

吹送流의 解析解와 $(x-\sigma)$ 數值模型과의 比較 Comparison of an Analytic Solution of Wind-driven Current and an $(x-\sigma)$ Numerical Model

李鍾贊*·崔秉昊**

Jong Chan Lee* and Byung Ho Choi**

要 旨: 1次元 閉鎖形 水路에서 바람에 의해 發生되는 흐름에 대해 水面勾配와 流速의 垂直構造를 提示하는 解析解를 定常狀態 下에서 誘導하였다. 解析解는 底面의 境界條件으로 底面摩擦應力 τ_b 를 賦與하는 假定下에 誘導되었으며, 鉛直 運動量 擴散係數 κ_M 이 水深에 無關한 常數, 水深의 1次函數 및 2次函數일 境遇를 包含하며, 底面流速이 no-slip이라는 假定과 底面摩擦應力 τ_b 의 媒介化에 따른 關係를 提示하고 있다. 모드 分離된, σ 좌표를 採擇한 $(x-\sigma)$ 數值模型 結果와 誘導된 解析解를 比較·檢討하였다. 比較된 境遇는 κ_M 이 常數, 水深의 1次 및 2次函數인 境遇로써, κ_M 이 常數일 境遇는 均一 水深, 緩慢한 水深傾斜 및 比較的 急激한 水深傾斜를 갖는 境遇에 대해 水面勾配와 流速構造를 檢討 하였다. κ_M 이 水深의 1次 및 2次函數인 境遇에는 τ_b 의 變化에 대한 流速構造를 比較·分析하였다. 比較·分析 結果 流速構造는 κ_M 의 값 뿐만 아니라 κ_M 의 形態에 의해서도 변하며, τ_b 의 값에 의해서도 변하는 것을 보이고 있으며, 計算結果는 全般的으로 解析解와 一致함을 보였다.

Abstract □ Analytic solutions for the gradient of surface elevation and vertical profiles of velocity driven by the wind stress in the one-dimensional rectangular basin were obtained under the assumption of steady-state. The approach treats the bottom frictional stress τ_b as known and includes vertically varying eddy viscosity κ_M , which is constant, linear and quadratic of water depth. When the τ_b is parameterized with surface stress, depth averaged velocity and bottom velocity, the result shows the relation of the no-slip bottom velocity condition and the bottom frictional stress τ_b . The results of a mode splitted, $(x-\sigma)$ coordinate, numerical model were compared with the derived analytic solutions. The comparison was made for the case such that κ_M is the constant, linear and quadratic function of water depth. In the case of constant κ_M , the gradient of surface elevation and vertical profiles of velocity are discussed for a uniform depth, a mild slope and a relatively steep slope. When κ_M is a linear and quadratic function of water depth, the vertical structures of velocities are discussed for various τ_b . The result of the comparison shows that the vertical structure of velocities depends not only on the value of κ_M but also on the profile of κ_M and bottom stress τ_b . Model results were in a good agreement with the analytic solutions considered in this study.

1. 緒 論

淺水方程式을 解析하기 위한 여러가지 數值技法이 適用되고 있으며, 이러한 模型의 有用성은 現場 觀測值와 計算된 變數와의 比較에 의해 이루어지고 있다. 그러나 이러한 接近 方法은 여러 複雜한 外力에 의한 複合現象을 觀測한 觀測值의 時·空間的 分解能

不足, 不適切한 觀測值의 使用 및 數值模型 自體의 誤差(truncation error) 등에 대한 制約이 있기 때문에, 이러한 比較方法은 數值模型의 舉動을 把握하기에는 어려움이 있다.

이에 비해 解析解는 現象 自體를 簡略化하여, 實際 問題에 適用하기 困難하거나, 水深, 地形 등의 影響을 考慮하기 어려운 短點이 있다. 그럼에도 불구하고

*韓國海洋研究所 海洋環境工學室 (Ocean Environmental Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

**成均館大學校 土木工學科 (Department of Civil Engineering, Sung Kyun Kwan University, Suwon Campus, Suwon, Korea)

特定 外力에 대한 反應 現象 糾明을 위해서는 解析解와 數值模型의 結果를 比較하는 것은 數值模型의 有用성을 證明하는 有力한 方法이다.

지금까지 많은 研究에서 數值模型의 有用성은 주로 現場觀測資料를 利用해 比較檢證되었으며, 解析解와의 比較는 比較的 흔하지 않았다. 潮汐 長波의 境遇 單純化된 地形에 대한 解析解의 誘導는 可能하였으나, 바람의 境遇 海水 流動에 대한 解析解와의 比較는 널리 使用되지 않았다. 다만 Cooper and Pearson (1977)의 境遇, 均一한 鉛直 運動量 擴散係數 κ_M 과 底面流速을 no-slip 條件으로 하여 한쪽 끝이 막힌 1次元 閉鎖形 水路에서의 定常狀態 下的 水面勾配와 流速의 垂直構造를 求하였다.

따라서 本 研究에서는 비록 많은 假定을 使用하여 方程式 自體를 實際 問題에 適用하기 어려울 수 있으나 數值模型과 比較·檢證하기에는 充分한 1次元 閉鎖形 水路에서의 바람에 의한 海水流動의 解析解를 誘導하였다. 誘導된 解析解는 바람에 의한 定常狀態 下的 水面勾配와 流速의 垂直構造를 提示하는 것으로, 底面의 境界條件을 底面摩擦應力 τ_b 로 줌으로써, 底面流速을 no-slip이라는 假定下에 求한 解析解보다 多樣한 境遇의 解를 提示하고 있다. 考慮된 境遇는 鉛直 運動量 擴散係數 κ_M 이 水深에 無關한 常數, 水深의 1次函數 및 2次函數로 假定하였을 때의 水深別 流速構造를 나타내며, 底面摩擦應力 τ_b 를 바람 應力 τ_w , 水深平均된 流速 u 와 底面流速 u_b 로 媒介化하여 使用하였다.

淺水方程式을 이용한 水深平均 2次元 模型은 매우 유용하게 使用되고 있다. 本 研究에서는 淺水方程式을 利用하여 垂直的인 變化를 無視한 external mode 와 垂直的인 變化를 考慮하는 internal mode 로 모드 分離된 (x-z) 또는 (x-σ) 數值模型을 開發하여 前述한 解析解와 比較·檢討하였다.

開發된 模型은 σ 座標를 採擇하였으며, 變換된 σ 座標系에서의 模型 結果를 檢討하기 위하여 水深이 一定한 境遇, 水深이 緩慢히 變하는 境遇 및 比較的 急激히 變하는 境遇를 數值實驗하였다. 또한 數值模型의 有用성을 檢證하기 위하여 鉛直 運動量 擴散係數 κ_M 의 變化와 底面摩擦應力 τ_b 의 變化에 따른 數值實驗의 結果를 前述한 解析解와 比較·檢討하였다.

