

---

 論 文
 

---

大韓造船學會論文集  
 第 29 卷第 3 號 1992 年 8 月  
 Transactions of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 29, No.3, August 1992

## 대칭 복합적층 직사각형판의 진동해석

정태영\*, 정정훈\*

### Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Composite Rectangular Plates

by

T. Y. Chung\* and J. H. Chung\*

#### 요 약

복합적층판은 일반적으로 이방성이고 전단탄성계수의 인장탄성계수에 대한 비가 강판등 일반 구조용 판재와 비교하여 상당히 작다. 따라서 동특성해석은 원칙적으로 이방성 후판이론에 기초하는 것이 타당하다. 또 판의 주변 경계조건은 단순지지와 고정의 중간상태일 때가 많다. 본 연구에서는 4변이 회전에 대해 탄성구속된 대칭 복합적층 직사각형판의 진동해석에 대해 이방성 후판이론에 의거하여 정식화하고, 엄밀해를 구하기 어려운 점을 고려하여 Timoshenko 보합수 성질을 갖는 다항식을 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석방법을 제시했다. 일련의 수치계산 예를 통해 기존의 다른 방법에 의한 연구결과들과 비교하므로써 전기해석방법의 유용성이 검증되었다. 또한, 이방성 복합적층판의 경우에는 nodal line이 매우 휘어진 양태이며, 보다 정확한 해석을 위해서는 진동파형가정에 있어서 직교이방성인 경우보다 더 많은 항수를 취할 필요가 있음이 확인되었다.

#### Abstract

The free vibration problem of symmetrically laminated composite rectangular plates is formulated based on anisotropic thick plate theory including the effects of shear deformation and rotary inertia. Considering the difficulty of obtaining closed-form solutions, Rayleigh-Ritz analysis using polynomials having the property of Timoshenko beam functions as trial functions is adopted. The boundary conditions elastically restrained against rotation are accommodated as well as classical boundary conditions.

From the results of numerical studies, the validity of the present method is verified. And

---

접수일자: 1992년 2월 6일, 재접수일자: 1992년 4월 13일

\* 한국해사기술연구소

it is also found that the adoption of thick plate theory for the vibration analysis of laminated composite plates is essential because of the relatively large shear deformation effect, and that the convergence of the Rayleigh quotient to the stationary value is less rapid in anisotropic composite plates than that in the orthotropic ones due to more complicated mode shapes of the former.

1. 서 론

섬유강화 복합재료는 일반금속재료에 비해 비강도(比強度)와 비강성(比剛性)이 커서 설계대상구조물의 경량화가 가능할 뿐만 아니라 적층순서 및 적층각도를 용도에 따라 적절하게 선택하여 사용할 수 있기 때문에 선박 및 해양분야, 우주항공분야등 여러산업 분야에서 그 사용이 확대되어 가고 있다. 그러나, 복합재료는 일반금속재료에 비하여 재료물성의 평가가 어렵고 이방성 재료이기 때문에 복합재료로 구성된 구조물의 동특성해석은 쉽지 않다.

섬유강화 복합재료를 이용한 판구조계는 cross-ply 또는 angle-ply 적층구조를 갖고 있는데, 일반적으로 전단탄성계수가 인장탄성계수보다 상당히 작아 전단 변형효과가 크고 또 단면의 회전관성효과도 무시할 수 없기 때문에 이방성 후판이론의 도입이 필요하다.

판의 전단변형 및 회전관성효과를 고려한 후판의 진동해석은 Mindlin[1]이 등방성평판에 대하여 이론을 정립한 이후 많은 연구가 수행되었다. Yang 등 [2]은 Mindlin판이론을 이방성 복합적층판에 도입하여 무한장 평판의 파동전달문제를 다루었으며, Whitney 등[3], Bert 등[4]이 4변 모두 단순지지된 이방성 복합적층 직사각형판의 고유진동 엄밀해를 구하였다. 4변 모두 단순지지인 경우를 제외하고는 엄밀해를 구하기 어렵기때문에 근사적 방법의 사용이 불가피하다. 여러가지 근사적 방법중 Craig 등 [5]은 Timoshenko 보합수를 이용한 Rayleigh-Ritz 방법과 유한대판법에 의거, Bowls 등[6]은 조화함수를 이용한 Galerkin 방법에 의거하여 고전적 경계조건을 갖는 이방성 복합적층판의 고유진동해석을 수행하였다. 최근 저자등[7]이 회전에 대하여 탄성구속 경계조건을 갖는 직교이방성 Mindlin판유추 구조계의 진동에 대한 Rayleigh-Ritz 해석을 위해 우선 Timoshenko 보합수 성질을 갖는 다항식(이하 특성다항식이라 지칭함)을 도출하고, 이 특성다항식을 진동 파형가정함수로 이용하는 방법이 정확도 및 계산효

율면에서 광히 매우 유용성이 높음을 확인하였다. 본 연구에서는 4변이 회전에 대해 탄성구속된 대칭 복합적층 직사각형판의 진동문제에 대해 우선 이방성 후판이론에 의거 정식화하고, 엄밀해를 구하기 어려운 점을 고려하여 앞에서 기술한 특성다항식을 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석방법의 유용성에 관해 일련의 검토를 수행했다.

