

종속 품질 생산 공정에서 시뮬레이션과 근사적 방법을 통한 합격 확률의 비교에 관한 연구

- A Study on the Comparison of the Probability of Acceptance through Simulation and Approximation Methods for a Statistically Dependent Production Process -

유 정상*
황 의철**

ABSTRACT

Standard acceptance sampling plans models the production process as a sequence of independent identically distributed Bernoulli random variables. However, the quality of items sampled sequentially from an ongoing production process often exhibits statistical dependency that is not accounted for in standard acceptance sampling plans.

In this paper, a dependent production process is modelled as an ARMA process and as a two-state Markov chain.

A simulation study of each is performed. A comparison of the probability of acceptance is done for the simulation method and for the approximation method.

I. 서 론

통계적 품질관리 기법 중에서 가장 빈번히 사용되는 것이 관리도와 샘플링 계획이다. 이들의 목적은 공정의 품질 수준 목표를 설정하고, 이것의 달성 여부를 판단하여, 생산된 제품의 로트를 주어진 검사 절차에 따라 최종적으로 합격, 불합격의 판정을 내리는 것이다. 이들 기법은 품질 보증을 위해 거의 필수적인 것이면서도 이것들을 수행하는데에는 적지 않은 비용이 수반된다. 그러므로, 생산자나 구매자의 입장, 제품의 품질 특성, 검사에 들어가는 제반 비용 등을 고려하여 가장 경제적인 계획을 수립해야 된다. 여기서 우리가 주의해야 할 것은 전통적인 관리도나 샘플링 계획은 모든 것을 확률적 법칙에 그 근거를 두고 있다는 점이다. 다시말 하면, 대부분의 샘플링 계획은 생산의 공정 상태나 검사 대상의 품질 특성이 서로 독립적인(i.i.d) 경우를 전제로 하고 있다는 것이다. 로트내의 제품들이 서로 잘 혼합되어 제품들 간의 품질 특성이 종속 적이 아니고 완전히 독립적인 경우에는 이들 방법은 충분한 타당성이 있다. 그러나, 오늘날 생산의 설비가 점점 자동화되어 가고 제품 또한 복잡해짐에 따라, 일련의 제품들 간에는 분명히 품질의 종속성 즉, 품질 특성상 어떤 경향이 존재하는 것이 사실이다.

최근 품질의 종속성과 이에 대한 검사 방식에 대한 연구가 늘고 있다[1,2,3,4].

본 연구는 품질의 종속성이 존재할 경우에 대하여 로트의 합격 확률(P_a)이 어떻게 변하는가를 비교 분석하여, 가장 경제적인 검사 계획을 수립하기 위한 기초를 마련하는데 있다.

II. 본 론

1. 기존 문헌 고찰

생산의 자동화와 이에 따른 제품 공정의 안정화, 품질 수준의 고도화에 편승하여 품질의 종속성과 이에 대한 샘플링 검사 방법에 관해 관심이 높아졌다.

* 한양 대학교 대학원 산업공학과

** 한양 대학교 산업공학과 교수

접수 : 1992. 10. 30.

확정 : 1992. 11. 9.

이에 관한 논문들은 종속성이 있는 제품들의 특성을 무시한 샘플링 기법들은 잘못된 결과를 초래한다는 것을 여러 면에서 증명해 주고 있다. 이러한 것을 미루어 보아 품질이 종속적인 제품의 관리 기법은 더욱 철저히 연구될 필요성이 있다고 본다. 기존의 연구들은 모두 종속성이 있는 제품의 경우에 수리적 모델을 이용하여 해결하고 있으며, 해법들이 너무나 복잡하고 난해하며 간단한 가정만 바꾸어도 해법이 없는 등 여러 가지 어려움을 주고 있다. Bhat et al. [1] 과 Sampathkumar [3]는 연속적으로 생산되는 제품을 two-state Markov chain으로 보았고, Sarkadi and Vincze [4]는 two-state Polya process로 고려 했으며, Nelson [2]은 종속성이 시뮬레이션으로 나타날 수 있는 경우를 고려하였다.

이들 논문들은 가정이 복잡하며 로트의 품질과 경제적인 요소를 고려하는데 모두 미흡하다. 따라서 제품의 종속성과 샘플링의 stochastic한 성질에 근거해 Monte Carlo 시뮬레이션을 쓰면 모델 설정이 간단하며 가정이 자유로운 점등 문제를 쉽게 분석할 수 있을 것으로 본다. 즉, 효율적인 시뮬레이션 최적화 기법만 있으면 이법주의 문제를 아주 효과적으로 해결할 수 있을 것이다.

2. 모델 설정

채취된 시료의 품질 특성이 서로 종속적으로 나타날 경우는 다음과 같은 사항에 기인될 수 있다.

