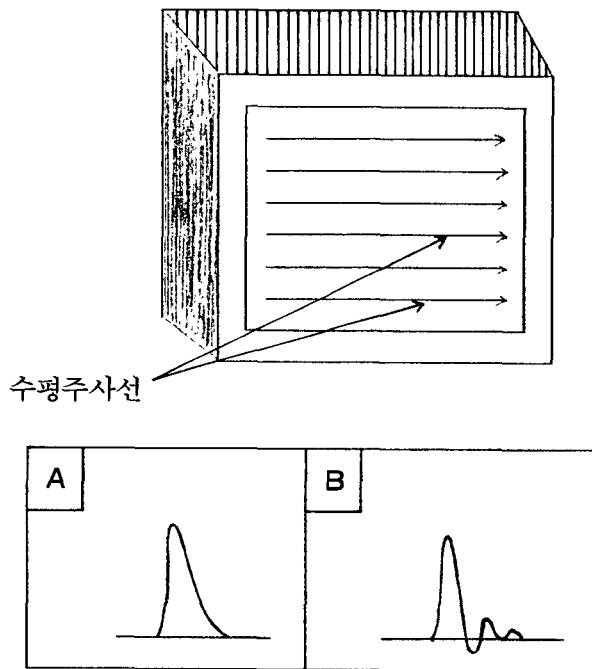


Fig 4. 투시와 같은 의료용 비디오 영상에서 진정한 일차원분산함수의 일예. A에서 분산함수는 모니터상에 정해진 휘도가 너무 높게 조정되었을 때 전형적으로 일어날수 있는 모니터 불루밍현상(너무 밝아 보이지 않음)에 대한 분산함수를 보여준다. B에서 분산함수는 입력현상을 보여준다. 이러한 타입의 아티팩트는 실제 영상의 오른쪽에 고우스트영상 (실제적으로는 없는 여상이 나타남)으로 나타난다.

의료용 비디오 시스템은 일차원 분산함수의 가장 보편적인 일례이다. BaFBr:Eu 인물질을 사용하는 광자극 인시스템은 레이저빔을 가지고 되스터(raster) 방식으로 주사된다. 이 시스템에서 광검출기와 디지털이저 사이에 신호를 저하시키는 문제가 일어난다면, 위의 예와 유사한 1-D효과가 원칙적으로 일어날수 있다. 초음파 시스템 역시 일차원 단계를 통해 신호를 보낼수 있다.

비록 1-D점선원 함수는 공간 일차원으로 작용하고, 좌우 대칭적이 아니지만, 이것은 그 함수들이 정태적이지 아니라는 것을 의미하는 것은 아니다. 사실 대부분의 1-D분산함수는 검출기 표면의 공간위치사이에서 (그리고 분산함수는 검출기표면의 공간위치에 좌우되지 않기 때문에) 분간되지 않는 영상사슬의 한 단계에서 일반적으로 가동되기 때문에 정태적이라고 믿고 있다.

3. 이차원 신호

증감지와 같은 고체 피사체로부터 방출되는 빛은 삼차원으로 전파해간다.

우리는 보통 검출기에 도달하는 빛의 분산부분만 관심이 있다. 증감지/필름의 경우 그 검출기는 2차원 (평면)기구이다. 투영 영상에서 영상이 검출기의 2차원표면에 그려질때의 분산함수의 모습을 전형적으로 논의한다.

분산함수를 어떻게 설명할 것인가에 관한 수학은 그 분산함수를 어떻게 측정할 것인가와 관계가 있다. 영상문헌에서 공통적으로 논의하는 세가지의 시스템 분산함수를 측정하는 방법을 설명한다.

3.1 점분산함수

두꺼운 납판 한가운데 매우 작은 구멍을 뚫는다. 이 납판을 증감지 카세트위에 올려놓고 그것을 노출시키면 아주 작은 점을 통과한 방사선만이 검출기에 닿을 것이다. 매우 작은 이 핀-포인트 노출영상을 점분산함수라고 한다. 이 점분산함수는 가장 알고 싶은 분산함수이나, 그것을 실제적으로 측정하기는 어렵다. 납판에 뚫어놓은 구멍의 크기가 무한히 작을때만이 점분산함수의 기술적 정의가 가능하다. 이 구멍은 측정될 점분산함수의 면적보다 훨씬 더 작아야 한다. 매우 작은 양의 방사선만이 그 작은 구멍을 통과하기 때문에 증감지/필름을 적정 노출하기 위해서는 노출을 많이 할 필요가 있다.

제대로 노출된 필름을 얻었다 하더라도 점분산함수를 정량적으로 측정하기는 어렵다. 그러나 고해상력을 가진 디지털이저와 같은 기술적인 진보는 점분산함수의 일반적인 정량화를 쉽게 하고 있다. 점분산함수는 영상시스템이 공간해상력에 미치는 영향력에 대한 최종적이고도 공간적인 측정이다. 무한히 작은 점선원을 델타함수라고 한다. 앞에서 얘기한 핀 호일(pinhole)기법은 델타함수와 비슷하다. 정의에 의하면 델타함수인 입력으로부터 얻은 어느 한 시스템의 출력이 점분산함수이다.