2. 정식화

2.1 운동방정식 및 경계조건

대상 복합적층판은 직교이방성 섬유강화 복합재료로 이루어진 단층판이 여러개 적층된 균일두께의 직사각형 판으로서 적층구조가 판의 중앙면에 관해 대칭이며, 판의 좌표계는 Fig.1과 같이 정의한다.

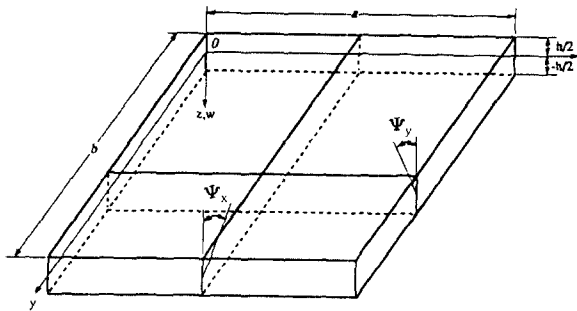


Fig. 1 Coordinates system of a rectangular laminated composite thick plate

이러한 대칭 복합적층판의 고유진동방정식은 전단변형 및 회전관성을 고려한 이방성 후판이론으로부터

$$\begin{aligned}
 I \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} &= D_{11} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \\
 &+ D_{16} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \\
 &+ A_{55} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \psi_x \right) + A_{45} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \psi_y \right) \\
 I \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} &= D_{16} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+D_{22} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} \\
 &+ A_{45} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - \psi_x \right) + A_{44} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \psi_y \right) \\
 P \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} &= A_{55} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) + A_{44} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\
 &+ A_{45} \left( 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

와 같이 기술된다[2,3]. 여기서  $\psi_x(x,y,t)$ ,  $\psi_y(x,y,t)$  및  $w(x,y,t)$ 는 Fig. 1에 보인 바와 같이 차례로 판의  $xz$ ,  $yz$  평면의 굽힘회전각 및 횡방향처짐변위이고,  $P$ 와  $I$ 는 각기 단위면적당 판의 질량과 회전관성모멘트이며  $D_{ij}$ 는 굽힘/비틀림관련 강성계수,  $A_{ij}$ 는 전단관련 강성계수인데, 이들의 구체적인 정의와 산정방법은 다음 절에서 기술한다.

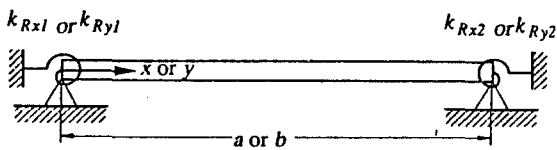


Fig. 2 Edges boundary conditions

Fig. 2에 보인 바와 같이 4변 모두 회전에 대해 탄성구속된 경우의 경계조건식은

$$\begin{aligned}
 &\omega(x,y,t)|_{x=0 \text{ or } a=0} \\
 &\psi_x(x,y,t)|_{x=0 \text{ or } a=0} \\
 M_x|_{x=0} &= -\{D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{16} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\} |_{x=0} \\
 &= -k_{Rx1} \psi_x|_{x=0} \\
 M_x|_{x=a} &= -\{D_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + D_{16} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\} |_{x=a} \\
 &= k_{Rx1} \psi_x|_{x=a} \\
 &\omega(x,y,t)|_{y=0 \text{ or } b=0} \\
 &\psi_y(x,y,t)|_{y=0 \text{ or } b=0} \\
 M_y|_{y=0} &= -\{D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + D_{26} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\} |_{y=0} \\
 &= -k_{Ry1} \psi_y|_{y=0} \\
 M_y|_{y=b} &= -\{D_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + D_{26} \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) + D_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y}\} |_{y=b} \\
 &= k_{Ry1} \psi_y|_{y=b}
 \end{aligned} \tag{2}$$

와 같다. 여기서  $M_x$ 와  $M_y$ 는 각각  $x$  및  $y$ 방향 단위 길이당 굽힘모멘트이고  $k_{Rx1}$ ,  $k_{Rx2}$ ,  $k_{Ry1}$  및  $k_{Ry2}$ 는 차례로  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$  및  $y=b$ 에서의 단위길이당 회전스프링상수이다.

### 2.2 계특성치 산정

재료의 성질이 직교이방성인 섬유강화 복합재료 단층판의 주재료방향(principal material direction)을 Fig. 3과 같이 정의한다. 여기서 축1은 판의 중앙

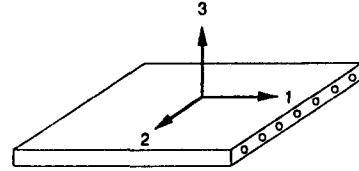


Fig. 3 Principal material axes of a single, unidirectional ply

면내에서 섬유길이방향과 평행이며, 축2는 축1에 수직이고 축3은 판의 중앙면에 수직하다. 이러한 단층판의 응력-변형률 관계식은 축3방향 법선응력  $\sigma_3$ 를 무시할 경우

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} \tag{3}$$

와 같다[9,10]. 여기서 강성행렬의 요소인  $Q_{ij}$  및  $C_{ij}$ 는 각기 단층판의 주재료방향에 대한 축소강성계수(reduced-stiffness coefficients) 및 탄성계수로서 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{66} &= G_{12}, \quad C_{44} = G_{23}, \quad C_{55} = G_{13}
 \end{aligned} \tag{4}$$

