
 論 文

大韓造船學會論文集
 第29卷 第1號 1992年 3月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 29, No. 1, March 1992

Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식을 이용한 Mindlin판유추 구조계의 진동해석

정정훈*, 정태영*, 김극천**

Vibration Analysis of Mindlin Plates Using Polynomials Having the Property of Timoshenko Beam Functions

by

J.H. Chung*, T.Y. Chung* and K.C. Kim**

요 약

대형구조물의 국부구조계를 구성하는 후판, 선체이중저구조와 같은 복판패널등의 진동문제에 있어서 전단변형 및 회전관성효과가 매우 크므로 정확한 진동해석을 위해서는 이들 구조계를 상기 효과를 고려한 Mindlin판유추 구조계로 취급하여야 한다. 또한, 이들 구조계의 실제 경계조건은 일반적으로 단순지지와 고정,의 중간상태이므로 경계조건을 회전에 대한 탄성구속으로 다룰 필요가 있다. 그러나 4변모두 단순지지 경계조건을 갖는 Mindlin판을 제외하고는 엄밀해를 구하기 어려워 근사적 방법의 사용이 불가피한데, 한 방법으로 Rayleigh-Ritz 방법이 널리 이용된다. Rayleigh-Ritz 방법에 의한 Mindlin판유추 구조계의 진동 해석에 있어서 진동과형가정함수로서 통상 Timoshenko보합수가 이용된다. 이 경우 전단변형의 효과가 고려되어야 하므로 횡방향처짐 및 굽힘회전각에 대한 2개의 함수계가 도입되어야 하므로 실제 연산이 Euler보합수를 이용한 박판유추 구조계의 진동해석 때 보다도 훨씬 더 복잡하다. 따라서, 본 논문에서는 이러한 연산의 복잡성을 줄이기 위해 진동과형가정함수로서 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식 도출방안을 제시하였고, 이를 이용하여 주현경계조건이 회전에 대해 탄성구속된 Mindlin판유추 구조계의 진동해석 및 감도해석을 정식화하여, 등방성 후판 및 실선이중저구조의 1/8축척 모델을 대상으로 일련의 수치계산을 수행하여 이의 정확도 및 효율성을 검증하였다.

발표 : 1991년도 대한조선학회 추계연구발표회('91.11.15.)

접수일자 : 1991년 11월 22일. 재접수일자 : 1992년 1월30일

* 정회원, 해사기술연구소

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

Abstract

In ships and offshore structures, there are many local structures formed of thick plates and/or having the form of double wall panels. For the vibration analysis of such a kind of structures, Mindlin plate theory which includes the effects of shear deformation and rotary inertia is usually adopted. In this paper, the vibration and dynamic sensitivity analysis of Mindlin plates having the boundary conditions elastically restrained against rotation have been accomplished using the Rayleigh-Ritz method. Polynomials having the property of the Timoshenko beam functions are introduced and used as trial functions in the spatial representation of the deflection and rotations of cross sections in two directions of the plates. The results obtained by the introduced polynomials gave nearly the same numerical results as those by the Timoshenko beam functions with the remarkable reduction of computational efforts especially in the dynamic sensitivity analysis.

1. 서 론

대형구조물의 국부구조계를 구성하는 후판, 선체이중저구조와 같은 복판넬등의 진동문제에 있어서 전단변형 및 회전관성효과가 매우 크므로 정확한 진동해석을 위해서는 이들 구조계를 상기 효과를 고려한 Mindlin판유추 구조계로 취급하여야 한다. 그러나 4변모두 단순지지의 경계조건을 갖는 Mindlin판을 제외하고는 엄밀해를 구하기 어렵기 때문에 근사적 방법의 사용이 불가피한데, 한 방법으로서 고전적 방법인 Rayleigh-Ritz방법이 널리 이용된다.

Rayleigh-Ritz방법에 의한 판유추 구조계의 진동해석에 있어서는 진동과형가정함수로서 통상 보합수가 이용된다. 그러나, 박판유추 구조계에 대해서 Euler보합수를 이용하는 경우에도 양단단순지지인 경우를 제외한 보합수들은 그 연산이 매우 복잡하다. 따라서 이를 간소화하기 위해 최근 진동과형가정함수로서 Euler보합수 성질을 갖는 다항식을 이용하려는 연구가 이루어지고 있다. Bhat[1]는 Rayleigh-Ritz방법에 의한 고전적 경계조건을 갖는 등방성 박판의 진동해석에 있어서 진동과형가정함수로서 Euler보합수 성질을 갖는 직교다항식을 Gram-Schmidt 직교화방법을 사용하여 도출하는 방법을 제시하였다. 그는 우선 첫 번째 다항식을 판의 마주보는 변의 경계조건과 동일한 경계조건을 갖는 Euler보의 경계조건을

만족하도록 구한 후 두번째 이상의 다항식에 대해서는 Euler보합수의 직교관계식을 이용하여 Gram-Schmidt 직교화방법에 의해 도출하였다. Bhat가 제시한 직교다항식을 이용하여 Dickinson 등[2]은 직교이방성 직사각형 박판의 진동해석 및 좌굴해석을 수행하였고, Lam등[3,4]은 유공평판 및 내부에 균열이 생긴 직사각형 박판의 진동해석을 수행하였다. 이들 연구를 종합하면 직교다항식을 사용할 경우 Euler보합수를 사용할 때와 대등한 정확도의 해를 얻을 수 있을 뿐만 아니라 보합수 사용의 연산 복잡성을 매우 간소화시킬 수 있음이 확인되고 있다.

Mindlin판유추구조계에 대해서는 Timoshenko 보합수가 이용될 수 있다. Dawe등[5]은 고전적 경계조건을 갖는 등방성 Mindlin판의 고유진동해석에 있어서 진동과형함수로서 Huang[6]이 제시한 고전적 경계조건에 대한 Timoshenko보합수를 이용하여 근사해를 얻었다. 그러나 진동과형가정함수로서 Timoshenko보합수를 이용할 경우 전단변형이 고려되어야 하기 때문에 2개의 함수계측, 횡방향처짐변위 및 굽힘회전각에 대한 함수계가 도입되어야 하므로 실제 연산이 Euler보합수를 이용한 박판유추구조계의 진동해석 때 보다는 훨씬 더 복잡한다. 더욱이, 실제 판유추구조계의 경계조건은 많은 경우에 단순지지 및 고정,의 중간 상태이므로 경계조건을 회전에 대해 탄성구속으로 다룰 필요가 있다. 이 경우 양단이 회전에 대해

탄성구속된 Timoshenko보합수가 요구되나 아직 잘 알려져 있지 않다. 한편, 최적동특성을 갖는 Mindlin판유추 구조계의 설계에 있어서 설계변경에 따른 동특성해석에 효과적으로 적용될 수 있는 감도해석방법의 정립도 필요하다.

본 논문에서는 Rayleigh-Ritz방법에 의거하여 회전에 대해 탄성구속의 경계조건을 갖는 Mindlin판유추 구조계의 진동해석에 합당한 진동과형 가정함수로서 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식 도출방안을 제시하고, 이를 이용하여 진동해석 및 감도해석을 정식화하고, 이의 정확도 및 효율성을 검증하기 위하여 등방성 후판 및 실선의 이중저 구조의 1/8축척 모델을 대상으로 수치계산을 수행하여 그 결과를 Timoshenko보합수를 사용하여 얻은 결과와 비교·검토하였다.