- 1) 작업환경의 규칙적인 변화로 인한 주기적 패턴이 있을 때
- 2) 공정 조건의 빈번한 변화
- 3) 작업자, 원자재, 방법, 설비의 교체로 인한 공정 수준의 변화
- 4) 재료나 설비의 점진적인 열화

본 연구는 품질이 종속성이 있는 경우에 근사적인 방법과 시뮬레이션에 의한 방법으로 구해진 로트의 합격 확률(P_a)의 비교 분석에 초점을 두고 있으며, 연구 목적상, 생산 공정이 ARMA(1,1) process 와 2-state Markov chain 인 공정을 모델로 하고 있다. 시뮬레이션 방법에서는 합격 판정 개수(C)와 불량수를 비교하여 로트의 합격 여부를 처리하고, 근사적인 방법에서는 고정된 불량률 대신에 로트의 평균 불량률을 이용하여 로트의 합격 확률을 계산하고 있다.

Nelson은 ARMA(1,1) process를 모델로 하여 시뮬레이션이 가능한 어떤 생산 공정에 대해서 1회 계수 샘플링 검사 계획을 하는 방법에 관한 표준 모델을 제시했다.

ARMA process는 세개의 모수 ϕ, θ, P 로써 정의된다. ϕ 는 Z_{i-1} 과 μ 와의 차이에 대한 것이 Z_i 에 미치는 영향의 계수이며 θ 는 ϵ_{i-1} 에 대한 계수를 나타내는데, 둘다 생산 공정의 일정한 특성치이다. P는 불량률로서 ARMA process의 관리 한계를 결정한다.

제품의 측정치 Z_i 는 다음과 같이 나타낸다.

$$Z_i = \mu + \phi(Z_{i-1} - \mu) + \theta\epsilon_{i-1} + \epsilon_i \tag{1}$$

측정값들은 다음의 lag correlations으로써 서로 종속되고 있다.

$$\rho_1 = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + \theta^2 + 2\phi\theta} \tag{2}$$

$$\rho_h = \phi^{h-1} \rho_1, h = 2, 3, \dots \tag{3}$$

Bhat, Lal 과 Karunaratne은 2-state Markov chain인 생산 공정을 다루는 표준 모델을 제시했다.

이들은 합격 확률과 AOK와 평균샘플수으로써 특성치들을 결정하고 있다. Markov chain 종속 생산 공정은 P와 Γ 에 의해 정의되는데 P는 불량율이며, Γ 는 serial correlation으로써 ϕ 와 θ 로 표시된다.

$$\Gamma = \frac{(1 + \phi\theta)(\phi + \theta)}{1 + \theta^2 + 2\phi\theta} \tag{4}$$

이 process는 다음의 transition matrix로 표시된다. [1]

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix} \quad (1 \geq a, b \geq 0)$$

Y_n 은 n 번째 제품의 품질 상태를 나타내며 $P_{ij}^{(n)}$ 은 다음과 같이 된다.

$$P_{ij}^{(n)} = P [Y_n = j \mid Y_0 = i] \quad n = 1, 2, \dots$$

p 와 Γ 를 이용한 transition matrix P 는 아래와 같다.

$$P = \begin{bmatrix} 1 - p(1 - \Gamma) & p(1 - \Gamma) \\ (1 - p)(1 - \Gamma) & p + \Gamma(1 - p) \end{bmatrix}$$

연구목적상, Markov process에 대한 serial correlation은 ARMA process의 첫번 lag correlation으로 한다.

3. 문제 해법

시뮬레이션 방법에서는 로트당 n 개의 시료를 채취하여 각 시료가 표준(관리 한계)에 맞는지 검사한다. 관리 한계 밖으로 나가는 것을 불량으로 간주하여 이것들의 합계와 합격 판정 개수 (C)와의 비교에 의해 로트의 합격 여부를 판정한다. 근사적인 방법에서는 모든 시료에 대해 검사를 실시하여 모든 로트에 대한 불량률의 총합계를 구한다.

총 불량수를 로트수와 샘플의 수를 곱한 값으로 나누면 평균 불량률을 구할 수 있다. 이것으로 이항분포에 의한 합격 확률 P_a 를 구한다.

$$P_a = \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

연구목적상 불량률 P 와 θ 와 ϕ 의 적당한 조합을 사용하였으며, TEST의 공정성을 위해서 τ_1, τ_u 와 P 를 서로 적당히 조정하여 설정했다. $0 \leq C \leq 5, 10 \leq n \leq 50$ 인 경우에 각 검사 방법에 대한 합격 확률을 QUICK BASIC 컴퓨터 프로그램을 사용하여 비교해 보았으며, 전산 리스트는 부록 A와 같다.

τ_1, τ_u 와 P 에 대한 조합은 다음의 표 1과 같다.

생산 공정은 모델 설정에서 언급한 바와 같이 두 가지의 다른 경우를 모델로 하였으며, 전산 처리 역시 서로 다른 시나리오를 계획하여 실행하였다. 실행 결과는 부록 B와 같다.

case	ϕ	θ
1	0	0
2	0	0.25
3	0.25	0
4	0.25	0.25
5	0.25	0.25

p	μ	σ_z^2	τ_1	τ_u
0.01	10	1	7.4242	12.5758
0.10	11.2940	1	7.4242	12.5758

표 1. ϕ, θ, p 의 조합

4. 결과 분석

QUICK BASIC 프로그램으로 300개의 경우에 대해 실행하여 본 결과는 부록 B에 있는 것과 같이 나타났다.