그림 5A는 대칭적인 가우시언 모양을 가진 가상적 점분산함수를 보여준다. 그림 5B는 두개의 구멍이 뚫린 두꺼운 납판을 통해 시스템을 노출시켜 얻은 이상적인 입력노출이고, 5C는 시스템으로부터 얻은 출력응답을 보여준다. 5C에서 보여주는 등방성 영상은 5A에서 보여준 점분산함수와 5B의 입력노출과 컨볼브함으로서 얻는다. 이 경우에는 2차원 컨볼루션이 사용된다.

$$S_{out}(X,Y) = \int_{-\infty+\infty}^{-\infty-\infty} \int_{+\infty+\infty}^{-\infty-\infty} \text{Sin}(x-x',y-y') \text{PSF}(x',y') dx' dy' \dots\dots\dots (3)$$

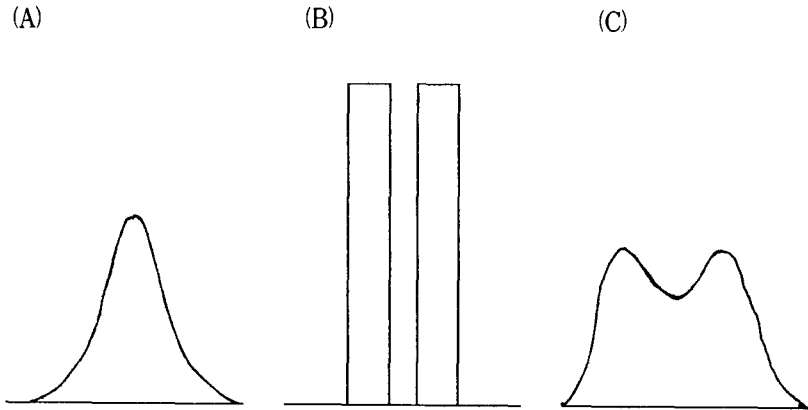


Fig 5. (A) 증감지/필름 시스템과 같은 평면 영상시스템에 대한 이상적인 점분산함수. 대칭적인 가우시안을 보인다. (B) 입력 노출패턴은 영상시스템을 노출하는데 사용한다. 이 패턴은 두개의 작은 구멍이 뚫린 두꺼운 납 흡수체 사용해서 얻는다. (C) 입력 노출에 대한 시스템의 응답은 흐려졌다. 이 등방성 영상은 5A와 5B 사이의 2-D 컨볼루션에 의해서 얻는다.

그림 5B와 5C에서 입력과 출력의 등방성 그림의 높이는 같은 축에 그려져 있다. 두개의 등방성 영상의 체적(에너지)은 동일하다. 영상이 흐려지는 현상은 피크로부터 에너지 일부를 제거하여 (5B) 밑부분에 재분배하기 때문이라는 사실이 분명하다. 즉 높은 신호 영역에 있는 신호는 감소되고, 주위의 낮은 신호 영역은 증가된다. 그 결과는 분명히 콘트라스트에 영향을 준다. 콘트라스트 자체는 수치해석으로 정의될수 있고, 두 주변영역간의 영상밀도차와도 관련된다. 그림 5B에서 신호와 배경간의 콘트라스트는 매우 높고, 한편 희미해진 영상 (5C)에서는 콘트라스트가 상당히 낮다. 콘트라스트감소의 확대는 신호영역의 크기와 점분산함수의 모양과 관계가 있다.

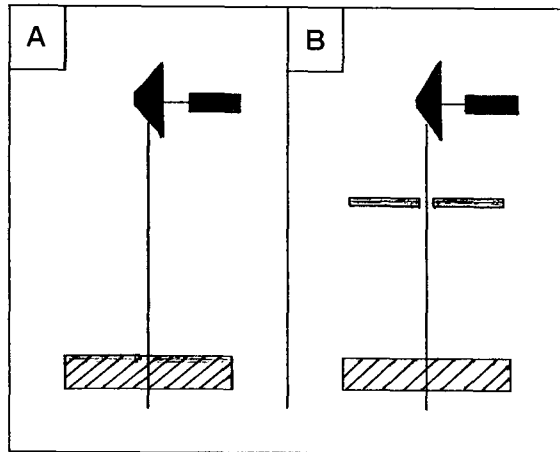


Fig 6. 개의 다른 핀호울의 위치. (A)에서 핀호울은 검출기와 가깝고 초점의 확대는 최소이다. 이 방버은 검출기 시스템의 점분산함수를 평가하는데 사용된다. (B)에서 핀호울은 크게 확대되고, 이 경우 핀호울은 점분산함수인 초점자체의 투영거울영상을 만든다. 그 확대는 검출기의 점분산수에 비해 초점의 점분산함수의 크기를 증가시키며, 큰 확대에 있어서도 검출기의 점분산에 미치는 효과는 아주 크지는 않다. 이것은 증감지/필름 대신에 필름만을 사용했을 때 더 맞는 말이다.