2. Mindlin판유추 구조계의 진동해석

4변모두 회전에 대해 탄성구속된 직교이방성 Mindlin판에 대해서 Rayleigh-Ritz방법에 의한 진동해석을 정식화하고 등방성 후판 및 직교이방성 Mindlin판으로 유추할 수 있는 선체의 이중저구조와 같은 복판패널에 대해서는 이의 특별한 경우로서 취급하기로 한다.

좌표계가 Fig. 1과 같이 정의된 판재료의 물리적 특성이 서로 직교하는 두방향(x 및 y방향)으로 균일하며 판의 두께/길이의 비가 진동반파장의 1/20이상인 직교이방성 후판은 직교이방성 Mindlin판으로 유추할 수 있으며[7] 이의 고유진동방정식은 Mindlin판이론과 직교이방성 판이론으로부터 다음과 같다 [예로서 8,9].

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} - D_x \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \nu_x \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - D_y \left(\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - K_x G_{xx} h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) = 0 \end{aligned}$$

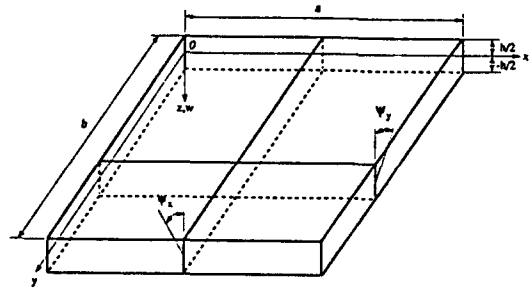


Fig. 1 Coordinates system of a rectangular Mindlin plate

$$\begin{aligned} & \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2} - D_y \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} + \nu_y \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) \\ & - D_x \left(\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} \right) \\ & - K_y G_{yy} h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} & \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_x G_{xx} h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \\ & - K_y G_{yy} h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

여기서 $\psi_x(x,y,t)$, $\psi_y(x,y,t)$ 및 $W(x,y,t)$ 는 Fig. 1에 보인 바와 같이 차례로 판의 xz , yz 평면의 굽힘회전각 및 횡방향처짐변위이고, D_x , D_y 및 D_{xy} 는 각각 판의 단위길이당 x,y 방향 굽힘강성 및 비틀림강성으로서

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \\ D_y &= \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \\ D_{xy} &= \frac{G_{xy} h^3}{12} \end{aligned} \tag{2}$$

로 얻어지고, E_x , E_y 및 ν_x , ν_y 는 각각 x,y 방향의 인장탄성계수 및 Poisson 비, G_{xx} , G_{yy} 및 G_{xy} 는 차

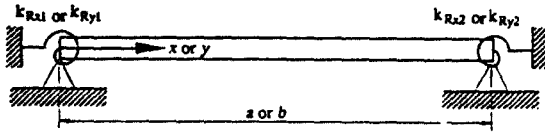


Fig. 2 Edges boundary condition : Elastically restrained against rotation along edges

레로 xy , yz 및 xz 면의 전단탄성계수이며, K_x , K_y 는 각각 x, y 방향의 전단계수, ρ 는 재료의 질량밀도, h 는 판두께이다.

Fig. 2에 보인 바와 같이 4변모두 회전성에 대해 탄성구속된 경우의 경계조건식은

$$\begin{aligned} w(x,y,t)|_{x=0 \text{ or } a} &= 0 \\ \psi_x(x,y,t)|_{x=0 \text{ or } a} &= 0 \\ \psi_x(x,y,t)|_{x=0} &= \frac{a}{K_{Rz1}} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \psi_x(x,y,t)|_{x=a} &= -\frac{a}{K_{Rz2}} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \Big|_{x=a} \\ w(x,y,t)|_{y=0 \text{ or } b} &= 0 \\ \psi_y(x,y,t)|_{y=0 \text{ or } b} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \psi_y(x,y,t)|_{y=0} &= \frac{b}{K_{Ry1}} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \Big|_{y=0} \\ \psi_y(x,y,t)|_{y=b} &= -\frac{b}{K_{Ry2}} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \Big|_{y=b} \end{aligned}$$

여기서

$$K_{Rz1} = \frac{k_{Rz1}a}{D_x} \quad K_{Rz2} = \frac{k_{Rz2}a}{D_x} \quad (4)$$

$$K_{Ry1} = \frac{k_{Ry1}b}{D_y} \quad K_{Ry2} = \frac{k_{Ry2}b}{D_y}$$

이고 k_{Rz1} , k_{Rz2} , k_{Ry1} 및 k_{Ry2} 는 차례로 $x=0$, $x=a$, $y=0$ 및 $y=b$ 에서의 단위길이당 회전스프링상수이다.

무차원 길이좌표 $\xi = x/a$ 및 $\eta = y/b$ 를 도입하고 조화운동을

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta, t) &= W(\xi, \eta)e^{i\omega t} \\ \psi_x(\xi, \eta, t) &= \Psi_x(\xi, \eta)e^{i\omega t} \\ \psi_y(\xi, \eta, t) &= \Psi_y(\xi, \eta)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5)$$

와 같이 나타내면, 최대변형에너지 V_{max} 및 기준 운동에너지(reference kinetic energy) T^* 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} V_{max} &= \frac{1}{2\alpha_p} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left\{ D_x \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} \right)^2 + \alpha_p^2 D_y \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial \eta} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad + \alpha_p (v_x D_x + v_y D_y) \frac{\partial \Psi_x}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_y}{\partial \eta} \\ &\quad + D_y \left(\alpha_p \frac{\partial \Psi_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial \xi} \right)^2 + K_x h G_x \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right. \\ &\quad \left. \left. - a \Psi_x \right)^2 + \alpha_p^2 K_y h G_y \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - b \Psi_y \right)^2 \right] d\xi d\eta \\ &\quad + D_x \int_0^1 (K_{Rz1} \Psi_x^2|_{\xi=0} + K_{Rz2} \Psi_x^2|_{\xi=1}) d\eta \\ &\quad + \alpha_p^2 D_y \int_0^1 (K_{Ry1} \Psi_y^2|_{\eta=0} + K_{Ry2} \Psi_y^2|_{\eta=1}) d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

$$T^* = \frac{\rho ab}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \frac{h^3}{12} (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) + h W^2 \right\} d\xi d\eta \quad (7)$$

여기서 $\alpha_p = a/b$ 이다.

Rayleigh-Ritz방법의 적용에 있어서 V_{max} 및 T^* 를 위한 진동과형 가정은 4절에서 상세하게 기술할 Timoshenko보합수 또는 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다[5].

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l A_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \quad (8)$$

$$\Psi_x(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l B_{mn} \Phi_m(\xi) Y_n(\eta)$$

$$\Psi_y(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^l C_{mn} X_m(\xi) \Theta_n(\eta)$$

여기서 $X(\xi)$, $Y(\eta)$, $\Phi(\xi)$ 및 $\Theta(\eta)$ 는 ξ 및 η 두 방향으로 판의 서로 마주보는 두 변과 동일한 경계조건을 갖는 Timoshenko보합수 또는 보합수

성질을 갖는 다항식이다. (8)을 (6), (7)에 대입하여 Rayleigh quotient 즉,

$$R(W, \Psi_\zeta, \Psi_\eta) = \frac{V_{max}}{T^*} \quad (9)$$

가 극소치

$$\min R(W, \Psi_\zeta, \Psi_\eta) = \Lambda \quad (10)$$

를 갖기위한 조건식

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{max}}{\partial A_{ij}} - \Lambda \frac{\partial T^*}{\partial A_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial V_{max}}{\partial B_{ij}} - \Lambda \frac{\partial T^*}{\partial B_{ij}} &= 0 \\ \frac{\partial V_{max}}{\partial C_{ij}} - \Lambda \frac{\partial T^*}{\partial C_{ij}} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

로부터 고유치문제를 다음과 같은 매트릭스 형식으로 형성할 수 있다.

$$([K] - \Lambda[M])\{H\} = \{0\} \quad (12)$$

여기서 $[K]$ 및 $[M]$ 는 계의 강성 및 관성매트릭스이다.

