

造波機에 의하여 發生된 先端波의 展開 On the Evolution of Leading Waves Generated by a Wavemaker

朴仁奎* · 崔恒洵**

In Kyu Park* and Hang Soon Choi

要 旨: 2次元 水槽에서 發生된 先端波의 展開를 考察하였다. 先端波의 展開는 일반적으로 Schrödinger 方程式으로 표현될 수 있다. 특히 反送波(carrier wave)의 기울기가 커서 非線型性이 중요하게 되면 3次 Schrödinger 方程式이 適切한 數學模型이 될 수 있음을 밝혔다. 數值計算은 Crank-Nicolson 알고리즘을 사용하였고 實驗値와 比較하였다. 數值計算으로 先端波의 展開를 잘 豫測할 수 있으며 先端波의 展開는 $kh > 1.36$ 일 때 가파른 파에서 非線型性에 큰 影響을 받음을 밝혔다.

Abstract □ The evolution of leading waves generated by a wavemaker in a two-dimensional tank has been studied. The front of wave trains can be described in general by the Schrödinger equation. In particular, when the slope of the carrier waves is steep, and hence nonlinearity becomes important, the cubic Schrödinger equation is proved to be an appropriate mathematical model. Computations are made by using the Crank-Nicolson algorithm and compared with experimental data. It is found that the numerical result predicts the evolution of leading waves fairly well and the evolution is significantly affected by nonlinearity for steep waves when $kh > 1.36$.

1. 서 론

2차원 수조에서 조파기를 정현파형으로 가동시키면 조파기에서 멀리 떨어진 점에서는 초기의 천이과정을 거쳐 파고와 주기가 일정한 정현파가 전파되어 나간다. 초기의 천이과정에는 비교적 파장이 긴 파성분이 전파하는데, 이 파성분은 정상파형과 다른 특성을 보인다. 이를 고찰하기 위하여 선단파(leading waves)의 전개방정식(evolution equation)에 대한 수치계산을 수행한 다음 실험치와 비교하였다.

이러한 중력파의 천이거동에 대하여 Wu(1957)는 심해파에 대한 연구를 하였으며, Miles(1962)는 선형해를 해석적으로 구하였다. Hasimoto & Ono(1972)는 균일수심에서 중력파의 느린변조(slow modulation)가 비선형 Schrödinger 방정식으로 표현됨을 보였으며, Longuet-Higgins(1974)는 실험으로 선단파의 군속도가 Miles의 해석해와 일치함을 보였다. Yue & Mei

(1980)와 Chee & Choi(1991)는 무한수심에 놓인 쉘기에 의한 산란문제를 비선형 Schrödinger 방정식으로 기술하여 파전개를 해석하였다. 본 연구에서의 임의의 수심에서 비선형성이 선단파의 전개에 미치는 영향을 중점적으로 고찰하였다.

2. 전개방정식

포텐셜 유동이론 가정하에 평면진행파의 전개방정식은 다척도 전개기법(multiple-scale expansion techniques)을 이용하여 유도할 수 있다. 서서히 변조하며 전파하는 파의 특성을 고려하여 전파방향의 길이와 시간을 다음과 같이 정의한다.

$$(x_1, t_1) = \varepsilon(x, t), (x_2, t_2) = \varepsilon^2(x, t), \dots \quad (1)$$

여기서 ε 는 파의 기울기($=ka$, k =wave number, a =typical wave amplitude)이며 작은 양이라 가정한다

*現代 船舶海洋研究所(Hyundai Maritime Research Institute, Hyundai Heavy Ind. Co., Ltd., Cheonha-Dong, Dong-Gu, Ulsan, 690-792, Korea)

**서울대학교 工科大學 造船·海洋工學科(Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University, Seoul, 151-742, Korea)

다.