위에서 설명한 핀 호울 카메라는 영상을 만드는데 사용하는 검출기 시스템과 노출에 사용하는 초점을 평가하는데 사용될 수 있다. 검출기 시스템의 점선원을 나타내기 위해서는 초점이 점분산 함수에 미치는 영향을 최소화할 필요가 있다. 즉 그림 6A에서 보는 바와같이 그것은 선원-핀 호울 거리를 크게, 그리고 핀호울-검출기 거리를 아주 작게한 단순 확대로 핀 호울을 영상화시킴으로서 이룩된다. 반대로 초점의 점분산함수는 3-10과 같은 큰 확대를 사용해서, 즉 그림 6B에서 보는 바와같이 핀 호울-검출기 간격을 상당히 증가시킴으로서 얻을 수 있다.

검출기의 점분산함수가 검출기의 면에 대해 일정하다면, 초점점분산함수는 확대 (와 확대에 의한 영상의 위치)에 좌우된다는 사실이 그림 6으로부터 분명하다. 환자와 같은 두꺼운 피사체에 대해서는 인체가 확대되어, 초점점분산함수는 이 경우에 비정태적으로 작용한다.

납판에 구멍을 뚫은 점대신에, 납흡수체위에 길다란 매우 좁은 슬리트를 만든 것을 제외하면, 선분산함수는 점분산함수와 비슷하다. 선분산함수의 예는 그림 7에서 보는데, 7A는 검출기 시스템으로 들어가는 입력을 보여주고, 그림 7B는 흐려진 출력을 보여준다. 선분산함수는 슬리트에 대해 수직으로 찍은 흐린 영상을 전부 조사한 프로파일이다. 선분산함수측정에서 샘플링 해상력을 증가시키는 것이 유리하다고 판단되면, 각도 θ (슬리트에 수직인)로 슬리트를 주사하고 수평축은 θ 의 코사인 (cosine)으로 보정될 수 있다.

점분산함수에 비해 선분산함수는 몇가지 실제적인 이점을 가지고 있다. 슬리트의 구경은 핀호울보다 더 많은 방사선을 투과하게 하기 때문에 검출기를 적정하게 노출하는데 필요한 노출은 그다지 높지않아도 된다. 보다 중요한 하나의 선을 따라 농도를 측정하기 위하여 디자인된 기구-즉 스캐닝용 마이크로텐시도미터를 사용해 선분산함수를 측정할 수 있다는 사실이다. 마지막으로 선분산함수를 푸리에 변환시킨 모듈러스(modulus)가 모듈변환함수이며, 이것은 중요할 뿐만 아니라 흔히 사용하는 시스템의 해상력의 성능을 설명한다. MTF는 후에 자세히 논의될 것이다.

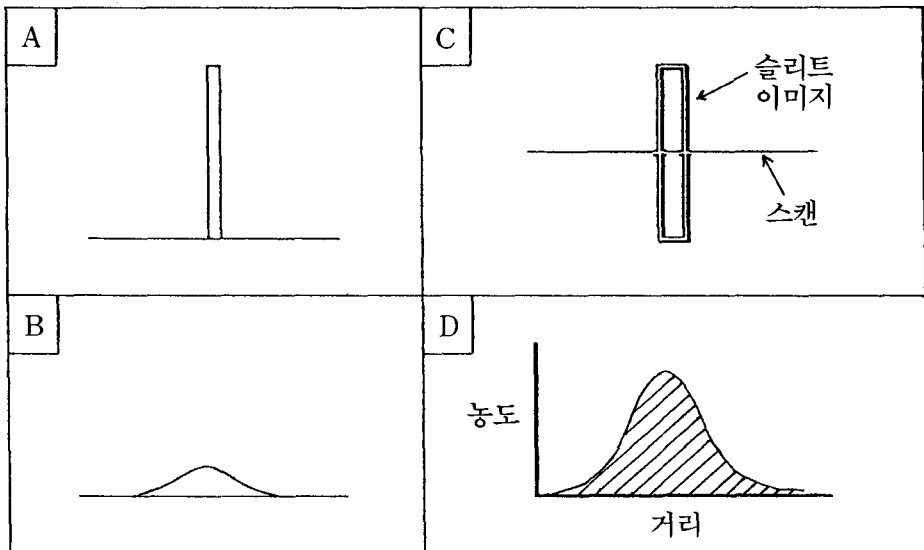


Fig 7. 선분산함수와 그 측정. (A)검출기에 슬리트(slit) 노출이 입사되어, 검출기 (B)에 의해 모듈레이트된 슬리트의 출력영상을 만들어 낸다. (C)에서는, 슬리트영상에 대해 수직선으로 스캐닝용 마이크로텐시도미터가 영상의 농도를 읽는데 사용되고, 선분산함수인, 데이터의 프로파일(profile)을 만든다.