여기서,

- $E_1, E_2$  = 1, 2방향으로의 인장탄성계수
- $\nu_{12}$  = 1방향 인장에 대한 2방향 수축을 지배하는 Poisson 비
- $\nu_{21}$  = 2방향 인장에 대한 1방향 수축을 지배하는 Poisson 비
- $G_{ij}$  =  $ij$ 면내 전단탄성계수

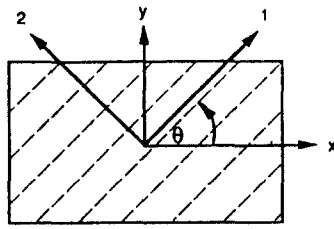


Fig. 4 Principal material axis and structural axes for a single-ply

한편, 단층판의 주재료방향이 Fig. 4에 보인 바와 같이 판의 좌표축 x 및 y와  $\theta$ 만큼의 각을 가질 때 x, y방향의 응력-변형을 관계식은 좌표변환을 이용하여 유도하면

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

와 같이 귀착된다. 여기서  $\bar{Q}_{ij}$  및  $\bar{C}_{ij}$ 는 좌표변환된 판의 좌표축에 대한 축소강성계수 및 탄성계수를 나타내며 주재료방향에 대한  $Q_{ij}$  및  $C_{ij}$  (4)로부터 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^4 & 2c^2s^2 & s^4 & 4c^2s^2 \\ c^2s^2 & c^4+s^4 & c^2s^2 & -4c^2s^2 \\ s^4 & 2c^2s^2 & c^4 & 4c^2s^2 \\ c^3s & -cs(c^2-s^2) & -cs^3 & -2cs(c^2-s^2) \\ cs^3 & cs(c^2-s^2) & -c^3s & 2cs(c^2-s^2) \\ c^2s^2 & -2c^2s^2 & c^2s^2 & (c^2-s^2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{44} \\ \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 \\ -sc & sc \\ s^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{44} \\ C_{55} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서  $c=\cos\theta$ ,  $s=\sin\theta$ 이다.

적층구조가 Fig. 5에 보인 바와 같이 판의 중양면에 대하여 대칭인 복합적층판에서 판의 좌표축(x, y)에 대한 굽힘/비틀림관련 강성  $D_{ij}$ 들은 (6)으로 산정되는  $\bar{Q}_{ij}$ 들로부터 다음과 같이 산정된다.

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz$$

$$= \frac{2}{3} \left[ \sum_{m=1}^{N-1} (\bar{Q}_{ij})_m (h_m^3 - h_{m+1}^3) + (\bar{Q}_{ij})_N h_N^3 \right] \quad (7)$$

$i, j=1, 2, 6$

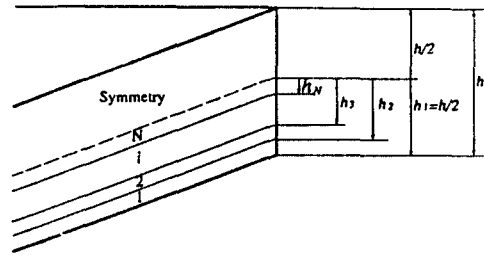


Fig. 5 Laminate nomenclature for symmetrically laminated composite plates

여기서 h는 판의 두께, N은 판의 1/2 두께에 걸쳐 적층된 단층판의 수, 하첨자 m은 m번째 단층판의 의미하며  $h_m$ 은 복합적층판의 m번째 단층판의 아랫면으로부터 판중양면까지의 높이이다(Fig. 5 참조).

또한, 판두께방향으로의 불균일한 전단응력 분포를 균일하다고 가정하고, 이에 대한 보상으로서 전단수정계수  $k_i k_j$ 를 도입하면 전단관련강성  $A_{ij}$ 는 다음과 같이 산정한다.

$$A_{ij} = k_i k_j \int_{-h/2}^{h/2} \bar{C}_{ij} dz$$

$$= 2k_i k_j \left[ \sum_{m=1}^{N-1} (\bar{C}_{ij})_m (h_m - h_{m+1}) + (\bar{C}_{ij})_N h_N \right]$$

$$= k_i k_j S_{ij}, \quad i, j=4, 5 \quad (8)$$

$k_i k_j$ 의 정확한 산정은 매우 중요하나 아직 이론이 정립되지 못하고 있다. Chow[11]는 정하중을 받는 대칭 직교이방성 적층판이 원통형 굽힘상태에 있을 때를 가정하여 변형에너지법에 의거하여 전단수정계수를 산정하였고, Whitney[12]는 이를 비대칭적층판에 확장하였다. 본 연구에서는 Chow[11]의 이론에 기초하여 전단수정계수를 다음과 같이 산정한다.

$$1/k_i^2 = \frac{S_{ij}}{2D_{ij}^2} \left[ \sum_{m=1}^{N-1} \left( \frac{Q_{ij}^2}{C_{ij}} \right)_m (a_m^2 (h_m - h_{m+1}) + 2/3 a_m (h_m^3 - h_{m+1}^3) + 1/5 (h_m^5 - h_{m+1}^5)) \right] \quad (9)$$

$i=4, 5 ; j=6-i$

여기서

$$\begin{aligned}
 a_1 &= h_1^2 \\
 a_m &= h_m^2 + \left(\frac{Q_{11}}{C_{11}}\right)_m (a_{m-1} - h_m^2) \\
 h_{N+1} &= 0
 \end{aligned}$$

판의 단위면적당 질량 및 회전관성모멘트 P 및 I는 다음과 같이 산정한다.