서로 다른 모델과 이에 대하여 시뮬레이션과 근사적 방법을 통하여 합격 확률을 비교 분석한 결과 다음과 같은 사항을 알 수 있다.

첫째, 일정한 샘플 크기에 대하여 합격 판정 개수가 증가하면 합격 확률도 증가하고, 일정한 C에 대하여 샘플 수의 크기가 증가하면 합격 확률은 감소하게 되는데 이것은 독립적인 품질 특성의 샘플링 계획의 경우와 같은 결과이다.

다음, 같은 샘플 수의 크기와 합격 판정 개수에 대하여 $P=0.01$ 과 $P=0.1$ 일 경우 합격 확률이 매우 심한 차이를 보여 주고 있다. 같은 합격 판정 개수에서 샘플수가 증가할 수록 합격 확률의 차이도 증가하고 있다.

또한, 합격 판정 개수와 샘플수가 일정할 때 합격 확률은 변동하는 θ 와 일정한 ϕ 에 대하여 서로 비슷하게 나타났다. 그 반대의 경우 즉, 고정된 θ 와 증가하는 ϕ 에 대하여 합격 확률은 감소하는 것으로 나타났다. 다시 말하면 ϕ 는 생산 공정 제품의 품질에 심각한 영향을 미친다고 할 수 있다.

ARMA, Markov, 근사적 방법에서는 대부분의 경우 합격 확률이 비슷한 결과를 보이고 있다. 다만 $C=0$, $\phi=0.25$, $P=0.01$ 일 때와 $\theta=0.25$, $\phi=0.5$, $P=0.01$ 과 $P=0.1$ 일 경우에는 합격 확률이 유의할 정도로 차이를 보이고 있다. 앞서 말한대로 이러한 차이는 바로 모수 ϕ 에 기인하고 있는 것이다. ARMA process의 Z_i 에 관한 식으로부터, ϕ 의 변화는 Z_i 의 변화의 원인이 된다는 결론을 내릴 수 있겠다.

III. 결 론

일련의 제품의 품질 특성이 종속되어 있을 경우에는 이들의 특성을 고려하지 않은 샘플링 계획은 검사 자체가 의도하는 목적에서 벗어날 수 있으며, 검사 실시에 들어가는 여러 가지 비용적인 측면을 고려한 경제적 검사 계획을 수립하기도 어려울 것이다. 이 연구에서 비교하고 있는 합격 확률 외에도 AOK나 평균 샘플수를 고려한 검사 방법의 비교도 가능할 것이다. 또한 일정한 serial correlation 대신에 변화하는 serial correlation 을 정하여 샘플링 계획의 특성에 관한 연구도 할 수 있을 것으로 본다.

참 고 문 헌

1. Bhat, U.N., R. Lal, and M. Karunaratne, " A Sequential Inspection Plan for Markov Dependent Production Processes," IIE Transactions, Vol. 22, pp. 56-64, 1990.
2. Nelson, B., " Estimating Acceptance Sampling Plans for Dependent Production Processes," IIE Transactions, (Forthcoming), 1992.
3. Sampathkumar, V.S., " A Tightened m -level Continuous Sampling Plan for Markov Dependent Production Processes," IIE Transactions, Vol. 16, pp. 257-261, 1984.
4. Sarkadi, K. and I. Vincze, Mathematical Methods of Statistical Quality Control, Academic Press, N.Y., 1974.
5. Montgomery, D.C., Introduction to Statistical Quality Control, John Wiley and Sons, New York, 1985.