점분산함수에 대한 선분산함수의 단점은 일반성을 상실하고 있다는 점이다. 비대칭적 점분산함수를 가진 검출기 시스템은 검출기 시스템과 스텔트구경과의 각도에 좌우되는 다른 선분산함수를 가지게 된다. 투영 영상에서 이러한 일반성 상실은 수직 및 수평방향에서 선분산함수를 측정함으로써 알 수 있다. 이들 분산함수와 CT 재구성간의 유사성을 주목하면 재미있다. 점분산함수가 피사체라면 선분산함수는 그 피사체의 한 투영에 불과하다. 만일 많은 선분산함수가 180도 부근에서 측정된다면, CT 재구성법 (예컨데 여과 역투영법) 이 점분산함수를 재구성하는데 사용될 수 있다. 만일 피사체가 대칭적이라면, 한번의 투영으로 PSF를 재구성할 수 있다.

3.3 점분산함수와 선분산함수의 관계

점분산함수의 절단면이 선분산함수가 아니라는 점을 명심할 필요가 있다. 선분산함수를 얻는데 사용하는 슬릿 구경은 점구경 노출의 길다란 선으로 생각될 수 있다. 그 결과 선분산함수는 수많은 점응답 (point response)이 개별적으로 기여한 합계이다. 이것은 그림 8에서 볼 수 있다.

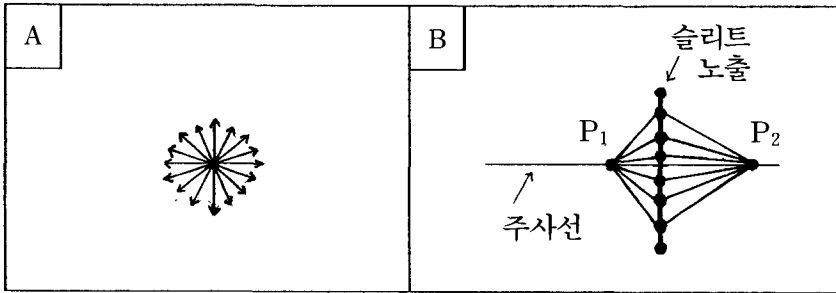


Fig 8. (A)점노출은 최초의 검출사상 (event)으로부터 사방으로 에너지가 퍼지게 한다. (B)에서 슬릿 노출은 점노출의 수직선으로 간주된다. P1에서 선분산함수 프로파일의 높이는 노출된 슬릿를 따라 모든 점노출로부터 기여된 양의 합이다. 측정지점과 (즉, P1과 P2) 점 노출사이의 거리는 위치에 따라 변하고 이거리는 (그리고 비대칭 점분산함수에 대한 각도) 각 점에 의해 기여된 에너지에 양에 영향을 미칠 것이다.

선분산함수와 점분산함수간의 수학적 관계는 다음과 같이 주어진다.

$$LSF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} PSF(x,y)dy \dots\dots\dots (4)$$

그 역관계식은 다음과 같다.

$$PSF(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^{\infty} \frac{LSF(x)rdx}{x \sqrt{x^2-r^2}} \dots\dots\dots (5)$$

방정식 (5)는 대칭 점분산함수로 간주되고, 점분산함수는 한 개의 선분산함수 샘플로부터 구할 수 없다. 방정식 (4)와 (5)는 Abel변환 쌍이다. 선분산함수는 수많은 점분산함수의 기여로 얻어지기 때문에 점분산함수 보다 항상 더 넓다.

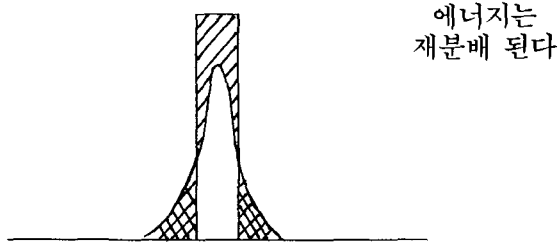


Fig 9. 흐림 현상의 결과로 일어나는 빛에너지의 분산을 보여주는 그림. 직사각형 영역이 노출 프로파일이다. 빛은 직사각형 영역을 새어나와 바로 인근 비노출 영역을 노출시킬 뿐만아니라, 직사각형 영역의 노출량을 감소시킬 것이다.