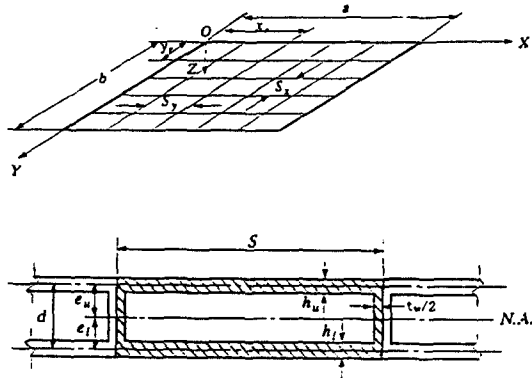


Fig. 3 Coordinates system and element of cross section of a double wall panel

등반성후판에 대해서는 직교이방성 후판에 대해 재료의 등방성 조건 즉 $E_x=E_y=E$, $\nu_x=\nu_y=\nu$ 및 $G_{xy}=G_{yz}=G_{zx}=G$ 를 대입하므로써 특별한 경우로 취급할 수 있으며 이때 등반성후판의 단위길이당 굽힘강성 및 비틀림강성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \\ D_{xy} &= \frac{Gh^3}{12} = \frac{(1-\nu)D}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 E, G 및 ν 는 각각 등방성 재료의 인장탄성계수, 전단탄성계수 및 Poisson비이다.

한편, Fig. 3에 보인 바와 같이 선체의 이중저구조와 같은 복판패널에 대해서는 웹 간격이 비교적 조밀하고 그 배치가 규칙적인 경우에는 복판패널의 모델링 방법으로서 통상 웹의 효과를 판 전역에 걸쳐 균일하게 분포시키므로써 직교이방성 Mindlin판으로 유추하는 방법이 널리 이용된다. 이 경우 복판패널의 강성파라미터들은 보강판과 비교하여 판요소가 하나 더 있고 웹의 깊이가 크며 판·웹 조합체 요소의 단면이 폐단면이라는 특성을 고려하여 다음과 같이 평가한다.

xy 방향 굽힘강성 D_x, D_y 및 등가유효판두께는 판 후판지의 유효폭이 웹간격과 같다고 가정하면 다음과 같이 평가된다.

$$\begin{aligned} D_x &= D_u + D_l + \frac{Eh_u e^2_{ux}}{1-\nu^2} + \frac{Eh_l e^2_{lx}}{1-\nu^2} + \frac{EI_{\alpha x}}{S_x} \\ D_y &= D_u + D_l + \frac{Eh_u e^2_{uy}}{1-\nu^2} + \frac{Eh_l e^2_{ly}}{1-\nu^2} + \frac{EI_{\alpha y}}{S_y} \\ h_e &= h_u + h_l + \frac{A_{ux}}{S_x} + \frac{A_{ly}}{S_y} \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 D_u 및 D_l 는 각각 상판 및 하판의 굽힘강성이고 $I_{\alpha x}$ 및 $I_{\alpha y}$ 는 각각 x, y 방향 웹의 조합중립축에 대한 단면2차모멘트, A_{ux} 및 A_{ly} 는 각각 x, y 방향 웹의 단면적이고 기타 기호는 Fig. 3에 정의된 바와 같다.

전단계수 K 는 판·웹 조합체 요소의 단면이

폐단면임을 고려하여 이에 대한 Cowper[10]의 결과식을 이용하면 다음과 같이 평가된다.

$$K = 10(1+\nu)(1+3m)^2 / [(12+72m+150m^2 + 90m^3) + \nu(11+66m+135m^2+90m^3) + 10n^2\{(3+\nu)m+3m^2\}] \quad (15)$$

$$m = \frac{2Sh}{t_w d}, \quad n = \frac{S}{d}$$

비틀강성 D_{xy} 산정에 있어서는 통상 Shade[11]의 이론을 준용하나 Hughes[12]는 Shade의 이론은 웨브의 전단변형에 기인한 비틀강성의 감소를 고려하지 않음을 지적하고 이를 고려한 수정계수 R_x 를 도입하여 다음과 같이 산정할 것을 제안하였다.

$$D_{xy} = \frac{Ed^2\hat{h}}{4(1+\nu)}R_x \quad (16)$$

여기서

$$R_x = 1 / \left[1 + \frac{2d\hat{h}\hat{Y}}{t_w t_{wy}} + \frac{\alpha_x^2 + 1/\alpha_x^2}{8(1+\nu)} \right]$$

$$\hat{h} = \frac{2h_u h_l}{h_u + h_l}, \quad \hat{Y} = \frac{t_{wx}}{S_x} + \frac{t_{wy}}{S_y}, \quad \alpha_x = \frac{S_x}{S_y}$$

이고 기타 기호들은 Fig. 3에 정의된 바와 같다.

이상의 강성평가와 함께 직교이방성 후판과 같은 방법으로 복판패널에 대해서도 (12)와 같은 매트릭스 형식의 고유치 문제를 얻을 수 있다.

3. Mindlin판유추 구조계 진동의 감도해석

Mindlin판유추 구조계의 설계변경에 따른 고유진동 감도해석을 직접미분법[예로서 13,14] 즉, 고유진동방정식을 설계변수에 대해 직접 미분하므로써 고유진동수 및 고유 mode의 감도를 구하기로 한다.

Rayleigh-Ritz방법에 의한 Mindlin판유추구조계의 고유진동문제는 고유치문제 (12)로 귀착된다. (12)를 r 차 mode에 대해 나타내면

$$[K]\{H\}_r = \Lambda_r [M]\{H\}_r \quad (17)$$

여기서 $[K]$ 및 $[M]$ 은 계의 강성 및 관성매트릭스로서 대칭행렬이 되고, Λ_r 및 $\{H\}_r$ 은 각각 r 차 고유치 및 고유벡터이다.

(17)의 r 차 고유벡터를

$$\{H\}_r^T [M] \{H\}_r = 1 \quad (18)$$

와 같이 정규화하면 다음의 직교관계식이 성립한다.

$$\{H\}_s^T [M] \{H\}_r = \delta_{sr} \quad (19)$$

$$\{H\}_s^T [K] \{H\}_r = \Lambda_r \delta_{sr}$$

여기서 $\{H\}_s$ 는 s 차 고유벡터이고, δ_{sr} 는 Kronecker delta이다.

설계자에 의해 정의된 NB 개의 설계변수 $b_j (j=1, 2, \dots, NB)$ 의 변경에 따른 r 차 고유치 Λ_r 의 감도 $\Lambda_{r,j}$ 는 (17)를 설계변수 b_j 에 대해 직접미분하여 $[K]$ 및 $[M]$ 매트릭스의 대칭성과 고유벡터의 직교관계식을 이용하면 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Lambda_{r,j} = \{H\}_r^T ([K]_{,j} - \Lambda_r [M]_{,j}) \{H\}_r \quad (20)$$

여기서 하첨자 j 는 설계변수 b_j 에 대한 미분을 나타낸다.