APPENDIX A Program Listings

```

.....
'
' SIMULATION PROJECT
'
' VEMPATI V SASTRY GREGG MAXWELL
'
'
'
.....
DIM E(500), Z(500), P(5001), PA(500)
DIM U AS DOUBLE
DIM FACTO AS DOUBLE
DIM FACTNO AS DOUBLE
DIM FACTN AS DOUBLE
SIGMAZ = 1: 'STANDARD DEVIATION OF THE MEASUREMENT Z
G = 500: 'NUMBER OF LOTS TO BE INSPECTED
NOM = 11.294: 'DESIRED NOMINAL MEASUREMENT
MU = 0: 'MEAN VALUE OF THE RANDOM VARIABLE E

LPRINT "....."

.....
' THIS PART OF THE PROGRAM USES THE SIMULATION APPROACH TO
ACCEPTANCE SAMPLING
'
.....

' THE FOLLOWING ARE THE DESCRIPTION OF SOME OF TERMS USED IN WRITING
THE
' PROGRAM

' THETA AND FEE ARE THE PRODUCTION PARAMETERS.
' AC IS THE ACCEPTANCE NUMBER
' N IS THE SAMPLE SIZE
' SIGMA IS THE STANDARD DEVIATION OF THE RANDOM VARIABLES E

FOR THETA = 0 TO .25 STEP .25
FOR FEE = 0 TO .5 STEP .25
FOR N = 10 TO 50 STEP 10
FOR AC = 0 TO 5 STEP 1
LOTREJECT = 0
A = 0
P(I) = 0
RANDOMIZE TIMER
LPRINT "NUMBER OF LOTS = "; G
LPRINT "SAMPLE SIZE = "; N
LPRINT "ACCEPTANCE NUMBER = "; AC
LPRINT "FEE = "; FEE
LPRINT "THETA = "; THETA

F = (SIGMAZ * SIGMAZ) * (1 - (FEE * FEE))
H = 1 + (THETA * THETA) + (2 * THETA * FEE)
SIGMA = SQR(F / H)

FOR I = 1 TO G
X = 0
P(I) = 0
' THIS PART GENERATES RANDOM NUMBERS BY MODIFIED MULLER
' METHOD AND USES THE SAME TO CALCULATE THE MEASURE OF
' INTEREST
FOR J = 1 TO N
R1 = RND(1)
R2 = RND(1)
B = 2 * R1 - 1
C = 2 * R2 - 1
W = B * B + C * C
IF W > 1 THEN GOTO 460
TEMP = SQR(-2 * (LOG(W)) / W)
Z1 = B * TEMP
Z2 = C * TEMP
P = (SIGMA / SIGMAZ) ^ .5
Z1(0) = MU + SIGMAZ * Z1
E1(0) = MU + SIGMA * (P * Z1 + ((1 - P ^ 2) ^ .5) * Z2)
E1(J) = SIGMA * Z1
Z1(J) = NOM + FEE * (Z1(J - 1) - NOM) + THETA * E1(J - 1) + E1(J)
.....
' THIS PART CHECKS THE MEASUREMENT WHETHER IT FALLS IN THE
CONTROL
LIMITS OR NOT. IF THE PART FALLS OUTSIDE OF THE CONTROL LIMITS
THE PART IS TERMED AS DEFECTIVE AND THE NUMBER OF DEFECTIVES
IS
' INCREMENTED BY ONE.
IF Z1(J) < 7.4242 OR Z1(J) > 12.5758 THEN
X = X + 1
P(I) = P(I) + 1

```

```

.....
SIMULATION PROJECT
.....
BY
VEMPATI V SASTRY          GREGG MAXWELL
.....
DIM U AS DOUBLE
DIM FACTNO AS DOUBLE
DIM FACTN AS DOUBLE
DIM FACTO AS DOUBLE
NLOT = 500
P = .01
600 FOR FEE = 0 TO .5 STEP .15
  FOR THETA = .5 TO .95 STEP .05
    R1 = (1 + FEE * THETA) * (FEE + THETA) / ((1 + THETA) * THETA + 2 * FEE *
    THETA)
    FOR N = 10 TO 50 STEP 10
      FOR C = 0 TO 5
        LPRINT "-----"
        LPRINT "THE NUMBER OF LOTS = ", NLOT
        LPRINT " "
        LPRINT "THE SAMPLE SIZE = ", N
        LPRINT " "
        LPRINT "THE ACCEPTANCE NUMBER = ", C
        LPRINT " "
        LPRINT "THE SERIAL CO-EFFICIENT=", R1
        LPRINT " "
        LPRINT "THE FRACTION DEFECTIVE = ", P
        LPRINT " "
        LPRINT "THETA = ", THETA
        LPRINT " "
        LPRINT "FEE = ", FEE
        .....
        * THIS PART OF THE PROGRAM FINDS THE PROBABILITY OF ACCEPTANCE
        THROUGH SIMULATION
        * THE PROCESS IS ASSUMED TO FOLLOW MARKOVIAN DEPENDENCY
        NREJECT = 0
        NDEF = 0
        NDF = 0
        NACCEPT = 0
        FOR I = 1 TO NLOT
          X = RND
          NDEF = 0
          IF X < P THEN
            ITEMS$ = "DEFECTIVE"
          ELSE
            ITEMS$ = "GOOD"
          END IF
          FOR J = 1 TO N - 1
            X = RND
            IF ITEMS$ = "GOOD" THEN
              IF X <= 1 - (P * (1 - R1)) THEN
                ITEMS$ = "GOOD"
                GOTO 125
              ELSE
                ITEMS$ = "DEFECTIVE"
                NDEF = NDEF + 1
                GOTO 125
              END IF
            ELSE
              IF X <= (1 - P) * (1 - R1) THEN
                ITEMS$ = "GOOD"
                GOTO 125
              ELSE
                ITEMS$ = "DEFECTIVE"
                NDEF = NDEF + 1
                GOTO 125
              END IF
            END IF
          END IF
        125 NEXT J
          IF NDEF > C THEN
            NREJECT = NREJECT + 1
          END IF
          NDF = NDF + NDEF
        NEXT I
        NACCEPT = NLOT - NREJECT
        PROB = NACCEPT / NLOT
        LPRINT "PROBABILITY OF ACCEPTANCE BY SIMULATION = ", PROB
        .....
        * THIS PART OF THE PROGRAM FINDS THE PROBABILITY OF ACCEPTANCE
        THROUGH THE
        * APPROXIMATION METHOD