2. 基本 方程式 및 境界條件

2.1 基本 方程式

座標軸으로 x, y, z를 使用하는 直交座標系(Cartesian coordinate system)下에서 -x, y는 水平軸이며 z는 平均 海水面으로부터 위가 陽인 鉛直軸-海水 流動을 나타내는 基本 方程式을 記述하면 다음과 같다.

非壓縮性 流體(海水)의 質量 保存을 나타내는 連續 方程式은

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

x, y方向의 運動 方程式은 各各式 (2), 式 (3)이며,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_M \frac{\partial u}{\partial z} \right) + F_x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu \\ = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\kappa_M \frac{\partial v}{\partial z} \right) + F_y \end{aligned} \quad (3)$$

이 運動方程式은 時間에 따라 變하는 亂流에 對한 Navier-Stokes 式을 時間 平均한 Reynolds 式이다. 여기에는 密度差에 重力 加速度가 補해지지 않았을 境遇의 密度差는 無視할 수 있다는 Boussinesq Approximation과 渦 粘性 係數(eddy viscosity coefficient)의 概念이 使用되었다. 여기서 ρ_0 는 基準 密度(reference density), κ_M 은 運動量의 鉛直 渦 擴散係數, f는 地球 偏向力 係數(Coriolis coefficient)이다.

z方向의 運動方程式은 靜水壓(hydrostatic pressure) 假定下에 다음과 같다.

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

水深 z에서의 壓力은 式 (4)를 z부터 海水面 ζ까지 積分함으로써 얻을 수 있으며, 여기서 P_{atm} 은 大氣壓으로 常數로 假定하였다.

$$p(x, y, z, t) = P_{atm} + \rho_0 g \zeta + g \int_z^0 \rho(x, y, z, t) dz \quad (5)$$

模型 格子로는 直接的으로 分解할 수 없는 small-scale process에 의해 惹起되는 運動들을 水平 渦 擴散係數(horizontal eddy viscosity)로 媒介化하면

다음과 같다.

$$F_x = A_H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6a)$$

$$F_y = A_H \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6b)$$

여기서 A_H 는 水平渦粘性係數(horizontal eddy viscosity coefficient)로서, 常數로 假定하였다. 이들 項은 smoothing 效果를 나타내며, Davies(1987) 등은 F_x , F_y 를 無視하기도 한다. 또한 運動量의 鉛直方向 亂流擴散은 鉛直渦擴散係數 κ_M 을 導入하여 closure하였다.

2.2 境界條件

위의 基本方程式을 풀기 위해서는 適切한 境界條件이 必要하다. 一般적으로 考慮될 境界條件으로는 側面($x-y$ 平面)의 閉境界와 開放境界, 海水面에서의 運動學的 條件 및 海底에서의 no-flux 境界條件이 있다($x-z$ 平面).

海水面(free surface), $z = \zeta(x, y, t)$ 에서의 境界條件은 다음과 같다.

$$\rho_0 \kappa_M \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\tau_w^x, \tau_w^y) \quad (7a)$$

$$w_s = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (7b)$$

여기서 τ_w^x , τ_w^y 는 바람에 의한 應力(wind stress)이다. 海底面(Bottom), $z = -h(x, y)$ 에서의 境界條件은

$$\rho_0 \kappa_M \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) = (\tau_b^x, \tau_b^y) \quad (8a)$$

$$w_b = -u_b \frac{\partial h}{\partial x} - v_b \frac{\partial h}{\partial y} \quad (8b)$$

$$(\tau_b^x, \tau_b^y) = \rho_0 c_f \sqrt{u_b^2 + v_b^2} (u_b, v_b) \quad (8c)$$

여기서 τ_b^x , τ_b^y 는 底面 摩擦應力(bottom frictional stress), c_f 는 底面 摩擦係數, u_b , v_b 는 底面 近處의 流速이다.

($x-y$) 平面上的 閉境界에는 法線 流速(normal velocity)이 0인 閉境界條件이 使用되며, ($x-y$) 平面上的 開放境界에는 水位의 값이 直接 주어지는 Dirichlet

開放境界條件과 流速이 주어지는 Neumann(flux) 開放境界條件이 使用된다. 여기서는 閉境界와 關聯된 問題만을 다루었으며, 開放境界의 處理와 關聯된 問題는 다루지 않았다.

3. 鉛直變換 座標系下的 基本方程式

一般적으로 基本方程式, 式(1)-(4)를 풀기 위한 領域은 매우 不規則的이며, x, y, z 基本座標系로 水深의 不規則性을 再現하기에는 短點이 있다. x, y, z 座標系에서의 3次元 模型을 適用해 본 經驗에 의하면, 水深의 step화에 따른 移流項의 處理 등에 어려움이 있었다(金昌式 等, 1989a, b). 特히 海面부터 底面까지의 流速 等의 鉛直分布를 나타내기 위해서는(x, y, z, t) 座標系로부터 (x^*, y^*, σ, t^*) 座標系로 變換하는 것이 便利하다. 即 $-h < z < \zeta$ 空間을 一定한 區間 $-\alpha < \sigma < b$ 로 變換하는 σ 變換, $\sigma = (a+b) \frac{z-\zeta}{h+\zeta} + b$ 를 導入하면 水深의 非均一性을 어느 程度 解消할 수 있다. 여기서는 $a=1, b=0$ 을 使用하였으며, (z, y, z, t)와 (x^*, y^*, σ, t^*) 座標系에서의 導函數 關係는 chain rule을 適用하면 얻을 수 있다.

$$x^* = x, y^* = y, \sigma = \frac{z-\zeta}{h+\zeta}, t^* = t \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^*} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial x^*} + \frac{1}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial x^*} \right) \quad (10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y^*} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial y^*} + \frac{1}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial y^*} \right) \quad (10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (10c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial t^*} + \frac{1}{H} \frac{\partial \zeta}{\partial t^*} \right) \quad (10d)$$

여기서 h 는 靜水面下 水深, $H = h + \zeta$ 는 總水深이다.

σ 座標系에서의 鉛直流速 ω 는 式(11)과 같이 定義되며, 海面의 運動學的 境界條件과 海底의 境界條件은 各各式(12a), 式(12b)와 같이 簡略化된다.

$$\omega = w - u \left(\sigma \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - v \left(\sigma \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - \left(\sigma \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \quad (11)$$

$$\omega(x^*, y^*, 0, t^*)=0 \quad (12a)$$

$$\omega(x^*, y^*, -1, t^*)=0 \quad (12b)$$

水深積分된 流速과 水深의 函數인 流速과의 關係는 式 (13)과 같다.

$$(\bar{u}, \bar{v}) \equiv \int_{-1}^0 (u, v) d\sigma, \quad u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v' \quad (13)$$