4. 주파수영역

시간영역함수 $w(t)$ 는 어떤 매개변수 (예컨대, 전압, 광 플르언스등)를 시간함수로 나타낸다. 만일 매개변수가 성질상 주기적이라면, 다른 방법 즉, 주파수 영역으로 완전히 설명할 수 있다. 주파수 영역의 기본요소는 싸인파이고 싸인파는 주파수, 위상, 그리고 크기로 설명될 수 있다. 많은 수(무한수열)의 싸인파 (여러가지 주파수, 위상 및 크기의)는 파형 $w(t)$ 를 거의 완벽하게 생성하기 위하여 합성된다. 푸리에 변환과 역 푸리에 변환(FT^{-1})은 시간영역과 주파수영역을 치환하는 수학적 연산이다. 파형 $w(t)$ 의 FT 계산결과는 $w(t)$ 를 만드는데 필요한 싸인파형의 정밀한 주파수, 위상 및 크기를 보여준다. 이 상황의 그림 10에서 설명된다.

그림 10은 싸인파의 간단한 조합을 설명하고 있다. 실제로 파형은 매우 복잡하다. 그럼에도 불구하고 복합 파형은 푸리에(Fourier)변환을 사용해서 주파수 성분으로 분해될 수 있다. 시간 영역 파형 $w(t)$ 의 푸리에 변환은 주파수 영역 함수 $w(f)$ 가 된다. FT는 다음과 같이 정의된다.

$$W(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(t)e^{-2\pi ift} dt \dots \dots \dots (6)$$

주파수영역 데이터는 역 푸리에 변환을 사용해서 시간영역으로 변환 회복될 수 있다.

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(f)e^{+2\pi ift} df \dots \dots \dots (7)$$

함수 $W(t)$ 와 $W(f)$ 는 합성함수이고, 따라서 실수성분과 허수성분을 포함하고 있다. 예컨대, $W(f) = R(f) + iI(f)$. 진폭의 크기는 $W(f)$ 의 모듈러스이다:

$$M(f) = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)} \dots \dots \dots (8)$$

위상은 다음과 같이 주어진다.