```


APPENDIX B Study Results

Values of Pa for Theta = 0 and Phi = 0

c/n	p = .01					p = .10					
	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	
0	M	0.9200	0.8220	0.7540	0.6780	0.6100	0.3820	0.1480	0.0420	0.0280	0.0040
	A	0.9228	0.8312	0.7518	0.6799	0.6123	0.4042	0.1460	0.0500	0.0170	0.0060
	R	0.9140	0.8160	0.7620	0.6420	0.5720	0.3700	0.0980	0.0440	0.0100	0.0060
	A	0.9099	0.8081	0.7518	0.6516	0.5850	0.3629	0.1163	0.0390	0.0149	0.0050
1	M	1.0000	0.9960	0.9660	0.9340	0.9260	0.7800	0.4360	0.1860	0.0880	0.0660
	A	0.9968	0.9859	0.9685	0.9377	0.9154	0.7784	0.4400	0.1970	0.0820	0.0400
	R	0.9660	0.9820	0.9700	0.9380	0.9000	0.7100	0.3980	0.1760	0.0580	0.0340
	A	0.9951	0.9822	0.9706	0.9388	0.9181	0.7205	0.3831	0.1760	0.0700	0.0360
2	M	1.0000	0.9980	1.0000	0.9900	0.9900	0.9600	0.7380	0.4500	0.2480	0.1080
	A	0.9995	0.9988	0.9975	0.9905	0.9871	0.9532	0.7381	0.4661	0.2437	0.1266
	R	1.0000	0.9980	0.9960	0.9840	0.9860	0.9160	0.6840	0.3740	0.2000	0.1280
	A	0.9999	0.9987	0.9957	0.9930	0.9883	0.9306	0.6990	0.4119	0.2382	0.1210
3	M	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9900	0.9900	0.9680	0.6600	0.4300	0.2700
	A	1.0000	0.9995	0.9999	0.9995	0.9978	0.9921	0.8703	0.6649	0.4436	0.2703
	R	1.0000	1.0000	1.0000	0.9980	0.9980	0.9840	0.8600	0.6620	0.4360	0.2500
	A	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9990	0.9886	0.8436	0.6493	0.4414	0.2509
4	M	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9980	1.0000	0.9680	0.8520	0.6800	0.4720
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9969	0.9674	0.8430	0.6613	0.4640
	R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9700	0.8680	0.5920	0.4520	
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9986	0.9604	0.8380	0.5972	0.4294
5	M	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9920	0.9440	0.8220	0.6520	
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9902	0.9342	0.8076	0.6357	
	R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9820	0.9380	0.7926	0.6100	
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9881	0.9283	0.7995	0.6140	

Values of Pa for Theta = 0 and Phi = 0.25

c/n	p = .01					p = .10					
	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	
0	M	0.9180	0.8620	0.8220	0.7020	0.7020	0.4520	0.2560	0.1180	0.0420	0.0200
	A	0.9062	0.8380	0.7732	0.6503	0.6211	0.3809	0.1474	0.0400	0.0172	0.0052
	R	0.5080	0.4340	0.3820	0.3760	0.3180	0.3980	0.1360	0.0630	0.0180	0.0120
	A	0.5630	0.4920	0.4565	0.4074	0.3657	0.3694	0.1165	0.0427	0.0130	0.0050
1	M	0.9820	0.9580	0.9360	0.8960	0.8430	0.7560	0.4440	0.2640	0.1320	0.0800
	A	0.9961	0.9815	0.9643	0.9366	0.8802	0.7477	0.4228	0.2087	0.0993	0.0379
	R	0.9340	0.9000	0.8320	0.7860	0.7500	0.7980	0.4320	0.2120	0.1080	0.0580
	A	0.8770	0.8470	0.8032	0.7604	0.7400	0.7761	0.4062	0.1899	0.0845	0.0410
2	M	1.0000	0.9800	0.9860	0.9500	0.9560	0.9100	0.6780	0.5040	0.2940	0.1940
	A	1.0000	0.9985	0.9879	0.9890	0.9839	0.9513	0.6767	0.4452	0.2393	0.1384
	R	0.9900	0.9920	0.9800	0.9840	0.9600	0.9160	0.6700	0.4380	0.2760	0.1180
	A	0.9825	0.9692	0.9776	0.9524	0.9222	0.9312	0.6889	0.4400	0.2512	0.1020
3	M	1.0000	1.0000	1.0000	0.9980	0.9980	0.9880	0.9620	0.8400	0.6260	0.4760
	A	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9985	0.9931	0.8924	0.6418	0.4153	0.2503
	R	1.0000	0.9980	0.9980	0.9940	0.9930	0.9860	0.8560	0.6540	0.4680	0.2560
	A	0.9983	0.9959	0.9916	0.9881	0.9836	0.9859	0.8699	0.6540	0.4385	0.2355
4	M	1.0000	0.9480	0.9960	0.9980	0.9980	0.9900	0.9360	0.7960	0.6160	0.5080
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9715	0.8259	0.6377	0.4828
	R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9600	0.9280	0.8140	0.6580	0.4740
	A	0.9999	1.0000	0.9989	0.9980	0.9955	0.9983	0.9520	0.8343	0.6650	0.4454
5	M	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9940	0.9660	0.8800	0.7600	0.6400
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9916	0.9397	0.8129	0.6500	
	R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9880	0.8920	0.7820	0.6350	
	A	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	1.0000	0.9870	0.9204	0.7941	0.6370	