따라서 式 (1)-(4)를 σ 座標系로 變換하면 다음과 같게 된다. 여기서는 數式的 簡略化를 위해 모든 變號는 省略하였다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \sigma} = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\omega}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - fv \\ = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\kappa_M}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] \\ - \frac{gH}{\rho_0} \int_{\sigma}^0 \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \sigma \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] d\sigma + \bar{F}_x \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\omega}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + fu \\ = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\kappa_M}{H} \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right] \\ - \frac{gH}{\rho_0} \int_{\sigma}^0 \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \sigma \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] d\sigma + \bar{F}_y \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial H\bar{v}}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f\bar{v} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y} - \bar{F}_x = \phi_{x1} + \phi_{x2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - f\bar{u} + g \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x} - \bar{F}_y = \phi_{y1} + \phi_{y2} \quad (19)$$

$$\phi_{x1} = \frac{\tau_w^x - \tau_b^x}{H} - u' \frac{\partial u'}{\partial x} - v' \frac{\partial u'}{\partial y} \quad (20a)$$

$$\phi_{x2} = - \frac{gH}{\rho_0} \int_{-1}^0 \int_{\sigma}^0 \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \sigma \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] d\sigma d\sigma \quad (20b)$$

$$\phi_{y1} = \frac{\tau_w^y - \tau_b^y}{H} - u' \frac{\partial v'}{\partial x} - v' \frac{\partial v'}{\partial y} \quad (20c)$$

$$\phi_{y2} = - \frac{gH}{\rho_0} \int_{-1}^0 \int_{\sigma}^0 \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \sigma \frac{1}{H} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \right] d\sigma d\sigma \quad (20d)$$

여기서 $\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{F}_x, \bar{F}_y$ 는 σ 變換을 하지 않고 式 (6)과 같은 形態를 그대로 使用하였다.

4. 解析解

바람 應力에 의한 動水力學的 方程式의 解析解로는 Ekman(1095), Cooper and Pearson(1977), Lynch and Gray(1978), Roed and Pearson(1987)의 解가 있다. 어느 境遇나 定常 狀態 (steady-state)를 考慮하며 移流項은 無視한다.

Lynch and Gray(1978)와 Roed and Pearson(1987)의 解析解는 水深積分된 2次元의 境遇로써, 流速의 垂直構造가 무시되었기 때문에 여기서는 이들의 解析解는 考慮하지 않기로 한다.

Ekman의 解는 水深이 無限이 깊고 鉛直 運動量 擴散係數 κ_M 이 水深에 無關한 常數일 境遇, 偏向力項과 流速의 垂直 擴散項과의 均衡으로부터 求한 解로 表層 流速은 바람 方向과는 北半球에서는 45° 오른 쪽으로 偏向된다는 것을 보이고 있다.

Cooper and Pearson(1977)는 Coriolis項을 無視한 양쪽 끝이 막힌 1次元 閉鎖形 水路의 境遇, 底面流速을 no-slip 條件으로 하여 水面 勾配項과 流速의 垂直擴散項과의 均衡으로부터 海面勾配와 流速의 垂直構造를 求했으며, κ_M 은 常數로 假定하였다.

여기서는 Cooper and Pearson(1977)이 使用한 方程式으로부터 底面流速이 no-slip이라는 假定 대신 底面 摩擦 應力 τ_b 를 既知 값으로 하였을 境遇의 解析解를 提示하기로 한다.

問題를 다시 整理하면, x方向의 양쪽은 막혔으며, y方向의 모든 變化率은 0이며, Coriolis項과 移流項 및 水平 運動量 擴散項을 無視하고, 定常狀態를 假定하면 x方向의 運動方程式과 連續方程式 및 境界條件 들은 다음과 같다.

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa_M \frac{\partial u}{\partial z} \right] = 0 \quad (21)$$

$$\int_{-h}^0 u dz = 0 \quad (22)$$

$$\kappa_M \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_0 = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad \kappa_M \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_h = \frac{\tau_b}{\rho} \quad (23a,b)$$

4.1 κ_M 이 수중에 無關係 境遇 ($\kappa_M = \text{常數}$)

이 境遇의 流速 $u(z)$ 는 z 의 2次函數로 過程을 記述하면 다음과 같다. 式 (21)을 z 에 대해 한번 積分한 後 $z=0$ 과 $z=-h$ 의 境界條件으로부터 水面勾配項과 積分常數를 求하면 式 (24)와 같다. 다시 式 (24)을 積分하면 하나의 積分常數가 생기며, 式 (22)에 代入하여 積分常數를 求한다. 計算된 結果式은 式 (25), 式 (26)과 같다.

$$\kappa_M \frac{\partial u}{\partial z} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} z + c = \frac{\tau_w - \tau_b}{\rho H} z + \frac{\tau_w}{\rho} \quad (24)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\tau_w - \tau_b}{\rho g H} \quad (25)$$

$$u(z) = \frac{1}{\rho \kappa_M} \left[\frac{\tau_w - \tau_b}{2H} z^2 + \tau_w z + \frac{2\tau_w + \tau_b}{6} H \right] \quad (26)$$

式 (21)-(23)을 前述한 σ 座標系로 變換하면 다음과 같다.

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\kappa_M}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad (27)$$

$$\int_{-1}^0 u d\sigma = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\kappa_M}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad \frac{\kappa_M}{H} \frac{\partial u}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=-1} = \frac{\tau_b}{\rho} \quad (29a,b)$$

위와 같은 方法으로 σ 座標系에서의 解를 求하면

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\tau_w - \tau_b}{\rho g H} \quad (30)$$

$$u(\sigma) = \frac{H}{\rho \kappa_M} \left[\frac{\tau_w - \tau_b}{2} \sigma^2 + \tau_w \sigma + \frac{2\tau_w + \tau_b}{6} \right] \quad (31)$$

式 (31)은 式 (26)의 右邊의 z/H 를 σ 로 置換한 結果와 一致한다. 여기서 ζ 는 h 에 비해 相當히 작기 때문에 $H = h + \zeta$ 는 近似的으로 h 이다.

以後의 計算은 모두 σ 座標를 使用하여 나타내기로 한다. 計算된 流速 $u(\sigma)$ 로부터 no-slip 條件 $u(-1) = 0$ 을 滿足시키는 τ_b 를 求하면 $\tau_b = -0.5\tau_w$ 인 境遇로, 이 結果는 Cooper and Pearson(1977)의 底面流速을 no-slip 條件으로부터 求한 解와 一致한다.

4.2 κ_M 이 수深的 1次 函數일 境遇 ($\kappa_M = a\sigma + b$)

4.1과 같은 方法으로 水面勾配, 流速 및 no-slip 條件을 滿足하는 τ_b 를 求하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\tau_w - \tau_b}{\rho g H} \quad (32)$$

$$u(\sigma) = H \left[\frac{\tau_w - \tau_b}{\rho a} \sigma + C_1 \ln(a\sigma + b) + C_2 \right] \quad (33)$$

$$\tau_b = \frac{a + 2(b-a) \left(\frac{b}{a} \ln \frac{b-a}{b} + 1 \right)}{a + 2b \left(\frac{b}{a} \ln \frac{b-a}{b} + 1 \right)} \tau_w \quad (34)$$

여기서

$$C_1 = \frac{(a-b)\tau_w + b\tau_b}{\rho a^2} \quad (35a)$$

$$C_2 = -C_1 \left[\frac{b}{a} \ln b + \frac{(a-b)}{a} \ln(-a+b) - 1 \right] + \frac{\tau_w - \tau_b}{2\rho a} \quad (35b)$$

式 (30)과 式 (32)에서 알 수 있는 바와 같이 水面勾配는 바람 應力, 底面摩擦應力 및 수深的 函數로, κ_M 의 垂直 構造와는 無關係를 나타내고 있으며, 이는 바람에 의한 水深積分된 2次元 長波(暴風海溢)의 海面上昇을 나타내는 式과 같음을 알 수 있다.