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, dz \\
 &= 2 \left[ \sum_{m=1}^{N-1} \rho_m (h_m - h_{m+1}) + \rho_N h_N \right] \\
 I &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \, z^2 \, dz \\
 &= \frac{2}{3} \left[ \sum_{m=1}^{N-1} \rho_m (h_m^3 - h_{m+1}^3) + \rho_N h_N^3 \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서  $\rho_m$ 은 m번째 단층판의 질량밀도이며, 기타 기호들의 정의는 앞에서와 같다.

### 2.3 Rayleigh-Ritz 해석

4변 단순지지인 경우를 제외하고는 엄밀해를 구하기 어렵기 때문에 근사적 방법의 사용이 불가피하다. 여기서는 Timoshenko 보합수 성질을 갖는 특성다항식을 이용하는 Rayleigh-Ritz 해석방법을 택한다.

부차원 길이 좌표  $\xi = x/a, \eta = y/b$ 를 도입하고, 조화운동

$$\begin{aligned}
 \omega(\xi, \eta, t) &= W(\xi, \eta) e^{i\omega t} \\
 \psi_\xi(\xi, \eta, t) &= \Psi_\xi(\xi, \eta) e^{i\omega t} \\
 \psi_\eta(\xi, \eta, t) &= \Psi_\eta(\xi, \eta) e^{i\omega t}
 \end{aligned} \tag{11}$$

을 가정할 때 최대변형에너지  $V_{max}$ 와 기준운동에너지  $T^*$ 의 산식은 다음과 같이 귀착된다.

$$\begin{aligned}
 V_{max} &= \frac{1}{2a} \left[ \int_0^1 \int_0^1 \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha^2 D_{22} \left( \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} \right)^2 \right. \right. \\
 &\quad + 2\alpha D_{12} \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} + D_{33} \left( \alpha \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \xi} \right)^2 \\
 &\quad + 2D_{15} \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \xi} \left( \alpha \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \xi} \right) + 2D_{35} \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \eta} \left( \alpha \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_\eta}{\partial \xi} \right) \\
 &\quad \left. + A_{11} \left( \frac{\partial W}{\partial \xi} - \alpha \Psi_\xi \right)^2 + \alpha^2 A_{11} \left( \frac{\partial W}{\partial \eta} - b \Psi_\eta \right)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2A_{15} \left( \alpha \frac{\partial \Psi_\xi}{\partial \eta} \Psi_\eta - \alpha \Psi_\xi \frac{\partial W}{\partial \eta} - \alpha \Psi_\eta \frac{\partial W}{\partial \xi} + \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \\
 &+ D_{11} \int_0^1 (K_{Rx1} \Psi_\xi^2|_{\xi=0} + K_{Rx2} \Psi_\xi^2|_{\xi=1}) d\eta \\
 &+ \alpha^2 D_{22} \int_0^1 (K_{Ry1} \Psi_\eta^2|_{\eta=0} + K_{Ry2} \Psi_\eta^2|_{\eta=1}) d\xi \\
 T^* &= \frac{ab}{2} \int_0^1 \int_0^1 \{ I(\Psi_\xi^2 + \Psi_\eta^2) + PW^2 \} d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{13}$$

여기서  $\alpha = a/b, K_{Rx1} = k_{rx1}a/D_{11}, K_{Rx2} = k_{rx2}a/D_{11}, K_{Ry1} = k_{ry1}b/D_{22}$  및  $K_{Ry2} = k_{ry2}b/D_{22}$ 이다.

$W(\xi, \eta), \Psi_\xi(\xi, \eta)$  및  $\Psi_\eta(\xi, \eta)$ 를 양단이 회전해 대해 탄성구속된 Timoshenko보의 고유함수와 같은 성질을 갖는 다항식[7](부록 참조)  $X(\xi), \Phi(\xi)$  또는  $Y(\eta), \Theta(\eta)$ 를 이용하여 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{aligned}
 W(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 A_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \\
 \Psi_\xi(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 B_{mn} \Phi_m(\xi) Y_n(\eta) \\
 \Psi_\eta(\xi, \eta) &= \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 C_{mn} X_m(\xi) \Theta_n(\eta)
 \end{aligned} \tag{14}$$

(14)를 (12), (13)에 대입하여  $V_{max}, T^*$ 를 산정하고 Rayleigh quotient  $R(W, \Psi_\xi, \Psi_\eta)$ 가 극소치  $\min R(W, \Psi_\xi, \Psi_\eta) = \Delta$ 를 갖기 위한 조건식

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{max}}{\partial A_{ij}} - \Delta \frac{\partial T^*}{\partial A_{ij}} &= 0 \\
 \frac{\partial V_{max}}{\partial B_{ij}} - \Delta \frac{\partial T^*}{\partial B_{ij}} &= 0 \\
 \frac{\partial V_{max}}{\partial C_{ij}} - \Delta \frac{\partial T^*}{\partial C_{ij}} &= 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

으로부터 고유치문제를 다음과 같은 매트릭스 형식으로 형성할 수 있다.

$$([K] - \Delta[M])\{H\} = \{0\} \tag{16}$$

여기서  $[K]$  및  $[M]$ 는 Ritz 시스템화 계의 강성 및 관성매트릭스이다.