Values of Pa for Theta = .25 and Phi = 0.00

c/n	p = .01					p = .10					
	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	
0	M	0.9380	0.8520	0.8220	0.7380	0.6880	0.4600	0.1920	0.1240	0.0520	0.0140
	A	0.9284	0.8081	0.7710	0.6609	0.6216	0.3994	0.1311	0.0500	0.0200	0.0050
	R	0.9200	0.8260	0.7200	0.6540	0.6120	0.3800	0.1500	0.0500	0.0240	0.0060
	A	0.9154	0.8250	0.7294	0.6542	0.5970	0.3441	0.1326	0.0441	0.0138	0.0052
1	M	0.9740	0.9760	0.9120	0.9060	0.8560	0.7880	0.4460	0.2700	0.1500	0.0860
	A	0.9931	0.9873	0.9503	0.9445	0.8900	0.7860	0.4240	0.1886	0.0900	0.0400
	R	0.9960	0.9860	0.9660	0.9300	0.9080	0.7380	0.3740	0.1880	0.1020	0.0320
	A	0.9951	0.9838	0.9664	0.9403	0.9051	0.7353	0.3438	0.1627	0.0714	0.0381
2	M	0.9920	0.9900	0.9800	0.9720	0.9700	0.9100	0.6760	0.4720	0.3020	0.1980
	A	0.9998	0.9991	0.9972	0.9926	0.9873	0.9500	0.6991	0.6090	0.2500	0.1362
	R	1.0000	1.0000	0.9960	0.9900	0.9840	0.9160	0.6800	0.4360	0.2740	0.1340
	A	0.9997	0.9991	0.9961	0.9921	0.9875	0.9187	0.6655	0.4185	0.2274	0.1194
3	M	0.9980	0.9920	1.0000	0.9960	0.9800	0.9700	0.8480	0.6420	0.4960	0.2880
	A	1.0000	1.0000	0.9998	0.9997	0.9980	0.9901	0.8834	0.6653	0.4770	0.2690
	R	1.0000	1.0000	1.0000	0.9980	0.9960	0.9800	0.8560	0.6540	0.4120	0.3140
	A	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9988	0.9876	0.8605	0.6710	0.3972	0.2693
4	M	1.0000	0.9980	0.9960	1.0000	0.9980	0.9920	0.9420	0.8220	0.6280	0.4820
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9735	0.8356	0.6414	0.4609
	R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9900	0.9380	0.7720	0.6140	0.4220
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9531	0.7978	0.6117	0.4078
5	M	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9980	0.9980	0.9700	0.9060	0.8080	0.6120
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9990	0.9432	0.8187	0.6147	
	R	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9760	0.8960	0.7860	0.6130	
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9856	0.9184	0.8039	0.6055	

Values of Pa for Theta = .25 and Phi = 0.25

c/n	p = .01					p = .10					
	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	
0	M	0.9560	0.9040	0.8700	0.8000	0.7620	0.5680	0.3280	0.1860	0.0980	0.0700
	A	0.9359	0.8413	0.7796	0.6516	0.5740	0.3960	0.1370	0.0500	0.0180	0.0080
	R	0.4700	0.4380	0.3780	0.3680	0.3440	0.4220	0.1800	0.0740	0.0200	0.0120
	A	0.5351	0.5016	0.4390	0.4192	0.3808	0.3589	0.1112	0.0360	0.0160	0.0040
1	M	0.9860	0.9600	0.9300	0.9180	0.9080	0.7720	0.5200	0.3540	0.2380	0.1680
	A	0.9979	0.9863	0.9760	0.9600	0.9359	0.7893	0.5859	0.2100	0.0960	0.0440
	R	0.9240	0.8960	0.8420	0.8000	0.7480	0.7340	0.4720	0.2700	0.1580	0.0900
	A	0.8744	0.8419	0.8039	0.7744	0.7356	0.7115	0.4044	0.2094	0.1000	0.0390
2	M	0.9900	0.9720	0.9600	0.9620	0.9400	0.8700	0.7640	0.4840	0.4140	0.2800
	A	0.9999	0.9990	0.9957	0.9939	0.9872	0.9469	0.7081	0.4000	0.2979	0.1370
	R	0.9940	0.9840	0.9680	0.9420	0.9340	0.8860	0.6680	0.4540	0.2680	0.1780
	A	0.9808	0.9696	0.9600	0.9366	0.9237	0.9211	0.6604	0.4286	0.2225	0.1120
3	M	0.9940	0.9920	0.9840	0.9760						