4.3 κ_M 이 수深的 2次 函數일 境遇 ($\kappa_M = a\sigma^2 + b\sigma + c$)

이 境遇는 κ_M 의 構造에 따라 서로 다른 形態의 流速構造를 보이며, 前述한 바와 같이 水面勾配는 κ_M 의 構造와는 無關係하다.

a) $D = b^2 - 4ac > 0$ 인 境遇

$$u(\sigma) = H \left(\frac{\tau_w - \tau_b}{2\rho a} \ln(a\sigma^2 + b\sigma + c) - E_1 \ln \left| \frac{2a\sigma + b - \sqrt{D}}{2a\sigma + b + \sqrt{D}} \right| + F_1 \right) \quad (36)$$

여기서

$$E_1 = \frac{b(\tau_w - \tau_b) - 2a\tau_w}{2\rho a \sqrt{D}} \quad (37a)$$

$$F_1 = G_1 + G_2 \quad (37b)$$

$$G_1 = -\frac{\tau_w - \tau_b}{2\rho a} \left[\frac{b}{2a} \ln c + \frac{\sqrt{D}}{a} \tanh^{-1} \frac{b}{\sqrt{D}} + \left(1 - \frac{b}{2a}\right) \ln(a-b+c) - 2 - \frac{\sqrt{D}}{a} \tanh^{-1} \left(\frac{-2a+b}{\sqrt{D}} \right) \right] \quad (37c)$$

$$G_2 = E_1 \left[\frac{b-\sqrt{D}}{2a} \ln|b-\sqrt{D}| - \frac{b-\sqrt{D}}{2a} \ln|b+\sqrt{D}| - \frac{-2a+b-\sqrt{D}}{2a} \ln|-2a+b-\sqrt{D}| + \frac{-2a+b+\sqrt{D}}{2a} \ln|-2a+b+\sqrt{D}| \right] \quad (37d)$$

b) $q=4ac-b^2>0$ 인 境遇

$$u(\sigma) = H \left(\frac{\tau_w - \tau_b}{2\rho a} \ln(a\sigma^2 + b\sigma + c) - E_2 \tan^{-1} \frac{2a\sigma + b}{\sqrt{q}} + F_2 \right) \quad (38)$$

여기서

$$E_2 = \frac{b(\tau_w - \tau_b) - 2a\tau_w}{\rho a \sqrt{q}} \quad (39a)$$

$$F_2 = G_3 + G_4 \quad (39b)$$

$$G_3 = -\frac{\tau_w - \tau_b}{2\rho a} \left[\frac{b}{2a} \ln c + \frac{\sqrt{q}}{a} \tan^{-1} \frac{b}{\sqrt{q}} + \left(1 - \frac{b}{2a}\right) \ln(a-b+c) - 2 - \frac{\sqrt{q}}{a} \tan^{-1} \left(\frac{-2a+b}{\sqrt{q}} \right) \right] \quad (39c)$$

$$G_4 = E_2 \left[\frac{b}{2a} \tan^{-1} \frac{b}{\sqrt{q}} + \left(1 - \frac{b}{2a}\right) \tan^{-1} \frac{-2a+b}{\sqrt{q}} - \frac{\sqrt{q}}{4a} \ln \frac{q+b^2}{q+(-2a+b)^2} \right] \quad (39d)$$

여기서 論議된 바와 같이 κ_M 이 積分可能한 函數로 주어질 境遇의 解도 可能하다. 그러나 이 問題는 κ_M 을 어떻게 決定할 것인가라는 또다른 問題임으로 여기서는 省略하였다.

5. 解析解와 模型結果와의 比較

여기서는 4節의 方程式과 境界條件을 有限 差分法을 使用하여 코드화하여 計算한 模型 結果와 解析解를 比較하였다. 4節의 基本方程式의 差分化는 陰解法을 使用하여 計算하였으며, 水平 垂直으로 staggered 格子를 使用하였다. 式 (21)-(23) 自體가 單純하여 이 式의 差分化를 一般的으로 記述하기에는 不適切하기 때문에 이 式의 差分化 및 mode 分離와 關聯된 數值技法에 대한 過程의 說明은 省略하였다.

問題 自體는 定常狀態의 解를 求하는 것이므로 $\partial/\partial t$ 項이 없으나, 數值計算은 모두 初期値가 0인 狀態에서 時間이 經過함에 따라 計算된 結果가 모두 定常狀態(steady-state)에 달한 값을 얻도록 하였다.

比較·圖示된 計算값은 모두 定常狀態에 到達한 값으로, $x-z$ 平面과 $x-\sigma$ 平面으로 나타낸 것이며, 計算에 使用된 諸元은 다음과 같다.

$$\Delta x = 500\text{m}, \Delta \sigma = 0.1(10 \text{ level}), \Delta t = 20 \text{ sec}, \\ \Delta T = 600 \text{ sec} \\ L = 10,000\text{m}, \tau_w = 1 \text{ N/m}^2, \rho = 1,025 \text{ kg/m}^3$$

여기서 ΔT 는 internal mode의 計算時間 間隔이다.

5.1 κ_M 이 一定한 境遇 ($\kappa_M = 0.04 \text{ m}^2/\text{sec}$)

Fig. 1은 水深이 一定하며 ($h=50\text{m}$) $\tau_b=0$ 인 境遇의 水面勾配와 流速 벡터를 圖示한 것으로 流速은 ζ 點에서 圖示되었으며, 鉛直 方向의 流速 ω 는 水平 流速 u 에 비해 50배 擴大·圖示되었다.

Fig. 2는 τ_b 의 값에 대한 流速의 垂直構造를 解析解와 함께 圖示한 것으로, 比較된 流速은 模型 領域

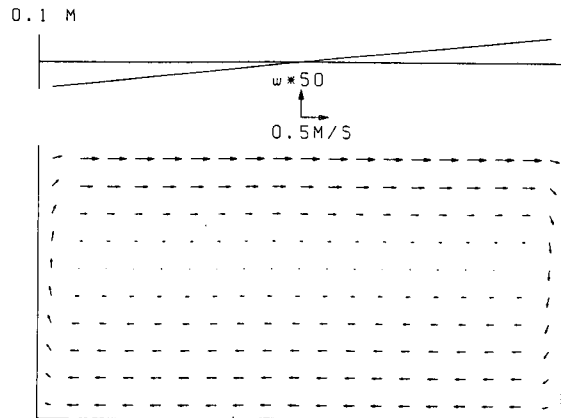


Fig. 1. Plot of surface elevation gradient and velocity vector for $\kappa_M = 0.04[\text{m}^2/\text{s}]$, $\tau_b = 0$, uniform depth.