### 3. 수치계산에 및 고찰

Timoshenko보합수 성질을 갖는 특성다항식을 이용한 Rayleigh-Ritz 해석방법의 정확도 및 유용성을 검증하기 위하여 Craig등[5]이 시산모델로 사용하

있던 직교이방성 복합적층판 및 이방성 단층판을 모델로서 택하였다. 첫번째 해석모델은 5개의 섬유강화 단층판이 (0/90/0/90/0)의 구조로 적층된 두께/변의 길이 비  $h/a=0.1$ 인 정사각형 직교이방성 복합적층판으로서, 각 단층판의 재료특성치는 동일하며 중앙면으로부터 각층의 아랫면까지의 높이 및 재료특성치는 다음과 같다.

$$h_1=h/2, h_2=h/3, h_3=h/12$$

$$E_1/E_2=30, G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6,$$

$$G_{23}/E_2=0.5, \nu_{12}=0.25$$

두번째 해석모델은 주재료방향이 판의 기하학적 좌표축과 30° 경사되어 있는 두께/변의 길이 비  $h/a=0.1$ 인 정사각형 이방성 단층판으로서, 재료특성치는 다음과 같다.

$$E_1/E_2=10, G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=G_{23}/E_2=0.25,$$

$$\nu_{12}=0.3$$

Chow[11]와 Whitney[12]의 방법에 기초하여 (9)에 의해 계산된 전단수정계수는: 직교이방성 복합적층판모델인 경우  $k_4^2=0.59139$  및  $k_5^2=0.87323$ 이며. 이방성 단층판모델인 경우  $k_4^2=k_5^2=5/6$ 이다.

Table 1은 첫번째 해석모델인 직교이방성 복합적층판이 고전적 경계조건 즉, 4변 모두 단순지지 (S-S-S-S:  $k_{Rx1}=k_{Rx2}=k_{Ry1}=k_{Ry2}=0$ )인 경우와 4변 모두 고정(C-C-C-C:  $k_{Rx1}=k_{Rx2}=k_{Ry1}=k_{Ry2}=\infty$ )의 경계조건을 갖는 경우에 대해 고유진동수 파라미터  $\Omega=\omega(\rho a^2/E_2)^{1/2}$ 를 계산하여 기존의 연구결과와 비교한 것이다. Rayleigh-Ritz해석의 진동과형가정함수로서 Craig등[5]은 Timoshenko보합수를 사용하였으나, 본 연구에서는 Timoshenko보합수 성질을 갖는 특성다항식을 이용하였으며 진동과형가정 (14)에 있어서 항수는  $p=q=5$ 로 서로 같다. Table 1에서 보는 바와 같이 두 결과의 차이는 약 0.3% 내외로서 부합성이 매우 양호하다. Table 1에는 S-S-S-S인

경우에 대해 참고로 박판이론에 의거하여 계산된 고유진동수 파라미터[13]도 함께 보였는데, 이 결과는 후판이론에 의한 결과보다 매우 큰 계산값을 보여주고 있으며 진동차수가 높아질 수록 후판이론 결과와의 차이가 커짐을 볼 수 있다. 이는 고차모드가 될수록 판의 전단변형효과 및 회전관성효과가 커지는데 기인한다.

두번째 해석모델인 이방성 정사각형 단층판이 4변 모두 고정인 경계조건을 갖는 경우에 대하여 계산된 결과는 Table 2와 같다. 이 경우에도 진동과

Table 1 Calculated frequency parameters  $\Omega=\omega\sqrt{\rho a^2/E_2}$  5 layer orthotropic cross-ply laminated square plates

B. C.	S-S-S-S			C-C-C-C	
	method * CTPT [13]	Using Beam func.[5]	Using polyno- mials	Using Beam func.[5]	Using polyno- mials
1	1.6608	1.4204	1.4207	2.2216	2.2226
2	3.8737	2.7954	2.8039	3.3823	3.3923
3	5.4545	3.4832	3.4956	3.9297	3.9416
4	6.6424	4.2560	4.2713	4.7021	4.7202
5	8.1368	4.6166	4.6409	4.9764	4.9943

\* CTPT: Classical Thin Plate Theory

Table 2 Calculated frequency parameters  $\Omega=\omega\sqrt{\rho a^2/E_2}$  of a single layer anisotropic square plate: C-C-C-C

method	*	**	Rayleigh-Ritz Using polyno- mials
Mode	CTPT[14]	FSM[5]	
1	1.9578	1.3095	1.3094
2	3.0426	2.0394	2.0057
3	4.6511	2.4429	2.4417
4	4.7565	2.8436	2.8286