설계변수 b_j 에 대한 r 차 고유벡터 $\{H\}_r$ 의 감도 $\{H\}_{r,j}$ 는 전개정리에 의해 설계변경전 기준계의 고유벡터의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{H\}_{r,j} = \sum_{k=1}^N C_{rk} \{H\}_k \quad (21)$$

여기서 N 은 $[K]$ 및 $[M]$ 매트릭스의 차수이고 미정상수 C_{rk} 는 고유벡터의 직교관계식을 이용하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$C_{rs} = \frac{\{H\}_r^T ([K]_j - \Lambda_r [M]_j) \{H\}_s}{\Lambda_r - \Lambda_s},$$

$$s = 1, \dots, N \text{ and } s \neq r \quad (22)$$

$$C_{rr} = -\frac{1}{2} \{H\}_r^T [M]_j \{H\}_r,$$

이상과 같이 고유치 및 고유벡터의 감도가 구해지면 이를 이용하여 설계변수 b_j 가 δb_j 만큼 변경될 때의 고유치 및 고유벡터의 변화량 $\Delta \Lambda_r$ 및 $\Delta \{H\}_r$ 을 설계변수 변화량이 작다고 가정하면 다음과 같이 예측할 수 있다.

$$\Delta \Lambda_r \approx \sum_{j=1}^{NB} \Lambda_{r,j} \delta b_j \quad (23)$$

$$\Delta \{H\}_r \approx \sum_{j=1}^{NB} \{H\}_{r,j} \delta b_j$$

4. 진동파형 가정 함수

본 절에서는 회전에 대해 탄성구속된 경계조건을 갖는 Mindlin판유추 구조계진동의 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 해석에 있어서 진동파형가정함수로 사용될 양단 회전에 대해 탄성구속된 Timoshenko보함수의 유도 및 Timoshenko보함수 성질을 갖는 다항식 즉, Timoshenko보의 힘의 평형식, 보함수 직교관계식 및 회전에 대해 탄성구속 경계조건을 만족하는 다항식 도출방안을 제시한다.

4.1 양단이 회전에 대해 탄성구속된 Timoshenko보함수

균일단면 Timoshenko보의 횡방향 고유진동방정식은 다음과 같다.

$$\rho I \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - KAG \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} - \psi(x,t) \right]$$

$$= 0 \quad (24)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - KAG \left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right] = 0$$

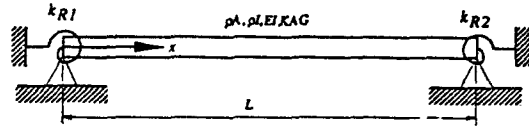


Fig. 4 Uniform Timoshenko beam with ends elastically restrained against rotation

여기서 $y(x,t)$ 및 $\psi(x,t)$ 는 각각 보의 횡방향처짐 변위 및 굽힘회전각이고 ρ , E 및 G 는 재료의 질량밀도, 인장탄성계수, 전단탄성계수이며, A 및 I 는 단면적 및 단면2차모멘트, K 는 전단계수이다.

조화진동

$$y(x,t) = Y(x)e^{i\omega t}, \quad \psi(x,t) = \Psi(x)e^{i\omega t} \quad (25)$$

에 대하여

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \hat{b}^2 = \frac{\rho A L^4 \omega^2}{EI} \quad (26)$$

$$r^2 = \frac{\rho I}{\rho A L^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{KAG L^2}$$

와 같이 정의된 무차원길이좌표 및 무차원파라미터를 도입하면 (24)로부터 미분방정식

$$s^2 \frac{d^2 \Psi}{d\xi^2} + (\hat{b}^2 r^2 s^2 - 1) \Psi + \frac{1}{L} \frac{dY}{d\xi} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + \hat{b}^2 s^2 Y - L \frac{d\Psi}{d\xi} = 0$$

이 얻어진다.

Fig. 4에 보인바와 같이 양단 회전에 대해 탄성구속된 경우의 경계조건 식은

$$Y(0) = 0, \quad \Psi(0) = \frac{1}{K_{R1}} \Psi'(0)$$

$$Y(1) = 0, \quad \Psi(1) = -\frac{1}{K_{R2}} \Psi'(1) \quad (28)$$

과 같이 기술된다. 여기서 '는 ξ 에 대한 미분을

뜻하며

$$K_{R1} = \frac{k_{R1}L}{EI}, \quad K_{R2} = \frac{k_{R2}L}{EI}$$

이다.

경계조건 (28)를 만족하는 미분방정식 (27)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$Y(\xi) = \cosh \hat{b}\alpha\xi + \mu \sinh \hat{b}\alpha\xi - \cos \hat{b}\beta\xi + \delta \sin \hat{b}\beta\xi \quad (29)$$

$$\Psi(\xi) = \sinh \hat{b}\alpha\xi + \mu \cosh \hat{b}\alpha\xi + \lambda \zeta \delta \cos \hat{b}\beta\xi + \lambda \zeta \sin \hat{b}\beta\xi$$

여기서

$$\left. \begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mp (r^2 + s^2) + \{(r^2 - s^2)^2 + 4/b^2\}^{1/2} \right]^{1/2}$$

for $\sqrt{(r^2 - s^2)^2 + 4/b^2} > (r^2 + s^2)$

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\zeta = \frac{\beta^2 - s^2}{\alpha^2 - s^2} \quad (30)$$

$$\delta = \frac{\cosh \hat{b}\alpha - \cos \hat{b}\beta + \frac{\hat{b}\alpha}{K_{R1}}(1+\zeta)\sinh \hat{b}\beta}{\lambda \zeta \sinh \hat{b}\alpha - \sin \hat{b}\beta}$$

$$\mu = \frac{-\lambda \zeta \cosh \hat{b}\alpha + \lambda \zeta \cos \hat{b}\beta - \frac{\hat{b}\alpha}{K_{R1}}(1+\zeta)\sinh \hat{b}\beta}{\lambda \zeta \sinh \hat{b}\alpha - \sin \hat{b}\beta}$$

이고, \hat{b} 는 (26)에 정의된 고유치파라미터이며, 고유치방정식은 다음과 같다.

$$2 - 2\cosh \hat{b}\alpha \cos \hat{b}\beta + \left(\frac{1}{K_{R1}} + \frac{1}{K_{R2}} \right) \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda \zeta} \right) \hat{b}\alpha \cosh \hat{b}\alpha \sin \hat{b}\beta$$

$$-(1+\zeta) \left(\frac{1}{K_{R1}} + \frac{1}{K_{R2}} \right) \hat{b}\alpha \sinh \hat{b}\alpha \cos \hat{b}\beta \quad (31)$$

$$- \left\{ \left(\lambda \zeta - \frac{1}{\lambda \zeta} \right) - \frac{\hat{b}^2 \alpha^2}{K_{R1} K_{R2}} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\zeta}{\lambda} + \frac{1}{\lambda \zeta} \right) \right\}$$

$$\sinh \hat{b}\alpha \sin \hat{b}\beta = 0$$

여기서 λ, ζ 는 (30)에 정의된 바와 같다.

4.2 Timoshenko보함수 성질을 갖는 다항식

첫번째 다항식 즉, 굽힘회전각에 대한 $\Psi_1(\xi)$ 및 횡방향처짐에 대한 $Y_1(\xi)$ 를 정의하기 위하여 우선 $\Psi_1(\xi)$ 를

$$\Psi_1(\xi) = a_{01} + a_{11}\xi + a_{21}\xi^2 + a_{31}\xi^3 \quad (32)$$

와 같이 가정하면 $Y_1(\xi)$ 는 Timoshenko보의 힘의 평형식으로 부터 얻을 수 있다. 이를 위하여 (27)에서 w^2 를 소거하면

$$-r^2(Y'' - LY')\Psi + \left(\frac{Y'}{L} - \Psi + s^2\Psi'' \right)Y = 0 \quad (33)$$

여기서 r^2 및 s^2 은 (26)의 정의와 같다.