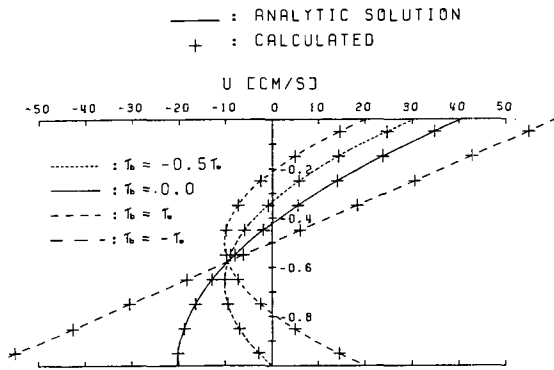


Fig. 2. Comparison of calculated velocity profiles and analytic solution for $\kappa_M=0.04[m^2/s]$, $h=50[m]$.

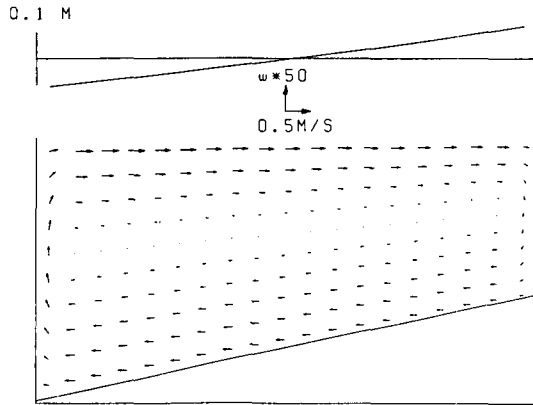


Fig. 3. Plot of surface elevation gradient and velocity vector for $\kappa_M=0.04[m^2/s]$, $\tau_b=0$, depth slope=0.002.

中央點에서의流速이다. $\tau_b = -0.5\tau_w$ 인境遇는 前述한 no-slip 條件 $u(-1)=0$ 에 의한 것이며, $\tau_b = \tau_w$ 인境遇는 水面勾配가 0으로 이때의流速은 水深의線形函數임을 알 수 있다. $\tau_b = -\tau_w$ 인境遇는 物理的意味는 弱하나 τ_b 에 의한流速構造의 甚한變化를 보기 위한 것이다.

水深 h 는 σ 의 函數가 아니므로 h 가 x 의 函數인境遇라도 4節의 方法을 그대로 適用할 수 있으며, 4節에서 求한 解析解의 H 대신 $H(x)$ 를 使用하면 된다. 여기서는 水深變化에 대한 水面勾配와 流速構造를 살펴보았다.

Fig. 3은 水深이 50m에서 30m로 緩慢히 變換境遇(水深傾斜 $\Delta H/\Delta x=0.002$), $\tau_b=0$ 인境遇의 水面勾配와 流速 벡터를 圖示한 것이다. τ_w, τ_b 가 一定할境遇, 水面勾配는 水深과는 反比例 關係가 있으며(式 (30))

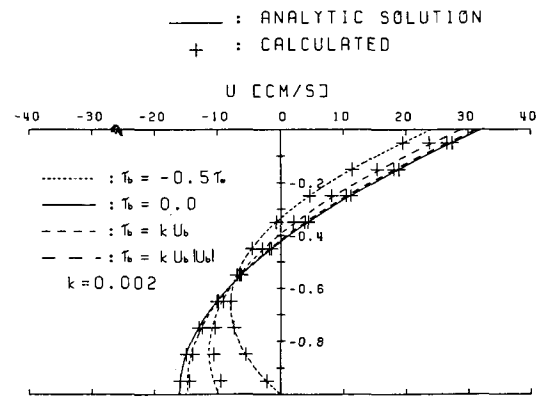


Fig. 4. Comparison of calculated velocity profiles and analytic solution for $\kappa_M=0.04[m^2/s]$, $h=39.5[m]$.

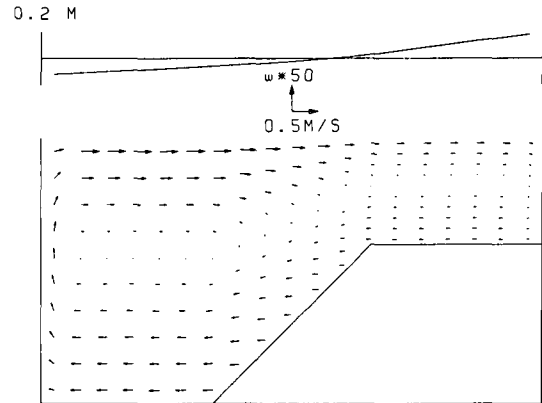


Fig. 5. Plot of surface elevation gradient and velocity vector for $\kappa_M=0.04[m^2/s]$, $\tau_b=0$, depth slope=0.01.

, 流速은 水深에 比例하는 關係(式 (31))를 볼 수 있다. 즉 水深이 減少함에 따라 水面勾配는 增加하며, 流速은 減少함을 볼 수 있다.

解析解의 誘導시 τ_b 는 이미 알고 있는 것으로 假定하였으며, 여기서는 海面(바람)應力, 水深平均 流速, 저면 流速으로 代換하였다. 즉 $\tau_b=0$ (이境遇는 τ_b 를 式 (8c)의 u_b 대신 \bar{u} 를 使用한 것으로 解析할 수 있다.), $\tau_b=0.002u_b$ (u_b 에 1次), $\tau_b=0.002|u_b|u_b$ (u_b 에 2次), no-slip 條件을 滿足하는 $\tau_b = -0.5\tau_w$ 인 4가지에 대하여 考慮하였다.

Fig. 4는 水深傾斜가 0.002인境遇, τ_b 의 變化에 대한 流速의 垂直變化를 圖示한 것으로, 比較에 使用된 水深은 39.5m이다. Fig. 4에서 보는 바와 같이 $\tau_b=0$ 와 $\tau_b = -0.5\tau_w$ 인境遇 計算結果는 解析解와 一致하였으

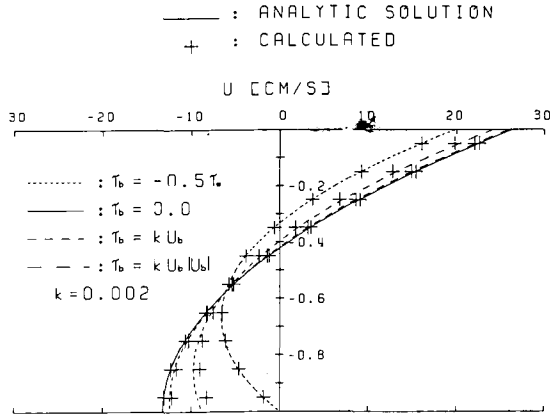


Fig. 6. Comparison of calculated velocity profiles and analytic solution for $\kappa_M=0.04[m^2/s]$, $h=32.5[m]$.