\* CTPT: Classical Thin Plate Theory  
\* FSM: Finite Strip Method

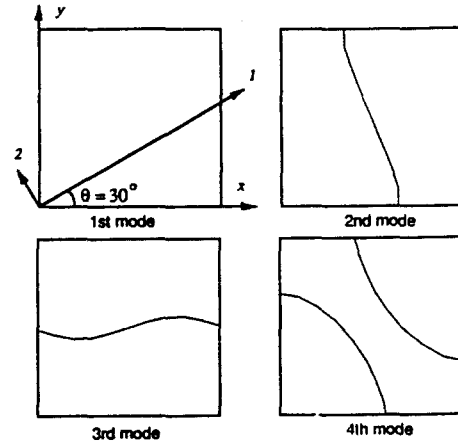
Table 3 Convergence test results of calculated frequency parameters  $\Omega=\omega\sqrt{\rho a^2/E_2}$  with respect to the number of series terms in Eq.(14): C-C-C-C

Mode	Orthotropic laminated composite plate				Anisotropic single layer plate			
	1	2	3	4	1	2	3	4
No. of terms								
p=q=2	2.2378	3.4703	4.0448	4.8552	1.3224	2.1240	2.6400	3.2984
p=q=3	2.2227	3.4647	4.0426	4.8552	1.3109	2.0680	2.5873	3.0069
p=q=4	2.2227	3.3923	3.9416	4.7202	1.3097	2.0128	2.4546	2.8694
p=q=5	2.2226	3.3923	3.9416	4.7202	1.3094	2.0057	2.4417	2.8286

형가정함수로서 Timoshenko보함수성질을 갖는 다항식을 이용하였으며 진동과형가정 (14)에 있어서의 항수는  $p=q=5$ 로 취하였다. Craig등[5]은 유한대판법을 이용하여 동일판에 대하여 고유진동해석을 수행하였는데, strip의 수를 3개, 진동과형가정함수의 항수를 6개 취했을 때의 결과도 Table 2에 함께 수록하였다. 양자의 부합성은 양호하나 본 연구에서 제시한 방법에 의한 결과가 유한대판법에 의한 결과보다 대체로 낮은 값을 줄을 알 수 있다. 이 모델에 대한 박판이론유추 해석결과[14]도 함께 보였는데, 역시 전단변형 및 회전관성효과가 매우 크다.

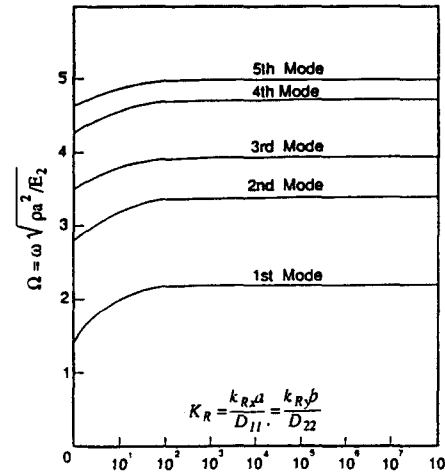
진동과형가정 (14)에 있어서 항수에 따른 해의 수렴성을 조사하기 위하여 4변모두 고정인 경우에 대하여 항수  $p=q$ 를 2부터 5까지 바꾸어 가면서 두 모델의 고유진동수 파라미터를 계산한 결과는 Table 3과 같다. 이로부터 이방성 단층판의 경우가 직교이방성 복합적층판의 경우보다 수렴성이 훨씬 느림을 알 수 있다. 이는 Fig. 6에 보인 바와 같이 이방성 단층판의 경우에는 고유진동형의 nodal line이 매우 휘어져 있는 데에 기인하는 것으로 사료된다. 따라서 이방성 복합적층판의 진동해석에 있어서는 진동과형가정함수의 항수를 보다 많이 취할 필요가 있다.

주변고착도가 고유진동수에 미치는 영향을 알아보기 위하여 4변 모두 회전에 대해 동일하게 탄성구속되었다고 가정하여 주변고착도를 나타내는 무차원파라미터  $K_R$ 의 변화에 따른 두 해석모델의 고유진동수 파라미터의 변화를 Fig. 7에 보였다. Fig. 7에서 보는 바와 같이 일반적으로 고차진동형에 갈 수록 주변고

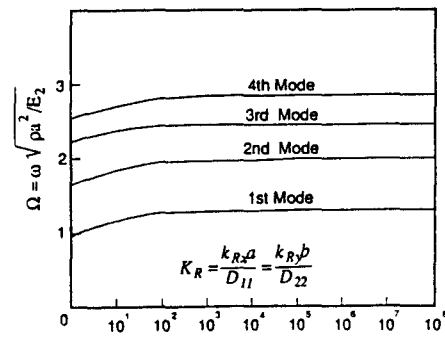


(b) Anisotropic single layer plate

Fig. 6 Mode shapes of laminated composite square plate models : Refer to Table 3

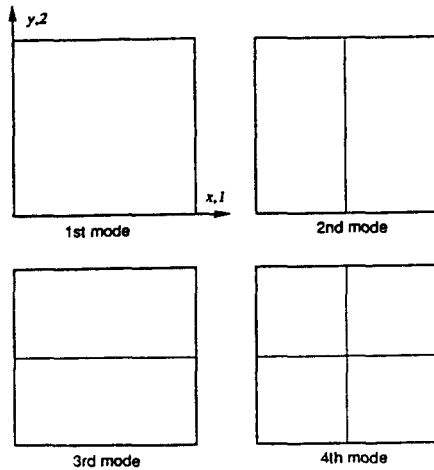


(a) Orthotropic composite plate



(b) Anisotropic single layer plate

Fig. 7 Variation of frequency parameters  $\Omega = \omega \sqrt{\rho a^2 / E_2}$  w.r.t the degree of elastic restraint against rotation along the boundary