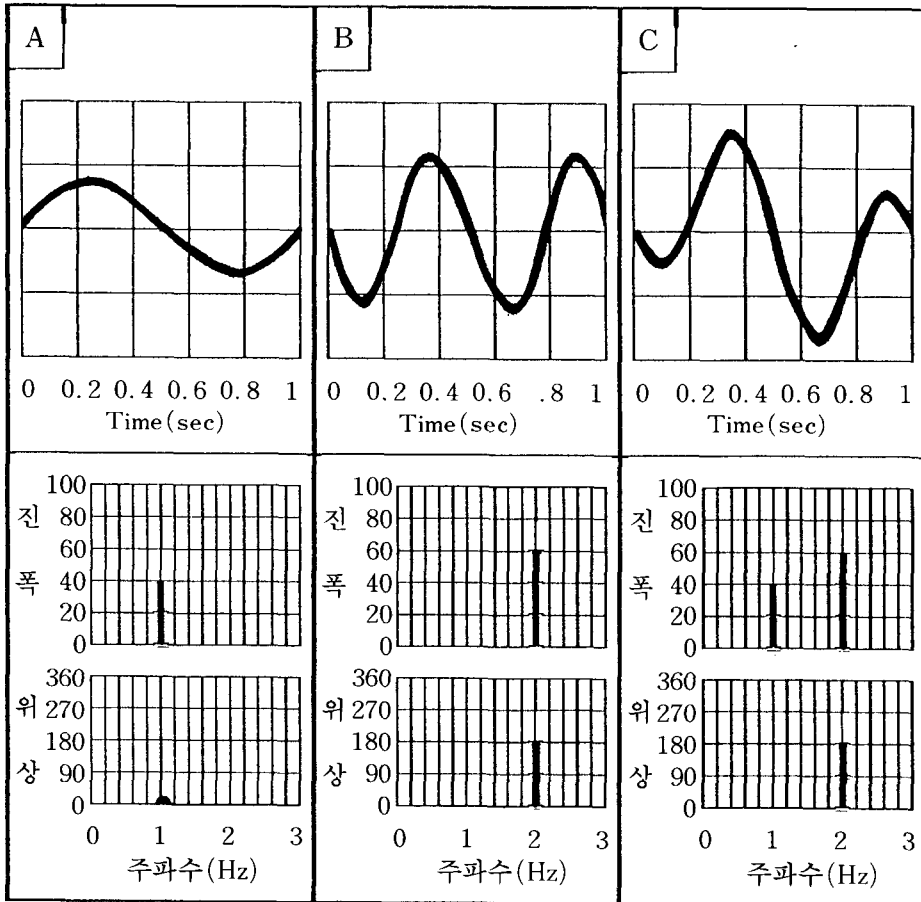


Fig 10. 세개 칸 각각의 위쪽 그림은 시간영역 파형 $w(t)$ 을 설명한다. 각 칸의 아래쪽에 있는 두쌍의 그림은 주파수영역의 정보를 설명한다: 특히, 해당 시간영역 파형, $w(t)$ 에 대한 각주파수에서의 진폭과 각주파수에서의 위상을 설명하고 있다. (A)에서 $W_a(t)$ 는 위상의 이동이 없는 1Hz의 싸인파이다. $w(t)$ 를 푸리에 변환하면 진폭크기 40(임의의 단위)을 가진 1.0Hz의 한개의 주파수를 나타낸다. 위상대 주파수 그래프는 1Hz에서의 위상이 영(0)임을 보여주고 있다. (B)에서는 2.0Hz의 주파수와 180도 위상을 가진 한개의 싸인파를 보여주고 있다. 주파수영역정보는 이 파라미터들을 설명하며, 진폭의 크기가 60 (임의의 단위)임을 보여주고 있다. (C)에서 $W_c(t)$ 는 A와 B에서 보여준 두파형의 합계이다(즉, $W_c(t)=W_a(t)+W_b(t)$). 주파수영역정보는 $W_c(t)$ 를 만드는 구성분의 싸인파형의 파라미터를 보여준다.

$$\phi(f) = \text{TAN}^{-1} \frac{I(f)}{R(f)} \dots\dots\dots (9)$$

4.1 공간 주파수

위의 주파수영역 설명에 의하면 그 x축이 시간단위인 시간영역 함수 $W(t)$ 로 간주된다. $W(t)$ 의 FT인 $W(F)$ 는 그의 x축이 초의 역수(sec^{-1}), 또는 Hz인 주파수 영역이다. 이것이 물리학 및 공학의 여러분야에서 사용되는 주파수의 고전적 표현이다. 그러나 흉부촬영과 같이 2차원 영상을 취급하는데 있어서는 시간 영역은 그다지 많이 이용되지 않는다. 흉부사진의 농도에 대한 수평주사는 시간단위가 아닌, 거리단위의 횡좌표를 가진다. 그 결과 영상광학의 주파수영역은

역 mm단위로 표시되는 공간주파수이다. 그러므로 매초당 사이클의 주파수를 가진 싸이파를 취급하는 대신에 영상은 매 mm당 사이클로 측정된 주파수를 가진 여러개의 싸인파로 분해될 수 있다.

처음에 공간주파수의 개념은 싸구려가 될 수 있지만, 이것은 영상 시스템의 해상력 특성을 논할 때는 매우 유용하다. 더 나아가, 위에서 주어진 방정식은 시간 대신에 완전히 적용되고, 시간주파수 대신에 공간주파수에 적용된다.

4.2 모듈변환함수(Modulation Transfer Function)