나, τ_b 를 底面流速 u_b 의 函數로 하였을 境遇는 若干의 差異를 보이고 있다. 이는 staggered 格子를 使用하였기 때문에 $u(-1)$ 대신 이와 近接한 $u(-0.95)$ 를 使用한 結果($\Delta\sigma=0.1$)라고 推定된다.

이제까지는 水深이 緩慢히 變換 境遇였으나, 水深 傾斜가 0.01인(陸棚海의 水深傾斜와 비슷한 境遇) 比較的 急하게 變換하는 境遇의 水面勾配 및 流速構造를 살펴보면 Fig. 5와 같다. 水深은 50m에서 20m로 變하였으며, $\tau_b=0$ 이 使用되었다. Fig. 5에서 보는 바와 같이, 急激한 水深傾斜 때문에 $h=50m$ 인 區間의 流速은 閉鎖形 水路 全體로 循環하지 못하고, 制限되어 循環하는 樣相을 보이고 있다.

Fig. 6은 水深이 急激히 變換하는 區間의 中央地點인 $h=32.5m$ 인 곳에서의 τ_b 變化에 의한 流速構造를 圖示한 것으로, Fig. 4의 境遇에 비해 水深比 32.5/39.5만큼 減少한 것을 볼 수 있다.

5.2 κ_M 이 水深의 1次 函數인 境遇 ($\kappa_M=a\delta+b$)

여기서 水面勾配는 κ_M 에 無關하므로 言及하지 않으며, κ_M 이 水深에 線形으로 變換 境遇의 流速構造만을 言及하기로 하며, 比較에 使用된 水深은 $h=50m$ 로 一定하다.

κ_M 은 表層 $\sigma=0$ 에서는 0.04, 底面 $\sigma=-1$ 에서는 各各 0.01, 0.03, 0.05로 變換하는 3가지 境遇만을 考慮하였다. 즉 이들을 式으로 表現하면,

$$\kappa_M = N/100 \tag{40a}$$

$$N_1 = \sigma + 4, N_2 = 3\sigma + 4, N_3 = -\sigma + 4 \tag{40b,c,d}$$

Fig. 7a는 $\tau_b=0$ 인 境遇의 流速構造로써, $\kappa_M=0.04$ 로 一定한 境遇와(Fig. 2) 比較하면, N_1 와 N_2 인 境遇 流速의 크기는 增加하였다. 이것은 κ_M 의 水深平均 값이 0.04보다 작기 때문에 바람 應力에 의한 運動量이 $\kappa_M=0.04$ 인 境遇에 비해 水深 全體로 混合되지 못하고 表層에 局限되어 表層流速은 크게 되었으며, 이것을 補償하는 底面流速도 크게 된 것으로 解析할 수 있다. N_3 인 境遇는 $\kappa_M=0.04$ 인 境遇보다 바람 應力에 의한 運動量이 水深 全體로 잘 混合되어 流速은 작게 나타난 것으로 볼 수 있다.

Fig. 7b는 $\tau_b = -0.5\tau_w$ 인 境遇로, no-slip 條件을 滿足하는 τ_b 는 式 (34)와 같이 計算할 수 있으나, 여기서는 κ_M 이 一定한 5.1의 境遇와 比較하기 위하여 近似的으로 no-slip 條件을 滿足시키는 $\tau_b = -0.5\tau_w$ 를 使用하였다. 이 境遇도 κ_M 이 一定한 境遇의 流速과 比較하면, N_1 와 N_2 인 境遇가 크게 나타났으며, N_3 인 境遇 底面 流速을 除外하고는 작게 나타난 것을 볼 수 있다.

Fig. 7c와 Fig. 7d는 各各 τ_b 를 u_b 의 1次函數와 2次函數로 하였을 境遇로, 相對的으로 τ_b 가 u_b 의 1次函數인 境遇는 $\tau_b = -0.5\tau_w$ 인 境遇와 비슷하며, τ_b 를 u_b 의 2次函數로 하였을 境遇는 $\tau_b=0$ 인 境遇와 비슷하다.

$\tau_b=0$ 인 境遇를 除外하고는 底面近處에서 流速은 減少하며, 이러한 程度가 클수록(즉 流速勾配 $\partial u/\partial\sigma$ 가 클수록) 計算結果는 解析解와 더 큰 差異를 보이고 있다. 이것의 理由로는 底面流速을 $u(-1)$ 대신 이와 近接한 $u(-0.95)$ 를 使用한 점과 이러한 構造를 再現하기에는 $\Delta\sigma$ 가 크기 때문인 것으로 判斷된다.

5.3 κ_M 이 水深의 2次 函數인 境遇 ($\kappa_M=a\sigma^2+b\sigma+c$)

4節에서 言及한 바와 같이 κ_M 이 水深의 2次函數인 境遇는 κ_M 의 構造에 따라 積分 形態가 다른 2가지의 解析解가 誘導되므로, 여기서는 이러한 構造를 갖는 4가지 境遇(Fig. 8)에 대하여 流速構造만을 論議하기로 한다.

$D=b^2-4ac>0$ 인 境遇로는 式 (41a,b)를, $q=4ac-b^2>0$ 인 境遇로는 式 (41c,d)를 考慮하였으며, 式 (41a)와 式 (41c)는 式 (40)의 N_2 인 境遇에 近似的으로 對稱이며, 式 (41b)와 式 (41d)는 $\kappa_M=0.04$ 인 境遇에 對稱이다.