Timoshenko보이론을 Euler보이론과 비교했을 때 전단변형 및 회전관성효과가 공히 진동수를 낮추는 결과로 귀착되는데, 일반적으로 전자가 후자보다 현저히 크다. 따라서 (33)에서 회전관성효과를 무시하므로써 $Y(\xi)$ 와 $\Psi(\xi)$ 의 상관식은 근사적으로 다음과 같이 기술된다.

$$Y' \approx L(\Psi - s^2\Psi'') \quad (34)$$

(34)에 (32)을 대입하면 $Y_1(\xi)$ 는 다음과 같다.

$$Y_1(\xi) = L \left\{ \frac{a_{31}}{4}\xi^4 + \frac{a_{21}}{3}\xi^3 + \left(\frac{a_{11}}{2} - 3s^2 \right) \xi^2 + (a_{01} - 2a_{21}s^2)\xi + c \right\} \quad (35)$$

(32) 및 (35)의 상수계수에 대해 경계조건 (28)를 만족하도록 하므로써 $\Psi_1(\xi)$ 와 $Y_1(\xi)$ 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\Psi_1(\xi) = A_1(\xi^3 + A_{21}\xi^2 + A_{11}\xi + A_{01}) \quad (36)$$

$$Y_1(\xi) = A_1 L \left[\frac{1}{4} \xi^4 + \frac{A_{21}}{3} \xi^3 + \frac{(A_{11} - 3s^2)}{2} \xi^2 + (A_{01} - 2A_{21}s^2) \xi \right]$$

여기서

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{6 + K_{R2}(1 + 12s^2)}{6(K_{R1} + 2)(K_{R2} + 2) - 4(1 - 6s^2)\hat{K}} \\ A_{11} &= K_{R1}A_{01} \\ A_{21} &= -\frac{K_{R2} + 3 + \hat{K}A_{01}}{K_{R2} + 2} \\ \hat{K} &= K_{R1} + K_{R2} + K_{R1} + K_{R2} \end{aligned} \quad (37)$$

이 고 상수계수 λ_1 은 Timoshenko보합수의 정교화 직교관계식 즉,

$$\int_0^1 (\rho A Y_m Y_n + \rho I \Psi_m \Psi_n) d\xi = \delta_{mn} \quad (38)$$

의 ($m=n=1$)에 대해 만족하는 값이다. 여기서 m , n 은 진동차수이고 w_m 은 m 차 고유원진동수, δ_{mn} 은 Kronecker delta이다.

Bhat[1]는 Rayleigh-Ritz방법에 의한 박판진동 해석의 진동과형가정함수로써 Euler보합수 성질을 갖는 직교다항식을 도출하는데 있어서, 두번 째 이상의 다항식들을 직교다항식의 성질을 이용하여 Euler보합수의 직교관계식을 만족하도록 하는 recurrence formula를 제시하였다. 그러나 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식의 도출에 있어서 두번 째 다항식인 $Y_2(\xi)$ 및 $\Psi_2(\xi)$ 를 Bhat가 제시한 formula를 사용하여 구할 수 없다. 왜냐하면 굽힘 회전각에 대한 1차 고유함수가 보의 중앙부에 절점 (node)를 갖기 때문이다. 따라서 두번 째 다항식을 정의하기 위하여 $\Psi_2(\xi)$ 를

$$\Psi_2(\xi) = a_{02} + a_{12}\xi + a_{22}\xi^2 + a_{32}\xi^3 + a_{42}\xi^4 \quad (39)$$

과 같이 취하고 (34)에 의해 $Y_2(\xi)$ 를 결정한다. 그 후 상수계수를 경계조건 (28)과 ($m=1, n=2$) 일 경우에 대해 Timoshenko보합수의 직교관계식 (38)이 만족되도록 하면

$$\Psi_2(\xi) = A_2(\xi^4 + A_{32}\xi^3 + A_{22}\xi^2 + A_{12}\xi + A_{02}) \quad (40)$$

$$Y_2(\xi) = A_2 L \left(\frac{1}{5} \xi^5 + \frac{1}{4} A_{32} \xi^4 + \left(\frac{A_{22}}{3} - 4s^2 \right) \xi^3 + \left(\frac{A_{12}}{2} - 3A_{32}s^2 \right) \xi^2 + (A_{02} - 2A_{22}s^2) \xi \right)$$

을 얻는다. 여기서

$$\begin{aligned} A_{32} &= -\frac{\hat{A}}{\hat{B}} \\ A_{22} &= C_1 - A_{32}C_2 \\ A_{12} &= K_{R1}A_{02} \\ A_{02} &= e_1 - A_{32}A_{01} \\ \hat{A} &= \int_0^1 \left[\rho A \left\{ \frac{1}{5} \xi^5 + \left(\frac{C_1}{3} - 4s^2 \right) \xi^3 + \frac{K_{R1}e_1}{2} \xi^2 + (e_1 - 2C_1s^2) \xi \right\} Y_1(\xi) + \rho I \left\{ \xi^4 + C_1 \xi^2 + K_{R1}e_1 \xi + e_1 \right\} \Psi_1(\xi) \right] d\xi \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \hat{B} &= \int_0^1 \left[\rho A \left\{ \frac{1}{4} \xi^4 + \frac{C_2}{3} \xi^3 + \frac{K_{R1}e_2}{2} - 3s^2 \right\} \xi^2 + (e_2 - 2C_2s^2) \xi \right] Y_1(\xi) + \rho I \left\{ \xi^3 + C_2 \xi^2 + K_{R1}e_2 \xi + e_2 \right\} \Psi_1(\xi) \right] d\xi \end{aligned}$$

$$C_1 = -\frac{K_{R2} + 4 + \hat{K}e_1}{K_{R2} + 2}$$

$$C_2 = -\frac{K_{R2} + 3 + \hat{K}A_{01}}{K_{R2} + 2}$$

$$e_1 = \frac{4K_{R2}(1 + 15s^2) + 28}{15(K_{R1} + 2)(K_{R2} + 2) - 10(1 - 6s^2)\hat{K}}$$

$$e_2 = A_{01}$$

이 고 A_{01} 및 K 는 (37)의 정의와 같고, 상수계수 A_2 는 ($m=n=2$)일 때 (38)을 만족하는 값이다.

$\Psi_k(\xi)$ 및 $Y_k(\xi)$, $k=3,4,\dots$ 에 대해서는 우선 $Y_k(\xi)$ 를 직교다항식의 성질을 이용하여

$$\Psi_k(\xi) = A_k [(\xi - B_k)Y_{k-1}(\xi) - C_k Y_{k-2}(\xi)], \quad k=3,4,\dots \quad (42)$$

와 같이 취하고[15], $\Psi_k(\xi)$ 에 대해서는 $Y_k(\xi)$ 와 같은 형태(식 42)로 취할 수 있다. 그러나 도출하려는 다항식을 Mindlin판유추구조계의 진동해석에서는 물론이러니와 박판유추구조계의 진동해석에도 직접 이용될 수 있도록 $\Psi_k(\xi)$ 에 대해서는 전단강성이 ∞ 즉, $s^2 = EI/KAGL^2 \rightarrow 0$ 인 경우

$$[Y_k(\xi; s^2)]_{s^2=0} = [\Psi_k(\xi; s^2)]_{s^2=0}, \quad k=3,4,\dots \quad (43)$$

이 만족되어야 한다는 조건을 부가하므로써 다음과 같이 얻어진다.

$$Y_k(\xi) = A_k[(\xi - B_k)Y_{k-1}(\xi) - C_k Y_{k-2}(\xi)] \quad k=3,4,\dots \quad (44)$$

$$\Psi_k(\xi) = A_k[(\xi - B_k)\Psi_{k-1}(\xi) - C_k \Psi_{k-2}(\xi) + Y_{k-1}(\xi)]$$

여기서 B_k, C_k 는 각각 $(m=k, n=k-1)$ 및 $(m=k, n=k-2)$ 에 대해 (38)이 만족되도록 결정하고 상수계수 A_k 는 $(m=n=k)$ 일 때 (38)을 만족하는 값이다.