공간주파수와 푸리에 변환을 이해하면, 주파수영역에서 적용된 분산함수 분석의 이용을 보여

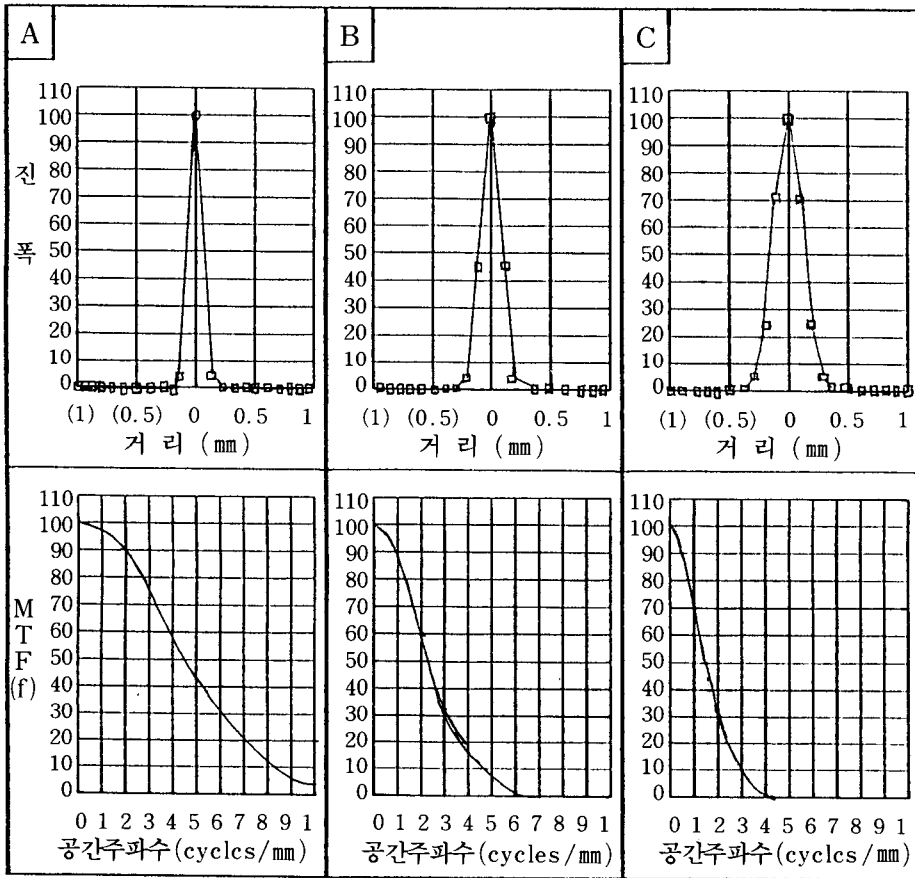


Fig 11. 세가지 경우의 선분산함수와 그에 해당하는 MTF. (A)에서 선분산함수는 좁고 MTF는 높은 공간 주파수쪽으로 뻗어나간다. (C)에서 선분산함수는 보다 넓어지고, 보다 심한 흐림함수를 나타내고 있으며, MTF는 보다 높은 공간주파수를 가진 곳에서 퇴화를 보여주고 있다. (B)는 중간 경우를 보여주고 있다. 이들 함수는 모두 가우시안이고 (가우시안을 FT하면 폭이 다른 가우시안이 된다.), 만일 선분산함수가 델타-함수였다면 MTF는 모든 공간주파수에서 100%일 것이다. 델타-함수는 전혀 흐림을 일으키지 아니하고, 그 결과 완벽한 해상력이 예측된다. 100% MTF는 모든 공간주파수가 콘트라스트 감소가 전혀없이 모두 분별된다는 것을 의미한다. 다른 극단적인 경우, 만일 선분산함수가 완전 흐림을 나타내는 수평선을 보였다면 MTF는 DC, 즉 0 주파수를 제외한 모든 주파수에서 전혀 해상능력이 전혀 없음을 나타내는 델타 함수일 것이다.

주는 것이 가능하다. 앞에서 논한 것처럼 슬리트노출부터 선분산함수 LSF(x)의 FT를 측정했다고 가정하자. 선분산함수 (LSF)의 FT의 모듈리스를 모듈전달함수 (MFT)라고 한다.

$$MTF(f) = | FT [LSF(x)] | \dots\dots\dots(10)$$

MFT는 영상시스템의 해상능의 주파수 x주파수이다.

MFT의 이용이 그림 11에서 설명되고 있다.

선분산함수그림은 관찰자에게 시스템의 해상력 특성에 대하여 정성적 인상을 주는 반면, MTF는 정량적 해상력 측정을 가능하게 한다. 그러므로 MTF는 서로 다른 영상장치를 비교할 때 중요한 명세서가 된다. MTF의 최대 장점은 영상 시스템의 내부부품의 MTF가 계속 연결되어 있을 때이다. 개별 내부부품의 점분산함수로 부터 시스템의 점분산함수를 계산하려면 여러단계의 컨볼루션이 필요한 한편, MTF의 계속 연결은 주파수 하나하나에 대하여 곱셈을 요한다.

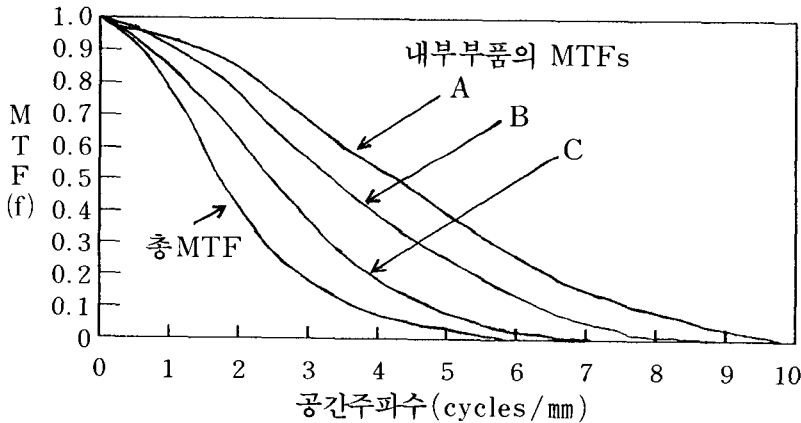


Fig 12. 영상사출에서 3개의 부품 A,B,C의 MTF. 부품 C는 가장 빈약한 해상력 특성을 가졌음을 쉽게 알 수 있다. 시스템의 MTF는 각 주파수 간격에서 그 주파수에 해당하는 3가지 부품의 MTF의 곱으로 계산된다.

MTF는 영상 시스템의 해상력 특성에 대해 필요한 설명을 제공하는 최종단계의 분석이다. 그러나 주파수 영역은 다음에 설명할 그 이상의 영상처리를 위해 사용될 수 있다.