속도포텐셜과 자유수면을 ε 에 대하여 접근 전개하고 이를 다시 위상($\theta=kx-\omega t$)에 대한 조화항으로 전개한다.

$$(\Phi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=-n}^n \varepsilon^{im} \theta(\phi_{nm}, \zeta_{nm}) \quad (2)$$

이들을 지배방정식인 Laplace 방정식과 자유표면 경계조건에 대입하여 정리하면 각 ε 의 차수와 θ 의 조화항에 대한 초기 및 경계치 문제를 얻게 된다. 해의 전개방정식은 긴 유도과정을 거쳐 3차항의 경계치 문제에서 Schrödinger 방정식으로 귀착됨을 보일 수 있다(Mei, 1983).

$$-i \frac{\partial A}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta^2} + \beta |A|^2 A = 0 \quad (3)$$

여기서 $\tau = t_2$, $\zeta = x_1 - C_g t_1$ 그리고 C_g 는 군속도이며 α 와 β 는 다음과 같이 표현된다.

$$\alpha = -\frac{1}{2} \omega''(k) = \frac{C_g^2}{2\omega} - \frac{\omega kh \cosh^2 kh}{k^2 \sinh 2kh} + \frac{kh \sinh kh}{k \cosh kh} C_g \quad (4)$$

$$\beta = \frac{\omega k^2}{16 \sinh^4 kh} (\cosh 4kh + 8 - 2 \tanh^2 kh) - \frac{\omega}{2 \sinh^2 2kh} \frac{(2\omega \cosh^2 kh + k C_g^2)^2}{(gh - C_g^2)} \quad (5)$$

윗 식에서 비선형항을 무시하면 선형 Schrödinger 방정식이 되며, 이 방정식의 해는 Fresnel 적분을 이용하여 표시할 수 있다(Miles, 1962).

$$\left| \frac{A}{a} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} + C(m) \right]^2 + \left[\frac{1}{2} + S(m) \right]^2 \right\}^{1/2} \quad (6)$$

여기서 $C(m)$ 과 $S(m)$ 은 각각 Fresnel cosine과 sine 적분이다.

3. 수치 계산

수치계산의 편의를 위해 변수들을 다음과 같이 무차원화시킨다.

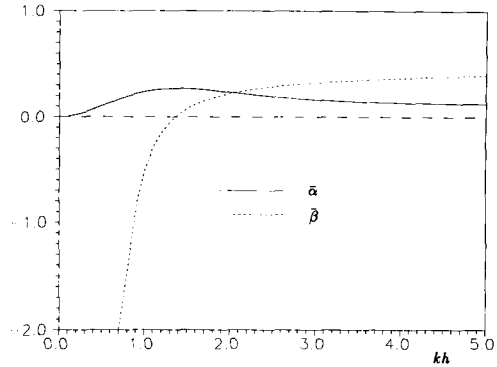


Fig. 1. Variation of $\bar{\alpha}$ and $\bar{\beta}$.

$$\bar{A} = \frac{A}{a}, \quad \bar{\xi} = k\xi, \quad \bar{\tau} = \omega\tau \quad (7)$$

무차원화된 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{지배방정식 ; } -i \frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{\tau}} + \bar{\alpha} \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial \bar{\xi}^2} + \bar{\beta} |\bar{A}|^2 \bar{A} &= 0, \\ \bar{\alpha} &= \frac{k^2}{\omega} \alpha, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\omega k^2} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{초기 조건 ; } \bar{A}(\bar{\xi}) = 0.5 \{1 + \tanh(-\bar{\xi}/\lambda)\}, \quad \lambda \cong 0 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{경계 조건 ; } \bar{A} &\rightarrow 0 \quad \text{as } \bar{\xi} \rightarrow \infty \\ \bar{A} &\rightarrow \exp(-i\bar{\tau}/2) \quad \text{as } \bar{\xi} \rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (10)$$

Crank-Nicolson 알고리즘을 사용하여 수치계산을 수행하였다. 계통적인 수치실험을 통해 ε 의 크기에 따라 격자간격 $\Delta \bar{\xi} = 0.02 \sim 0.1$ 과 시간간격 $\Delta \bar{\tau} = 0.001 \sim 0.005$ 에서 수치계산 과정없이 안정된 수치해를 얻었다.

$\bar{\alpha}$ 와 $\bar{\beta}$ 의 수심에 따른 변화가 Fig. 1에 표시되어 있다. 분산항의 계수 $\bar{\alpha}$ 는 항상 양의 값을 가지며 $\bar{\beta} = 0$ 이 되는 $kh = 1.36$ 근처에서 최대치가 되며, kh 가 커짐에 따라 점근치 1/8에 접근한다. 한편 비선형항의 계수 $\bar{\beta}$ 는 $kh < 1.36$ 에서는 음의 값을 가지나, $kh > 1.36$ 에서는 양의 값을 가지며 점근치 1/2에 접근한다. 특히 $kh = 1.36$ 에서는 $\bar{\beta}$ 가 0이어서 선형문제가 된다.