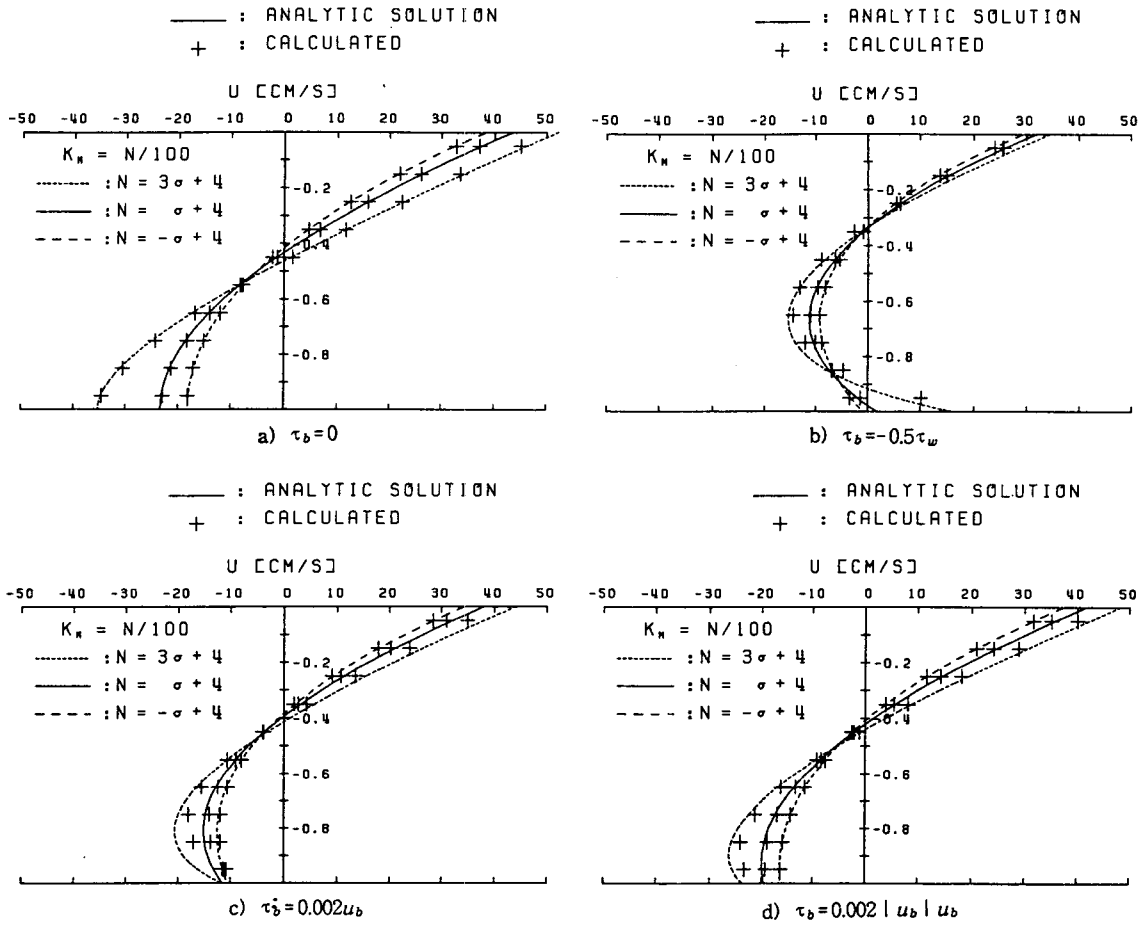


Fig. 7. Comparison of calculated velocity profiles and analytic solution for $\kappa_M = a\sigma + b$ [m²/s], $h = 50$ [m].
 a) $\tau_b = 0$ b) $\tau_b = -0.5\tau_w$ c) $\tau_b = 0.002u_b$ d) $\tau_b = 0.002|u_b|u_b$

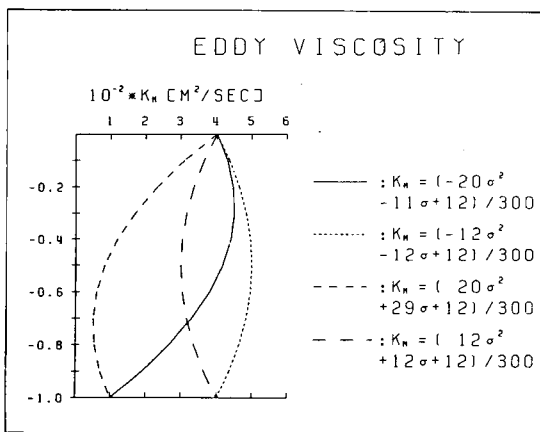


Fig. 8. Structures of vertical eddy viscosity for $\kappa_M = a\sigma^2 + b\sigma + c$.

$$\kappa_{M1} = \frac{(-20\sigma^2 - 11\sigma + 12)}{300} \quad (41a)$$

$$\kappa_{M2} = \frac{(-12\sigma^2 - 12\sigma + 12)}{300} \quad (41b)$$

$$\kappa_{M3} = \frac{(20\sigma^2 + 29\sigma + 12)}{300} \quad (41c)$$

$$\kappa_{M4} = \frac{(12\sigma^2 + 12\sigma + 12)}{300} \quad (41d)$$

Fig. 9a는 $\tau_b = 0$ 인境遇의 κ_M 에 대한流速構造로써, κ_{M3} 인境遇를除外한 κ_{M1} , κ_{M2} , κ_{M4} 의流速構造는 一般的으로 비슷함을 볼 수 있다. κ_{M1} 의境遇와 Fig. 7a의 $N_2 = 3\sigma + 4$ 인境遇와를 比較하여 보면, κ_M 값은 κ_{M1} 의

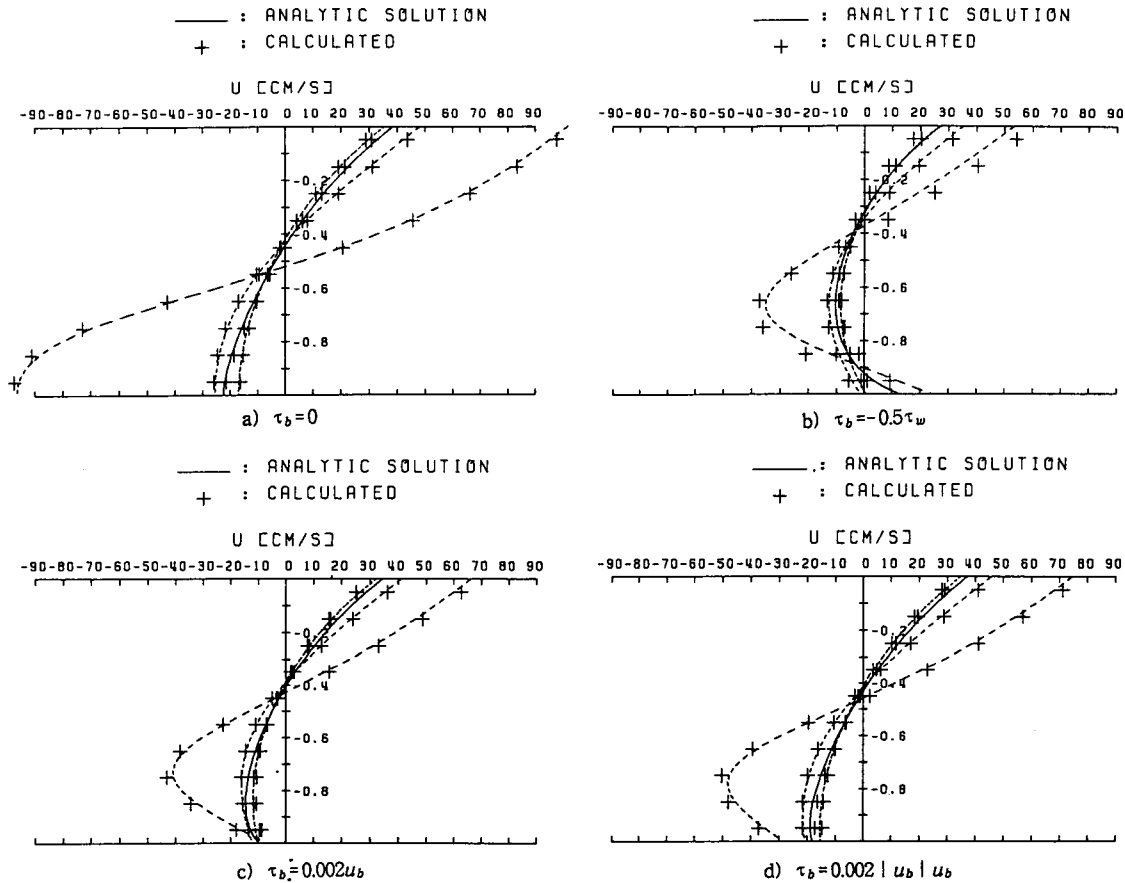


Fig. 9. Comparison of calculated velocity profiles and analytic solution for $\kappa_M = a\sigma^2 + b\sigma + c$ [m²/s], $h = 50$ [m].
 a) $\tau_b = 0$ b) $\tau_b = -0.5\tau_w$ c) $\tau_b = 0.002u_b$ d) $\tau_b = 0.002|u_b|u_b$