5. 수치계산 예 및 고찰

Rayleigh-Ritz방법에 의한 Mindlin판유추 구조계의 진동해석을 위한 진동파형함수로서 본 논문에서 도출한 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다

항식을 이용한 방법이 정확도 및 효율성을 보증하기 위하여 등방성 후판 및 실선의 이중저 구조의 1/8축척모형을 대상으로 일련의 수치계산을 수행하여 그 결과를 Timoshenko보합수를 사용한 결과와 비교·검토하였다. 모든 수치계산은 IBM-PC 386을 사용하여 수행하였다.

다항식 이용방법의 정확도 검증을 위하여 Fig. 2에 보인 회전에 대해 탄성구속 경계조건의 특별한 경우로서 취급될 수 있는 고정적 경계조건 즉, 4변 모두 단순지지인 경우, S-S-S-S($k_{R1} = k_{R2} = k_{R1} = k_{R2} = 0$), 서로 마주 보는 두 변이 각각 단순지지 및 고정인 경우, S-C-S-C($k_{R1} = k_{R2} = 0, k_{R1} = k_{R2} = \infty$), 4변 모두 고정인 경우, C-C-C-C($k_{R1} = k_{R2} = k_{R1} = k_{R2} = \infty$)의 경계조건을 갖는 등방성 후판에 대해 수치계산을 수행하여 기존의 연구결과와 비교·검토하였다. 수치계산에 있어서는 Dawe등 [5]의 연구에서 사용된 변의 길이 a 이고 판 두께/길이 비 즉, $h/a=0.1$ 인 정사각형 등방성 후판을 택하여 전단계수, Poisson비 및 진동파형가정 (8)에 있어서 함수등은 $K=\pi^2/12$ (S-S-S-S, S-C-S-C) 또는 0.8601(C-C-C-C), $\nu=0.3$ 및 $p=q=5$ 로 [5]에서와 같이 취하여 계산하였다. Table 1에 저차 6개의 mode에 대한 진동수 파라미터 $\Omega = \omega \sqrt{2(1+\nu)\rho a^2/E}$ 의 결과를 나타내었다. 동 표에는 S-S-S-S의 경우에는 엄밀해[16]를, 기타의 경우에는 Timoshenko보합수를 사용하여 Rayleigh-Ritz방법에 의한 결과[5]도 함께 수록하였다. Table 1에서

Table 1 Frequency parameter $\Omega = \omega \sqrt{2(1+\nu)\rho a^2/E}$ for an isotropic thick square plate : $h/a=0.1$

B.C.	S-S-S-S		S-C-S-C		C-C-C-C		
	Trial func.	Mindlin solution[16]	present work using polynomials	using Timoshenko beam func.[5]	present work using polynomials	using Timoshenko beam func.[5]	present work using polynomials
Mode (m,n)							
(1,1)		0.930	0.930	1.302	1.300	1.594	1.591
(2,1)		2.218	2.220	2.398	2.395	3.046	3.041
(1,2)		2.218	2.220	2.888	2.887	3.046	3.043
(2,2)		3.402	3.405	3.852	3.845	4.285	4.272
(3,1)		4.144	4.153	4.237	4.239	5.035*	5.031*
(1,3)		4.144	4.153	4.939	4.940	5.078**	5.078**

* Mode (3,1) - (1,3), ** Mode (1,3) + (3,1)

Table 2 Frequency parameter $\Omega = \omega \sqrt{2(1+\nu)\rho a^2/E}$ for an isotropic thick square plate with all edges equally elastically restrained against rotation : $K_{Rz1} = K_{Rz2} = K_{Ry1} = K_{Ry2} = K_R$, $h/a = 0.1$

B.C.		$K_R = 10$		$K_R = 50$		$K_R = 100$		$K_R = 1000$	
Mode (m,n)	Trial func.	Using Timoshenko beam func.	Using polyno- mials	Using Timoshenko beam func.	Using polyno- mials	Using Timoshenko beam func.	Using polyno- mials	Using Timoshenko beam func.	Using polyno- mials
	(1,1)		1.303	1.302	1.499	1.498	1.540	1.538	1.582
(2,1)		2.616	2.619	2.887	2.889	2.949	2.950	3.016	3.016
(1,2)		2.618	2.620	2.891	2.890	2.954	2.952	3.021	3.018
(2,2)		3.792	3.791	4.092	4.085	4.166	4.156	4.246	4.234
(3,1) - (1,3)		4.517	4.526	4.818	4.826	4.893	4.900	4.977	4.982
(1,3) - (3,1)		4.532	4.539	4.857	4.861	4.938	4.941	5.028	5.029
Run Time (sec)	Time1*	172	22	175	26	175	27	176	23
	Time2**	165	134	181	145	183	151	186	158
	Total	337	156	356	171	358	178	362	181

* CPU time for constructing the system matrix[M] and [K]

** CPU time for solving the eigenvalue problem

보듯이 서로간의 결과는 오차 1% 내외의 매우 부합성이 양호함을 알 수 있다.

다항식 이용방법의 효율성 검토를 위하여 4변 모두 회전에 대해 탄성구속된 정사각형 등방성 후판($h/a=0.1$)에 대하여 양단 회전에 대해 탄성구속된 Timoshenko보의 보합수 및 다항식을 이용하여 수치계산을 수행하였다. 수치계산에 있어서는 계산의 편의를 위해 4변모두 동일하게 회전에 대해 구속되었다고 가정하고 회전에 대한 탄성구속도를 나타내는 무차원파라미터의 값을 $K_R=10, 50, 100$ 및 1000 로 취하여 두 방법에 의하여 계산된 진동수파라미터 $\Omega = \omega \sqrt{2(1+\nu)\rho a^2/E}$ 의 결과를 Table 2에 나타내었다. 동 표에는 계산효율성 검토를 위하여 계산시간도 함께 수록하였는데, 계산시간을 고유치 문제 (12)에 있어서의 계의 특성 매트릭스[K],[M]을 형성하는 시간과 고유치문제를 푸는 데 소요된 시간으로 구분하였다. Table 2에서 보듯이 이 경우에도 두 방법에 의한 결과의 부합성이 매우 양호할 수 있음을 알 수 있다. 특히 계산시간에 있어서는 다항식을 이용할 경우 보합수를 이용할 때 보다 계의 특성매트릭스 형성에 소요되는 시간이 거의 1/8로 줄어들어 전체적으로

50% 감소함을 알 수 있다. 따라서 다항식을 이용하면 보합수를 이용할 때 보다 계산효율을 훨씬 향상시킬 수 있음이 확인되었다. 또한, 정[17]은 도출한 동 다항식을 Rayleigh-Ritz방법에 의한 박판진동해석의 진동과형가정함수로 직접 사용하여 Euler보합수를 사용할 때와 대등한 정확도의 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.