수치결과를 검증하기 위해 2차원 수조에서 실험을 하였다. 수조의 한쪽 끝에는 피스톤형 조파기가 설치되어 있고, 반대쪽 끝에는 비치형 소파기가 장치되어 있다. 수조의 제원은 길이 50m, 폭 1m이고 수

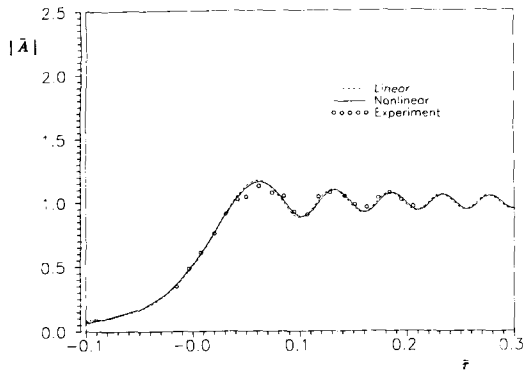


Fig. 2. Evolution of leading waves for $kh=1.0$ and $ka=0.059$.

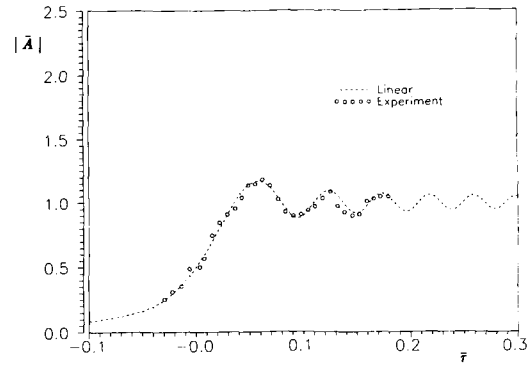


Fig. 4. Evolution of leading waves for $kh=1.363$ and $ka=0.047$.

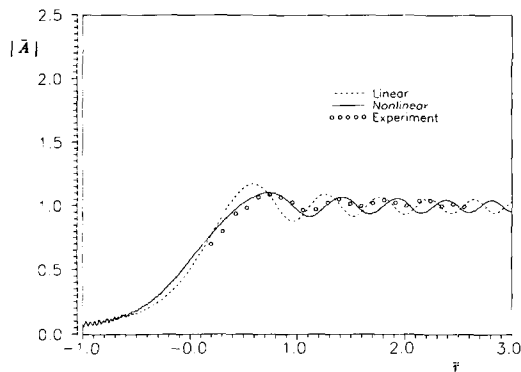


Fig. 3. Evolution of leading waves for $kh=1.0$ and $ka=0.184$.

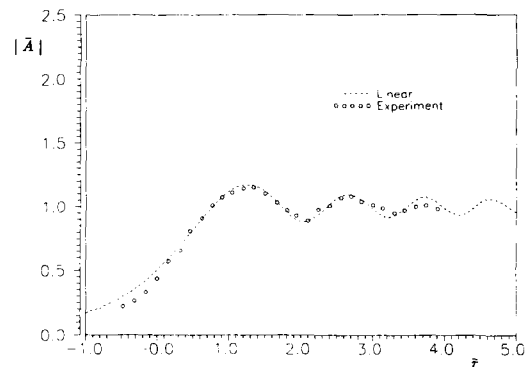


Fig. 5. Evolution of leading waves for $kh=1.363$ and $ka=0.218$.

심은 0.5m로 하였다. 용량형 파고계를 조파기로부터 25.8m 떨어진 곳에 설치하였다. 1초에 40개의 파고를 계측하여 포락선(envelope)을 얻을 수 있었다.