境遇가 $N_2 = 3\sigma + 4$ 인 境遇 보다 항상 크며, 이에 對應하는 流速은 κ_{M1} 의 境遇가 작다. 그러나 κ_{M4} 와 $\kappa_M = 0.04$ 의 境遇를 比較하여 보면, κ_{M4} 가 κ_M 값은 항상 작으나, κ_{M4} 의 流速은 $\kappa_M = 0.04$ 인 境遇에 비해 表層에서는 크게, 底面近處에서는 작게 나타난다. 以上에서 알 수 있는 것과 같이 κ_M 이 水深의 2次 函數일 境遇, 流速은 κ_M 自體의 값뿐만 아니라 κ_M 의 構造에 의해서도 달라진다.

κ_{M3} 의 境遇는 이제까지와는 다른 樣相을 보이고 있다. κ_M 이 常數일 境遇 流速은 κ_M 과 反比例 關係가 있다는 점을 考慮하여 水深의 2次函數인 κ_M 값을 水深平均된 값으로 換算하여 流速과의 關係를 比較하였으나, 뚜렷한 關係를 얻지 못하였다. κ_M 의 形態와 流速과의 關係에 대한 보다 正確한 解析은 더 많은 研究가 要求된다.

Fig. 9b, Fig. 9c, Fig. 9d는 各各 $\tau_b = -0.5\tau_w$, $\tau_b = 0.002u_b$, $\tau_b = 0.002|u_b|u_b$ 에 대한 流速構造로써, κ_{M3} 의 境遇 底面近處의 流速勾配($\partial u / \partial \sigma$)가 크다는 것을 注視할 必要가 있다.

6. 結論 및 提言

本 研究에서는 1次元 閉鎖形 水路에서 바람에 의한 定常狀態 下의 水面勾配와 流速의 垂直構造를 提示하는 解析解를 誘導하였다. 誘導된 解析解는 底面의 境界條件을 底面摩擦應力 τ_b 를 使用하므로 既存의 底面流速을 no-slip으로 假定한 境遇보다 多樣한 解를 提示하고 있다. 解析解는 鉛直 運動量 擴散 係數 κ_M 이 水深에 無關한 常數, 水深의 1次函數 및 2次函數일 境遇를 包含하며, 底面流速이 no-slip이라는 假定과

底面摩擦應力 τ_b 와 어떤 關係가 있는가를 提示하고 있다.

모드(mode) 分離된, σ 座標를 採擇한 $(x-\sigma)$ 數值 模型 結果와 誘導된 解析解와 開發된 數值模型의 結果를 比較·檢討하였다. 比較된 境遇는 κ_M 이 常數인 境遇 均一 水深, 緩慢한 水深傾斜 및 比較的 急激한 水深傾斜를 갖는 境遇와 κ_M 이 水深의 1次 및 2次函 數인 境遇 底面摩擦應力 τ_b 의 變化에 대한 流速構造를 比較·分析한 境遇이다.

本 研究에서는 定常狀態 만을 다루었으나, 模型 結果는 非定常狀態로부터 計算된 값들이 定常狀態에 到達한 境遇를 比較한 것으로, 比較·檢討 結果를 要 約하면 다음과 같다.

1) 水面勾配는 바람 應力 τ_w , 底面摩擦應力 τ_b 및 水深 h 의 函數로, κ_M 의 垂直 構造와는 無關하다.

2) 流速構造는 κ_M 의 값 뿐만 아니라 κ_M 의 形態에 의해서도 변하며, τ_b 의 값에 의해서도 변한다.

3) no-slip 條件을 滿足하기 위해서는 底面의 流速 勾配가 slip인 境遇보다 相對적으로 크며, 이에 相應 하는 底面應力도 slip 條件의 底面應力보다 相當히 크다.

4) 模型結果는 全般的으로 解析解와 一致하였으나, 流速勾配가 클수록 鉛直方向의 格子間隔을 줄여야 正確한 計算結果를 얻을 수 있다.

本 研究에서는 境界條件에 따른 模型의 反應은 檢 討되지 않았으나 이에 대한 研究도 要求되며, 鉛直 擴散 係數는 알고 있다고 假定하였으나 鉛直 擴散 係數의 closure에 대한 研究도 現場 適用 時 要求된다. 또한 本 研究에서는 $(x-\sigma)$ 問題만을 다루었으나, 3

次元 問題를 處理할 수 있는 數值技法에 對한 研究도 要求된다.

謝 辭

논문에 對해 誠心껏 指導해 주신 海洋研究所의 金 昌式 博士, 鄭景太 博士와 많은 討議 및 助言을 해주신 田錡天씨께 謝意를 표한다.

參考文獻

- 金昌式, 李鍾贊, 鄭泰成, 姜始桓, 1989a, 3次元 海水流動모 델의 檢證, 海洋研究 11(1), 海洋研究所
- 金昌式, 李鍾贊, 鄭泰成, 姜始桓, 1989b, 3次元 海水流動모 델의 適用, 海洋研究 11(1), 海洋研究所
- Blumberg, A.F. and Mellor, G.L., 1987. A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model, in Three-dimensional coastal ocean models, Vol. 4 edited by N.S. Heaps. American Geophysical Union.
- Cooper, C.K. and Pearce, B.R., 1977. A three-dimensional numerical model to calculate currents in coastal waters utilizing a depth varying eddy viscosity, Technical Report No. 226, MIT, Cambridge, Mass.
- Davies, A.M., 1987. Spectral models in continental shelf sea oceanography, in Three-dimensional coastal ocean models, Vol. 4 edited by N. Heaps. American Geophysical Union.
- Lynch, D.R. and W.G. Gray, 1978. Analytic solutions for computer flow model testing, Proc. of ASCE, Vol. 104, No. HY10, Oct.
- Roed, L.P. and Cooper, C.K., 1987. A study of various open boundary conditions for wind-forced barotropic numerical ocean models, in Three-dimensional models of marine and estuarine dynamics, Elsevier Oceanography Series 45, edited J. Nihoul and B. Jarmart, Elsevier.