(a) Orthotropic composite plate

착도의 영향을 줄어든다. 또한, 직교이방성 복합적층판의  $K_R$ 의 변화에 따른 고유진동수변화는 처음에 급격하나 비교적 낮은  $K_R$ 의 값 즉,  $K_R=10^3$  근처에서 고정인 경우로 간주할 수 있는데 반하여, 이방성 단층판의 경우는 처음부터 서서히 변화하며 보다 높은  $K_R$ 의 값 즉  $K_R=10^5$  근처에서 고정인 경우로 간주할 수 있다.

#### 4. 결 론

적층구조가 판의 중앙면에 대해 대칭이고 4변이 회전해에 대해 탄성구속된 복합적층 직사각형판의 고유진동에 대해 이방성 후판이론에 의거하여 정식화하고, 엄밀해결을 구하기 어려운 점을 고려하여 Timoshenko 보합수 성질을 갖는 특성다항식을 이용한 Rayleigh-Ritz 해석방법을 제시했다. 이 방법의 유용성을 검증하기 위하여 기존연구결과가 있는 모델을 선택하여 일련의 수치계산을 수행하여 비교·고찰하므로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 대칭 복합적층 직사각형판의 진동해석에 있어서 진동과정정합수로서 Timoshenko보합수 성질을 갖는 특성다항식을 이용한 Rayleigh-Ritz 해석방법은 매우 유용하게 사용될 수 있다.
- (2) 이방성 복합적층판의 경우에는 nodal line이 매우 휘어진 양태이며, 보다 정확한 해석을 위해서는 진동과정정합에 있어서 직교이방성인 경우보다 더 많은 항수를 취할 필요가 있다.
- (3) 주변고착도가 고유진동수에 미치는 영향은 고차모드로 갈수록 상대적으로 작아진다. 한편, 전단 변형 및 회전관성효과는 판의 두께/변의 길이 비가 클수록, 고차모드일수록 커진다.

#### 참 고 문 헌

- [1] Mindlin, R.D., "Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 18, pp.31-38, 1951.
- [2] Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, V., "Elastic wave propagation in heterogeneous plates", *Int. J. of Solids Structures*, Vol.2, pp. 665-684, 1966.
- [3] Whitney, J.M. and Pagano, N.J., "Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates", *J. of Applied Mechanics*, Vol.37, pp.1031-1036, 1970.
- [4] Bert, C.W. and Chen, T.L.C., "Effect of shear deformation on vibration of antisymmetric angle-ply laminated rectangular plates", *Comput. Struct.*, Vol.14, pp.465-473, 1978.
- [5] Craig, T.J. and Dawe, D.J., "Flexural vibration of symmetrically laminated composite rectangular plates including transverse shear effects", *Int. J. of Solids Structures*, Vol.22, No.2, pp. 155-169, 1986.
- [6] Bowlus, J.A., Palazotto, A.N. and Whitney, J.M., "Vibration of symmetrically laminated rectangular plates considering deformation and rotary inertia", *AIAA Journal*, Vol.26, No. 11, pp.500-511, 1987.
- [7] 정정훈, 정태영, 김극천, "Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식을 이용한 Mindlin판유추 구조계의 진동해석", 대한조선학회 논문집 29 권 1호, 1992.
- [8] Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L., "Rayleigh-Ritz Vibration analysis of Mindlin plates", *J. of Sound and Vibration*, Vol.69, pp.345-359, 1980.
- [9] 김학륜, 이재욱, "최적적층구조를 위한 보강된 복합적층판의 좌굴강도 해석", 대한조선학회지, 제26권 제3호, 1989.
- [10] Chia, C.Y., *Nonlinear Analysis of Plates*(Chapter 1), McGraw-Hill, Inc., 1980.
- [11] Chow, T.S., "On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load", *J. of Composite Materials*, Vol.5, pp.306-319, 1971.
- [12] Whitney, J.M., "Shear correction factors for orthotropic laminates under static load", *J. of Applied Mechanics*, Vol.40, pp.302-304, 1973
- [13] Wittrick, W.H. and Williams, F.W., "Buckling and vibration of anisotropic or isotropic plate assemblies under combined loadings", *Int. J. of Mech. Sci.*, Vol.16, pp.209-239, 1974.
- [14] Ashton, J.E. and Whitney, J.M., *Theory of Laminated Plates*(Section 5.8), Technomic, Stanford, 1970.



부 록

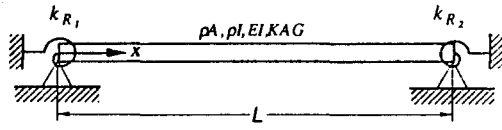


Fig. A-1 Uniform Timoshenko beam with ends elastically restrained against rotations

Fig. A-1에 보인 바와 같이 양단 회전에 대해 탄성구속된 Timoshenko보의 고유함수 성질을 갖는 특성다항식은 다음과 같이 주어진다[7].