Values of Pa when Theta = 0.25 and Phi = 0.50

c \ n	p = .01					p = .10					
	10	20	30	40	50	10	20	30	40	50	
0	M	0.9460	0.9360	0.9080	0.8400	0.8480	0.6700	0.4780	0.3400	0.2100	0.1180
	A	0.8860	0.8550	0.7850	0.6582	0.6626	0.4059	0.1533	0.0500	0.0170	0.0050
	R	0.0460	0.0420	0.0400	0.0460	0.0200	0.0800	0.0440	0.0140	0.0180	0.0100
	A	0.1646	0.1656	0.1560	0.1470	0.1170	0.1769	0.0630	0.0220	0.0080	0.0025
1	M	0.9800	0.9400	0.9400	0.8880	0.8780	0.8020	0.6020	0.4860	0.3660	0.2340
	A	0.9956	0.9690	0.9737	0.9162	0.8913	0.7829	0.4480	0.1978	0.0840	0.0298
	R	0.4740	0.4900	0.4220	0.3640	0.3620	0.5760	0.2980	0.1540	0.1020	0.0600
	A	0.4940	0.4823	0.4331	0.4171	0.4077	0.5131	0.2196	0.0950	0.0453	0.0169
2	M	0.9840	0.9660	0.9640	0.9360	0.9220	0.8580	0.7180	0.5380	0.4760	0.3760
	A	0.9999	0.9990	0.9978	0.9921	0.9844	0.9398	0.7160	0.5983	0.2954	0.1359
	R	0.8580	0.8220	0.8300	0.7500	0.7620	0.8300	0.5200	0.3880	0.2480	0.1660
	A	0.7820	0.7480	0.7357	0.6917	0.6933	0.7859	0.4618	0.3013	0.1507	0.0734
3	M	0.9980	0.9900	0.9740	0.9560	0.9420	0.9240	0.7780	0.6780	0.5920	0.4280
	A	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9974	0.9940	0.8530	0.7022	0.5119	0.2269
	R	0.9342	0.9179	0.8939	0.8827	0.8550	0.9603	0.7348	0.5295	0.2978	0.1629
	A	0.9960	0.9880	0.9720	0.9660	0.9720	0.9660	0.8320	0.7460	0.6340	0.5480
4	M	0.9960	0.9880	0.9720	0.9660	0.9720	0.9660	0.8320	0.7460	0.6340	0.5480
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9516	0.8380	0.6409	0.4677
	R	0.9960	0.9940	0.9920	0.9860	0.9620	0.9780	0.8520	0.7060	0.5260	0.4160
	A	0.9876	0.9714	0.9665	0.9617	0.9479	0.9885	0.9001	0.7098	0.5004	0.3105
5	M	0.9940	0.9880	0.9900	0.9900	0.9900	0.9740	0.8360	0.7960	0.7600	0.6140
	A	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9890	0.9260	0.8537	0.6054
	R	1.0000	0.9980	0.9920	0.9960	0.9840	0.9920	0.9280	0.8360	0.6900	0.5500
	A	1.0000	0.9920	0.9912	0.9871	0.9834	0.9977	0.9641	0.8860	0.7974	0.5178

Values of Pa for Theta = 0 and Phi = 0.25

c \ n	p = .01					p = .10				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	M	0.9820					0.7560			
	A	0.9961					0.7477			
	R	0.9340						0.7980		
	A	0.8770						0.7761		
2	M	0.9980	1.0000				0.6780	0.9100		
	A	0.9985	1.0000				0.6767	0.9513		
	R	0.9920	0.9900				0.6740	0.9160		
	A	0.9692	0.9825				0.6889	0.9312		
3	M	0.9980	1.0000				0.6260	0.9620		
	A	0.9998	1.0000				0.6418	0.9931		
	R	0.9930	1.0000				0.6510	0.9800		
	A	0.9916	0.9993				0.6540	0.9899		
4	M	0.9980	0.9480			1.0000	0.6360	0.9360	0.9900	
	A	1.0000	1.0000			1.0000	0.6377	0.9715	0.9984	
	R	1.0000	1.0000			1.0000	0.6380	0.9280	0.9960	
	A	0.9980	1.0000			0.9999	0.6690	0.9520	0.9983	
5	M	1.0000				1.0000	0.6400			0.9940
	A	1.0000				1.0000	0.6500			1.0000
	R	1.0000				1.0000	0.6360			1.0000
	A	1.0000				1.0000	0.6376			1.0000