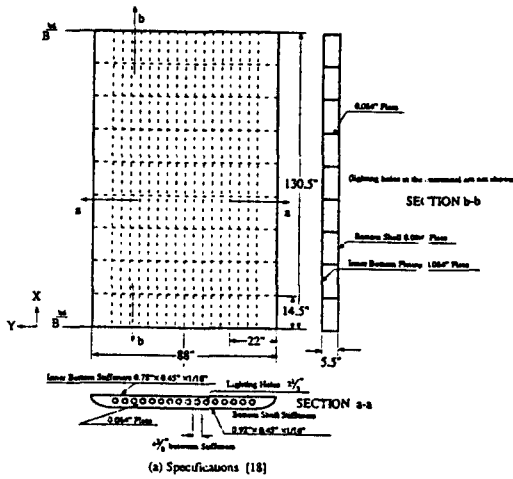
한편, 실제에 대한 응용으로서 복판판넬의 수치계산 대상으로서 LR규칙에 의거 설계된 진화물선 중앙부 이중저구조의 1/8축척 모델을 택해 진동해석 및 감도해석을 이중저구조의 1/8축척 모델을 택해 진동해석 및 감도해석을 수행하였다. 이 모델은 William등[18]이 준정적강도문제에 관한 일련의 실험적 연구에 사용된 모델이며, Fig.5에는 이의 재료의 물성특성, 단면치수 및 직교이방성 Mindlin판유추 모델링방법에 따른 강성 및 등가유�효두께등의 산정치[17]를 나타내었다. 정[17]은 이 경우에 대해서도 다항식을 이용할 경우 보합수를 이용할 때와 대등한 정확도의 해를 얻을 수 있음을 확인하였다. 한편 실선 이중저 구조의 진동문제에 있어 주변고착도가 고유진동수에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 4변모두 회전에 대해

Table 3 Sensitivities of natural frequencies, f_n , w.r.t. design variables $b = \{h_u, h_l, t_{wx}, t_{wy}, K_R\}^T$ for 1/8 scale double bottom model with all edges equally elastically restrained against rotation

B.C.		$K_R = 10$		$K_R = 50$		$K_R = 100$	
Order	Meth.	Using Timoshenko beam func.	Using polynomials	Using Timoshenko beam func.	Using polynomials	Using Timoshenko beam func.	Using polynomials
	1	$\partial f_1 / \partial h_u$	-13.8	-12.8	-29.5	-28.5	-31.9
$\partial f_1 / \partial h_l$		-53.0	-52.0	-65.9	-65.0	-68.3	-67.5
$\partial f_1 / \partial t_{wx}$		25.9	29.6	29.3	33.0	30.0	33.7
$\partial f_1 / \partial t_{wy}$		127.3	124.8	162.1	158.8	168.4	165.0
$\partial f_1 / \partial K_R$		0.628	0.592	0.040	0.038	0.012	0.010
2	$\partial f_2 / \partial h_u$	-44.4	-43.8	-53.6	-53.1	-55.0	-54.5
	$\partial f_2 / \partial h_l$	-72.4	-71.2	-80.7	-79.8	-79.8	-81.6
	$\partial f_2 / \partial t_{wx}$	147.0	152.8	152.5	159.6	153.8	161.4
	$\partial f_2 / \partial t_{wy}$	47.7	42.6	70.1	63.3	73.3	67.2
	$\partial f_2 / \partial K_R$	0.348	0.315	0.028	0.024	0.007	0.007
3	$\partial f_3 / \partial h_u$	-67.6	-67.9	-71.9	-72.6	-72.5	-73.4
	$\partial f_3 / \partial h_l$	-88.7	-88.8	-92.5	-93.1	-93.3	-94.0
	$\partial f_3 / \partial t_{wx}$	293.3	246.4	240.7	249.6	241.3	250.5
	$\partial f_3 / \partial t_{wy}$	5.46	5.96	5.56	5.46	7.20	7.71
	$\partial f_3 / \partial K_R$	0.166	0.131	0.012	0.010	0.003	0.002
4	$\partial f_4 / \partial h_u$	-48.5	-47.8	-63.1	-62.0	-65.9	-64.6
	$\partial f_4 / \partial h_l$	-79.5	-79.0	-89.1	-88.3	-91.0	-90.1
	$\partial f_4 / \partial t_{wx}$	12.8	12.9	12.5	12.5	12.4	12.3
	$\partial f_4 / \partial t_{wy}$	249.6	248.4	276.3	274.2	281.5	279.1
	$\partial f_4 / \partial K_R$	0.186	0.189	0.014	0.014	0.004	0.004
5	$\partial f_5 / \partial h_u$	-60.6	-59.9	-72.0	-70.4	-74.1	-72.3
	$\partial f_5 / \partial h_l$	-86.7	-86.1	-94.4	-93.4	-96.0	-94.8
	$\partial f_5 / \partial t_{wx}$	52.9	52.4	54.4	54.0	54.8	54.5
	$\partial f_5 / \partial t_{wy}$	197.5	196.3	218.4	215.8	222.4	219.4
	$\partial f_5 / \partial K_R$	0.142	0.143	0.011	0.011	0.003	0.003
6	$\partial f_6 / \partial h_u$	-84.5	-89.3	-86.1	-90.5	-86.3	-90.1
	$\partial f_6 / \partial h_l$	-103.1	-104.1	-101.8	-104.9	-102.1	-104.7
	$\partial f_6 / \partial t_{wx}$	297.6	314.8	296.6	311.3	296.6	309.0
	$\partial f_6 / \partial t_{wy}$	25.6	29.6	18.8	22.8	17.3	21.3
	$\partial f_6 / \partial K_R$	0.050	0.038	0.004	0.003	0.001	0.001
Run time(sec.)		860	132	860	132	860	132

동일하게 탄성구속되었다고 가정하여 주변고착도를 나타내는 무차원파라미터 K_R 의 변화에 따른 고유진동수 변화를 Fig. 6에 도시하였다. Fig. 6에서 보듯이 고차에 갈수록 주변고착도의 영향은 줄어들며 $K_R = 10000$ 이상이면 4변모두 고정인 것으로 간주할 수 있음을 알 수 있다.

설계변경에 따른 실선 이중저구조의 고유진동 특성 변화를 살펴보기 위해 설계변수로서 상판 및 하판두께 h_u 및 h_l , x 및 y방향 웨브두께 t_{wx} 및 t_{wy} 및 주변고착도를 나타내는 무차원파라미터 K_R 를 택하여 감도해석을 수행하였다. Table 3에는 이들 설계변수에 대한 고유진동수의 감도를 Timoshe-



Material : Mild steel
 Mass density : $\rho = 7.322 \times 10^{-6} \text{ lb sec}^2 / \text{in}^3$
 Young's modulus : $E = 30.2 \times 10^6 \text{ lb / in}^2$
 Poisson's ratio : $\nu = 0.3$
 Bending rigidity in x-dir and y-dir : $D_x = 4.574 \times 10^8 \text{ lb in}$, $D_y = 3.854 \times 10^8 \text{ lb in}$
 Torsional rigidity : $D_{xy} = 4.117 \times 10^8 \text{ lb in}$
 Shear coefficients in x-dir and y-dir : $K_x = 0.055$, $K_y = 0.090$
 Equivalent effective thickness : $h_x = 0.2138 \text{ in}$
 Equivalent effective shear thickness in x-dir and y-dir : $h_s = 0.1865 \text{ in}$, $h_s = 0.1611 \text{ in}$