첫 번째 다항식  $X_1(\xi)$  및  $\Phi_1(\xi)$ 는

$$\begin{aligned} \Phi_1(\xi) &= A_1(\xi^3 + A_{21}\xi^2 + A_{11}\xi + A_{01}) \\ X_1(\xi) &= \left\{ A_1 L \frac{1}{4} \xi^4 + \frac{A_{21}}{3} \xi^3 + \frac{(A_{11} - 3s^2)}{2} \xi^2 \right. \\ &\quad \left. + (A_{01} - 2A_{21}s^2)\xi \right\} \end{aligned} \quad (A-1)$$

여기서

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L} \\ s^2 &= \frac{EI}{KAGL^2} \\ A_{01} &= \frac{6 + K_{R2}(1 + 12s^2)}{6(K_{R1} + 2)(K_{R2} + 2) - 4(1 - 6s^2)\hat{K}} \\ A_{11} &= K_{R1}A_{01} \\ A_{21} &= -\frac{K_{R2} + 3 + \hat{K}A_{01}}{K_{R2} + 2} \\ \hat{K} &= K_{R1}K_{R2} + K_{R1} + K_{R2} \\ K_{R1} &= \frac{k_{R1}L}{EI}, \quad K_{R2} = \frac{k_{R2}L}{EI} \end{aligned} \quad (A-2)$$

이고  $A_1$ 는 Timoshenko보 함수의 정규화 직교관계식 즉,

$$\int_0^1 (\rho A X_m X_n + \rho I \Phi_m \Phi_n) d\xi = \delta_{mn} \quad (A-3)$$

의  $(m=n=1)$ 에 대해 만족하는 값이다. 여기서  $\rho, E$  및  $G$ 는 재료의 질량밀도, 인장 및 전단탄성계수이고,  $A$  및  $I$ 는 보의 단면적 및 단면2차모멘트,  $K$ 는 전단계수이고,  $m, n$ 은 진동차수,  $\delta_{mn}$ 은 Krone-

cker delta이다.

두 번째 다항식  $X_2(\xi)$  및  $\Phi_2(\xi)$ 는

$$\begin{aligned} \Phi_2(\xi) &= A_2(\xi^4 + A_{32}\xi^3 + A_{22}\xi^2 + A_{12}\xi + A_{02}) \\ X_2(\xi) &= A_2 L \left\{ \frac{1}{5} \xi^5 + \frac{1}{4} A_{32}\xi^4 + \left( \frac{A_{22}}{3} - 4s^2 \right) \xi^3 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{A_{12}}{2} - 3A_{32}s^2 \right) \xi^2 + (A_{02} - 2A_{22}s^2)\xi \right\} \end{aligned} \quad (A-4)$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= -\frac{\hat{A}}{\hat{B}} \\ A_{22} &= C_1 - A_{32}C_2 \\ A_{12} &= K_{R1}A_{02} \\ A_{02} &= e_1 - A_{32}A_{01} \\ \hat{A} &= \int_0^1 \left[ \rho A \frac{1}{5} \xi^5 + \left( \frac{C_1}{3} - 4s^2 \right) \xi^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_{R1}e_1}{2} \xi^2 + (e_1 - 2C_1s^2)\xi \right] X_1(\xi) \\ &\quad \left. + \rho I \xi^4 + C_1 \xi^2 + K_{R1}e_1 \xi + e_1 \right] \Phi_1(\xi) d\xi \\ \hat{B} &= \int_0^1 \left[ \rho A \left\{ \frac{1}{4} \xi^4 + \frac{C_2}{3} \xi^3 + \frac{K_{R1}e_2}{2} - 3s^2 \right\} \xi^2 \right. \\ &\quad \left. + (e_2 - 2C_2s^2)\xi \right] X_1(\xi) \\ &\quad \left. + \rho I \xi^3 + C_2 \xi^2 + K_{R1}e_2 \xi + e_2 \right] \Phi_1(\xi) d\xi \\ C_1 &= -\frac{K_{R2} + 4 + \hat{K}e_1}{K_{R2} + 2} \\ C_2 &= -\frac{K_{R2} + 3 + \hat{K}A_{01}}{K_{R2} + 2} \\ e_1 &= \frac{4K_{R2}(1 + 15s^2) + 28}{15(K_{R1} + 2)(K_{R2} + 2) - 10(1 - 6s^2)\hat{K}} \\ e_2 &= A_{01} \end{aligned} \quad (A-5)$$

$A_2$ 는  $(m=n=2)$ 일 때 (A-3)을 만족하는 값이고,  $A_{01}$  및  $K$ 는 (A-2)의 정의와 같다.

$X_k(\xi)$  및  $\Phi_k(\xi)$ ,  $k=3, 4, \dots$ 는

$$\begin{aligned} X_k(\xi) &= A_k[(\xi - B_k)X_{k-1}(\xi) - C_k X_{k-2}(\xi)] \\ \Phi_k(\xi) &= A_k[(\xi - B_k)\Phi_{k-1}(\xi) - C_k \Phi_{k-2}(\xi) + X_{k-1}(\xi)], \\ &\quad k=3, 4, \dots \end{aligned} \quad (A-6)$$

여기서  $A_k, B_k$  및  $C_k$ 는 각각  $(m=n=k)$ ,  $(m=k, n=k-1)$  및  $(m=k, n=k-2)$ 일 때 (A-3)을 만족하는 값이다.