4. 결과 및 고찰

실험은 $kh=1.0, 1.363, 2.0$ 및 3.0 에 대하여 수행하였다. 매 kh 에 대하여 2개의 서로 다른 반송파 기울기를 선택하였다. 즉, 한 경우는 작은 기울기를 다른 경우는 조파기가 쇄파현상없이 만들 수 있는 최대 기울기를 택하였다. 실험결과를 Fig. 2에서 Fig. 9까지 도시하였는데, 여기서 종축은 무차원화된 파 진폭이고 횡축은 무차원화된 시간으로 파고계의 위치에서 환산한 값이다. 실선 및 점선은 각각 비선형 및 선형 계산결과를 나타내고, 원은 실험치를 표시한다.

Fig. 2는 $kh=1.0, ka=0.059$ 에서 이론치와 실험을 나타내고 있다. 선형과 비선형 계산의 결과에는 거의 차이가 없다. 또한 실험치는 이론치와 잘 일치하고 있다. 이는 파기울기가 작아 비선형성이 강하지 못하기 때문이다. 그러나 큰 기울기($ka=0.184$)에서는 Fig. 3에 보인 것처럼 초기전개단계에서 비선형으로 계산한 파고가 선형 결과보다 약간 작고 전개시간이 지연됨을 알 수 있다.

Fig. 1에서 보인 것처럼 비선형 계수 $\bar{\beta}$ 는 $kh=1.36$ 에서 0이 되며 따라서 3차 Schrödinger 방정식은 대응되는 선형방정식이 된다. 이론값과 실험값은 기울기가 작은 $ka=0.047$ (Fig. 4) 경우나 기울기가 비교적 큰 $ka=0.218$ (Fig. 5)에서 모두 잘 일치하고 있다. kh 가 1.36보다 크면, 비선형성은 가파른 파의 전개에 큰 영향을 주게된다. $kh=2.0$ 에서 $ka=0.057$ 일

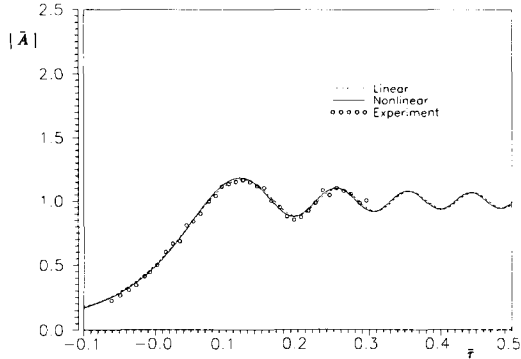


Fig. 6. Evolution of leading waves for $kh=2.0$ and $ka=0.057$.

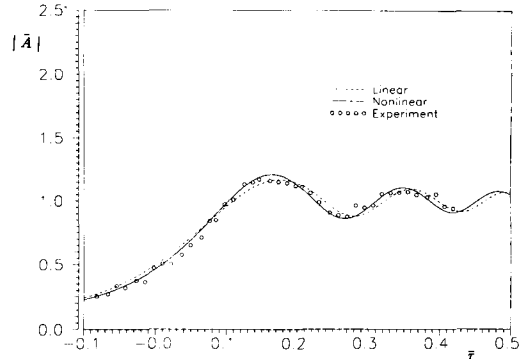


Fig. 8. Evolution of leading waves for $kh=3.0$ and $ka=0.063$.

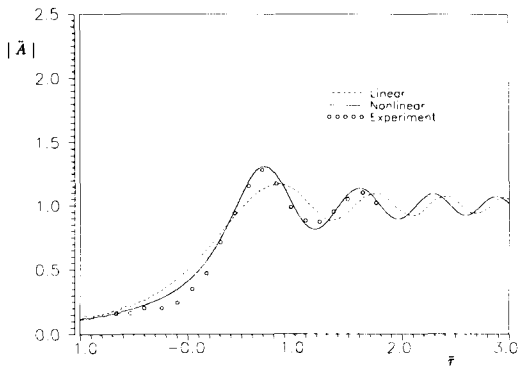


Fig. 7. Evolution of leading waves for $kh=2.0$ and $ka=0.146$.