Values of Pa for Theta = 0 and Phi = 0

c \ n	p = .01					p = .10				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	M	1.0000					0.7800			
	A	0.9968					0.7784			
	R	0.9660					0.7100			
	A	0.9951					0.7205			
2	M	0.9980	1.0000				0.7380	0.9600		
	A	0.9988	0.9999				0.7381	0.9532		
	R	0.9980	1.0000				0.6840	0.9160		
	A	0.9987	0.9995				0.6590	0.9360		
3	M	1.0000	1.0000				0.6660	0.9900		
	A	0.9999	1.0000				0.6649	0.9921		
	R	1.0000	1.0000				0.6620	0.9840		
	A	0.9998	1.0000				0.6493	0.9886		
4	M	1.0000	1.0000	1.0000			0.6800	0.9680	1.0000	
	A	1.0000	1.0000	1.0000			0.6619	0.9674	0.9989	
	R	1.0000	1.0000	1.0000			0.5920	0.9700	1.0000	
	A	1.0000	1.0000	1.0000			0.5972	0.9604	0.9986	
5	M	1.0000				1.0000	0.6520			1.0000
	A	1.0000				1.0000	0.6397			1.0000
	R	1.0000				1.0000	0.6100			1.0000
	A	1.0000				1.0000	0.6140			1.0000

Values of Pa for Theta = 0.25 and Phi = 0.00

c \ n	p = .01					p = .10				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	M	0.9740					0.7880			
	A	0.9931					0.7860			
	R	0.9960					0.7280			
	A	0.9951					0.7353			
2	M	0.9900	0.9920				0.6760	0.9100		
	A	0.9991	0.9998				0.6991	0.9500		
	R	1.0000	1.0000				0.6800	0.9160		
	A	0.9991	0.9997				0.6655	0.9137		
3	M	1.0000	0.9980				0.6420	0.9700		
	A	0.9998	1.0000				0.6658	0.9901		
	R	1.0000	1.0000				0.6540	0.9800		
	A	0.9997	1.0000				0.6715	0.9875		
4	M	1.0000	0.9980			1.0000	0.6240	0.9420	0.9920	
	A	1.0000	1.0000			1.0000	0.6414	0.9735	0.9937	
	R	1.0000	1.0000			1.0000	0.6140	0.9380	0.9900	
	A	1.0000	1.0000			1.0000	0.6117	0.9531	0.9978	
5	M	0.9980				1.0000	0.6120			0.9960
	A	1.0000				1.0000	0.6147			0.9999
	R	1.0000				1.0000	0.6180			1.0000
	A	1.0000				1.0000	0.6025			0.9990

Values of Pa for Theta = 0.25 and Phi = 0.25

c n	p = .01					p = .10				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	M	0.9860					0.7720			
	A	0.9973					0.7698			
	R	0.9280					0.7340			
	A	0.8744					0.7415			
2	M	0.9720	0.9900				0.7040	0.8700		
	A	0.9990	0.9999				0.7081	0.9469		
	R	0.9840	0.9940				0.6680	0.8860		
	A	0.9698	0.9808				0.6604	0.9231		
3	M	0.9840	0.9940				0.6380	0.9260		
	A	0.9998	1.0000				0.6592	0.9665		
	R	0.9920	0.9960				0.6540	0.9660		
	A	0.9891	0.9976				0.6456	0.9651		
4	M	0.9880	1.0000	0.9960			0.6320	0.8640	0.9700	
	A	1.0000	1.0000	1.0000			0.6295	0.9600	0.9992	
	R	1.0000	1.0000	1.0000			0.6320	0.9240	0.9920	
	A	0.9933	0.9992	0.9998			0.6436	0.9619	0.9976	
5	M	0.9960			1.0000		0.6320			0.9820
	A	1.0000			1.0000		0.6061			1.0000
	R	1.0000			1.0000		0.6160			1.0000
	A	1.0000			1.0000		0.6150			1.0000

Values of Pa for Theta = 0.25 and Phi = 0.50

c n	p = .01					p = .10				
	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
1	M	0.9800					0.8020			
	A	0.9956					0.7829			
	R	0.4740					0.5760			
	A	0.4940					0.5131			
2	M	0.9660	0.9840				0.7180	0.8580		
	A	0.9990	0.9999				0.7153	0.9398		
	R	0.8220	0.8520				0.5200	0.8100		
	A	0.7485	0.7820				0.4613	0.7859		
3	M	0.9740	0.9930				0.6780	0.9240		
	A	0.9998	1.0000				0.7022	0.9940		
	R	0.8939	0.9342				0.5295	0.9603		
	A	0.9720	0.9960				0.7460	0.9660		
4	M	0.9660	0.9880	0.9960			0.6340	0.8320	0.9660	
	A	1.0000	1.0000	1.0000			0.6409	0.9516	1.0000	
	R	0.9660	0.9940	0.9960			0.5260	0.8520	0.9730	
	A	0.9627	0.9714	0.9870			0.5001	0.9001	0.9885	
5	M	0.9900			0.9940		0.6140			0.9740
	A	1.0000			1.0000		0.6054			1.0000
	R	0.9840			1.0000		0.5500			0.9920
	A	0.9934			1.0000		0.5270			0.9977