4.3 컨볼루션 이론

컨볼루션은 주파수 영역에서 수행된다. f(x)는 분산함수 h(x)와 컨볼브되어 출력함수 g(x)를 얻는 1-D 출력함수라고 하자. 공간주파수영역에서 이것은 다음과 같이 수행한다.

$$g(X) = h(X) * f(X) \dots\dots\dots(11)$$

컨볼루션이론은 g(X)의 푸리에 변환을 단순히 곱하므로써 얻을 수 있다는 것을 말하고 있다. 즉, G(f) = F(f)H(f). 함수 g(x)는 G(f)에 역 푸리에 변환을 해서 회복시킬 수 있다.

$$g(X) = FT^{-1}\{F(f)H(f)\} \dots\dots\dots(12)$$

계측된 함수 $g(x)$ 로부터 분산함수 $h(x)$ 의 효과를 역 컨볼루션하기 위하여 곱셈대신에 주파수영역 나눗셈이 사용된다:

$$f(X) = FT^{-1} \frac{G(f)}{H(f)} \dots \dots \dots (13)$$

원리적으로, 디컨볼루션은 $h(x)$ 를 알고 있다고 가정하고, 계측함수 $g(x)$ 로부터 입력함수 $f(x)$ 를 회복시키는데 사용할 수 있다. 방정식 (12)과 (13)은 컨볼루션이론을 설명하고 있다. 사실 앞에서 논한 바와같이, 이 이론은 곱셈을 사용해 MTF가 맞물려 들어가게하는 것이다. 전체 시스템의 점분산함수는 시스템 MTF의 역 FT를 계산함으로써 구할수 있다.

컨볼루션이론은 영상과학자로 하여금 공간영역과 주파수영역사이를 왔다갔다하면서, 가장 효율적 영역 또는 문제가 가장 잘 개념화되는 곳에서 계산할 수 있게한다. 또한 컨볼루션이론은 실제적 장점들을 가지고 있다.

컨볼루션 (또는 디컨볼루션)은 알고 있는 분산함수의 영향을 바로잡기 위하여, 또한 영상의 특정한 주요부분을 어느정도까지 임의적으로 강조하기 위하여 디지털 영상에서 사용될 수 있다. 대부분의 분산함수는 영상내 화소의 물리적 크기에 비해 비교적 짧은 영역을 가지고 있기 때문에 컨볼루션 커널의 크기는 작을 수 있다. 즉 3×3 , 또는 5×5 가 될수 있다. 작은 커널은 대부분의 여과(filtering)목적에 보통 적당하다. 컨볼루션을 하는데 필요한 컴퓨터 계산시간은 커널의 면적의 크기와 함께 선형적으로 커진다. 그 결과 5×5 커널은 3×3 커널이 필요한 시간의 25/9배가 걸린다. PC(486)을 사용하여 512×512 영상에 대해 3×3 컨볼루션을 하는데는 약 3초 걸린다. 그러나 상황이 커다란 컨볼루션 (예컨데 영역이 넓은 점분산함수)을 요한다면, 컴퓨터계산시간은 매우 길어진다. 51×51 커널은 15분, 127×127 커널은 1.5시간이 걸린다. 더 커다란 컨볼루션 커널에 있어서는 신속한 컴퓨터계산을 위해 만든 FT 루틴을 사용하여 주파수 영역에서 연산을 하는 것이 보다 효율적이다. X-선 및 빛의 산란 때문에 그 영역이 넓은 분산함수가 방사선과에 실재하고 있다.

5. 맺는말

이 논문의 목적은 영상진단분야에서 일하고 방사선전문의로 하여금 영상의 화질의 분석과 특성조사에 필요한 기본적인 수학적 원리의 이해를 돕는데 있다. 물론 의학물리학과 깊이 관련된 전반적인 수식설명은 피하려고 애썼다. 본 논문의 초점은 일반적인 개념, 특히 공간해상력에 관한 설명에 맞추었다. 영상뒤에 숨어있는 기본 원리가 영상의 이해와 영상판독에 도움이 된다면 논문의 의도는 달성했다고 볼것이다.

References

1. J.C. Dainty and R. Shaw: Image Science, Academic Press, New York, 1974
2. H.H. Barrett and W. Swindell: Radiological Imaging, Vol. I & II, Academic Press, New York, 1981

3. A. Macovski: Medical Imaging Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983
4. O. Nalcioglu, W.W. Roeck and J.A. Siebert, et al: Quantitative aspects of image intensifier-television-based digital x-ray imaging, in Digital Radiography: Selected Topics, Ed. by J.G. Kereiakes, S.R. Thomas and C.G. Orton, Polonium Press, New York, 1986
5. A. Rosenfeld and A.C. Kak: Digital Picture Processing, Vol. I, Academic Press, New York, 1982
6. A. Papoulis: Signal Analysis, McGraw-Hill, New York, 1977
7. J.M. Boone: X-ray Imaging Concepts: Mathematics and Modeling, AAPM Summer School, 1991

Mathematical Analysis of Imaging Conception

Il Young ,Park

Dept. of Radiology

Shinhung Technical College

Lots of physical phenomena which deteriorate the faithfulness of radiological images exist. The most common types of degradation are a loss of resolution and an increase in noise. This article deals with resolution, factors that influence it, and its characterisation. The problem of resolution failure due to a generic blurring phenomenon is described diagrammatically and mathematically, for both one dimensional and two dimensional signals. The definition of the point spread function, the line spread function, the convolution integral and the modulation transfer function are made. The concept of frequency domain operations using the Fourier Transform is also discussed.