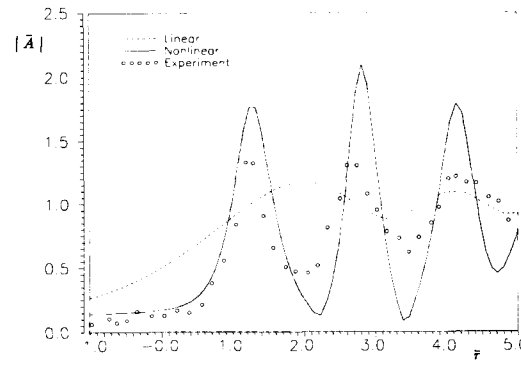


Fig. 9. Evolution of leading waves for $kh=3.0$ and $ka=0.213$.

때의 결과가 Fig. 6에 그리고 $ka=0.146$ 일 때의 결과가 Fig. 7에 그려져 있다. 반송파의 기울기가 작을 때는 비선형결과와 선형결과는 서로 크게 다르지 않다. 그러나 가파른 파에서는 비선형의 경우 진폭은 더 커지고 위상은 앞서가는데, 이 현상은 실험으로 잘 확인해 주고 있다. 이러한 경향은 앞에서 살펴본 $kh < 1.36$ 과는 반대가 된다(Fig. 3 참조).

$kh=3.0$ 일 경우 이런 경향은 더욱 뚜렷해진다. Fig. 8은 $ka=0.063$ 에 그리고 Fig. 9는 $ka=0.213$ 에 대응된다. Fig. 9에 도시한 바와 같이 비선형 이론은 실험치와 비교할 때 위상은 맞게 추정하나 크기는 과대하게 추정함을 알 수 있다. 이러한 차이는 측파대 불안정성(side band instability)에 기인한 것으로 추정된다. 이 경우 $kh=3.0$ $h=0.5m$ 이므로 반송파의 파장은 $1.05m$ 이며 계측점은 조파기로부터 $25.8m$ 떨

어진 곳이므로 대략 25개의 파장에 대응하는 거리이다. 즉, 반송파에 섞여지는 교란이 충분히 성장할 수 있는 위치임을 의미한다. Fig. 9에 도시한 포락선의 주기는 대략 $\bar{c}=1.45$ 이며 이는 변조기 0.196 에 대응한다. 변조비 0.196 , 파 기울기 0.213 은 Longuet-Higgins(1978)의 결과에 의하면 안정권과 불안정권사이에서 약간 불안정권에 해당한다. 따라서 측파대교란이 서서히 성장하는 경우로 사료된다. 그러나 본 논문에서는 안정성에 대한 문제는 더 이상 취급하지 않았다.

이상의 수치 및 실험결과로부터 3차 Schrödinger 방정식은 kh 의 넓은 범위에 걸쳐 조파기에 의해 발생된 선단파의 전개 특히 비선형성이 강한 가파른 파의 전개를 묘사하는 적절한 수학모델이란 결론을 내릴 수 있다.

謝 辭

본 연구는 韓國科學財團이 지원한 一般研究課題의 일부로 수행하였음을 밝히며, 상기재단에 깊은 감사를 드립니다. 또한 실험에 협조해 주신 韓國海洋研究所의 李達秀 博士와 全仁植 博士에게 깊은 감사를 드립니다.

參考文獻

- Chee, W.S. and Choi, H.S., 1991. Nonlinear diffraction of incident waves with side-band disturbances by a thin wedge, *J. Korean Soc. of Coastal and Ocean Engineers*, 3(1): 45-53.
- Hashimoto, H. and Ono, H., 1972. Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Physical Society of Japan*, 33(3): 805-811.
- Longuet-Higgins M.S., 1974. Breaking waves-in deep or shallow waters, Proc. 10th Symp. on Naval Hydrdynamics, pp. 579-605.
- Longuet-Higgins M.S., 1978. The instability of steep gravity waves of finite amplitude in deep water, *Proc. R. Soc. Lond.*, A360: 471-505.
- Mei, C.C., 1983. The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves, John Wiley & Sons, Chap. 2 and Chap. 12.
- Miles, J.W., 1962. Transient gravity wave response to an oscillating pressure, *J. Fluid Mechanics*, 13: 145-150.
- Wu, T.Y., 1957. Water waves generated by the translatory and oscillatory surface disturbance, Caltech, Eng. Div. Report 85-3.
- Yue, D.K.P. and Mei, C.C., 1980. Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge, *J. Fluid Mechanics*, 99: 32-52.