(b) Equivalent system parameters as the orthotropic Mindlin plate analogy [17]

Fig. 5 1/8 scale model of the double bottom structure of a bulk carrier

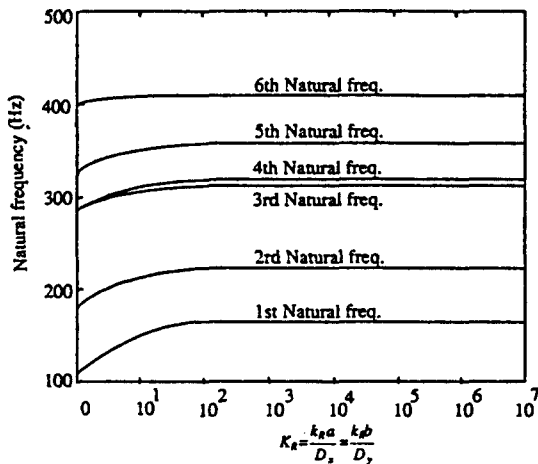


Fig. 6 Variation of natural frequencies w.r.t. parameter of elastic restraint against rotation

Table 4 Natural frequency of 1/8 scale double bottom model with all edges equally elastically restrained against rotation : $K_R = 10$

order	1	2	3	4	5	6
Natural frequency(Hz)	148.98	212.85	305.00	309.27	351.03	410.74

nko보합수 성질을 갖는 다항식 및 보합수를 사용하여 계산된 결과를 나타내었으며 계산시간도 함께 수록하였다. Table 3에서 보듯이 감도해석에 있어서도 두 방법에 의한 계산부합성이 매우 양호함을 알 수 있다. 특히 계산시간에 있어서는 다항식을 이용할 경우 보합수 이용 때의 약 1/7로 줄어든다. 이는 감도해석에 있어서는 계의 특성 매트릭스의 각 설계변수에 대한 미분매트릭스의 반복적 형성이 필요하며 이들 미분매트릭스 형성에 필요한 계산시간이 감도해석에 필요한 계산시간의 대부분을 차지하며 전기 진동해석의 수치계산 예를 통하여 확인되었듯이 다항식의 이용은 보합수 이용때보다 이들 매트릭스의 형성에 있어 훨씬 효율적이기 때문이다.

감도해석방법 자체의 정확도 및 효율성 검토를 위하여 설계변경에 대한 고유진동수 변화량을 감도해석을 이용하여 예측한 결과와 통상적 전체재해석(ordinary reanalysis)에 의해 구한 결과를 비교·검토하였다. 수치계산에 있어서 기준계로서 $K_R = 10$ 인 경우를 택하였는데 이의 고유진동수는 Table 4에 보인 바와 같다. 설계변수 h_u 및 K_R 에 대해서 기준계에 대한 이들 값을 10%, 30% 및 50%로 변화시켜가면서 고유진동수 변화량 예측 결과를 Table 5 및 Table 6에 각각 나타내었다. 이들 표에서 보듯이 설계변경량이 기준계의 설계변수 값의 30%까지는 감도해석을 이용하면 통상적 전체재해석 결과를 기준으로 오차 약 10%내외의 유용한 결과를 얻을 수 있으며 계산시간을 설계변수 하나에 대해 약 80% 절감할 수 있음을 알 수 있다.

6. 결 론

Rayleigh-Ritz방법에 의거한 Mindlin판유추 구조계의 진동해석에 합당한 진동과형가정함수로서

Table 5 Prediction of the change of natural frequencies, Δf_n , w.r.t. h_n for 1/8 scale double bottom model with all edges equally elastically restrained against rotation : $K_R = 10$

(Unit : Hz)

Order	Meth.	10%		30%		50%	
		Ordinary Reanalysis	Using sensitivity	Ordinary Reanalysis	Using sensitivity	Ordinary Reanalysis	Using sensitivity
Δf_1		-0.20	-0.18	-1.05	-1.00	-2.30	-1.30
Δf_2		-0.83	-0.78	-2.89	-2.80	-5.29	-3.89
Δf_3		-1.79	-1.73	-5.71	-5.18	-9.86	-8.63
Δf_4		-1.34	-1.23	-4.65	-4.10	-8.44	-6.16
Δf_5		-1.82	-1.75	-6.02	-5.86	-10.65	-8.76
Δf_6		-2.97	-3.05	-9.14	-8.67	-15.39	-13.28
Run time(sec.)		156	28	156	28	156	28

* w.r.t. that of baseline structure

Table 6 Prediction of change of natural frequencies, Δf_n , w.r.t. K_R for 1/8 scale double bottom model with all edges equally elastically restrained against rotation : $K_R = 10$

(Unit : Hz)

Order	Meth.	10%		30%		50%	
		Ordinary Reanalysis	Using sensitivity	Ordinary Reanalysis	Using sensitivity	Ordinary Reanalysis	Using sensitivity
Δf_1		1.09	1.15	2.91	3.15	4.36	5.74
Δf_2		0.80	0.87	2.15	2.62	3.24	4.37
Δf_3		0.49	0.52	1.33	1.56	2.01	2.61
Δf_4		0.71	0.76	1.91	2.19	2.87	3.79
Δf_5		0.63	0.66	1.68	1.97	2.53	3.27
Δf_6		0.28	0.22	0.74	0.65	1.10	1.01
Run time(sec.)		157	29	157	29	157	29

* w.r.t. that of baseline structure

Timoshenko 보합수 성질을 갖는 다항식 도출방안을 제시하고 이를 이용하여 회전에 대해 탄성 구속된 경계조건을 갖는 Mindlin판유추 구조계의 진동해석 및 감도해석방법을 정식화하였다. 아울러, 이의 정확도 및 유용성을 검토하기 위하여 Mindlin판유추 구조계로써 동방성 후판 및 실선의 이중저구조의 같은 복판패널을 대상으로 일련의 수치계산을 수행하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) Rayleigh-Ritz방법에 의거한 Mindlin판유추 구조계의 진동해석을 위한 진동과형가정함수로서 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식의 이용은 고전적 경계조건 뿐만 아니라 회전에 대해 탄성 구속된 경계조건을 갖는 Mindlin판유추 구조계의

진동문제에 있어서 Timoshenko보합수를 이용할 때와 대등한 정확도의 해를 얻을 수 있다. 계산 효율면에서는 진동해석에 필요한 계산시간을 크게 절감하여 구분했을 때 고유치해법에 필요한 시간은 두 경우에 있어서 거의 같지만 계의 특성매트릭스형성에 필요한 계산시간은 Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식을 이용할 경우 Timoshenko보합수를 이용할 때보다 약 1/8로 줄어들어 전체적인 계산시간이 약 50% 절감된다.

(2) Timoshenko보합수 성질을 갖는 다항식 이용의 계산효율성은 감도해석에 있어서 더욱 증대되어 그 계산시간이 보합수 이용때의 약 1/7로

절감된다. 이는 감도해석을 위해서는 계의 특성 매트릭스의 각 설계변수에 대한 미분매트릭스들이 필요하며 이들 미분매트릭스를 형성하는 데 필요한 계산시간이 감도해석계산시간의 대부분을 차지하기 때문이다.

(3) 설계변경에 의한 고유진동특성 변화량 예측에 있어서 감도해석을 이용한 결과는 설계변경량이 설계변경전 설계변수값의 약 30%까지는 통상적 전체재해석에 의해 직접 구한 결과와 부합성이 양호하다. 설계변수 하나에 대한 감도해석에 소요되는 시간은 이 설계변수 변경에 대한 전체재해석 때의 약 20%이다. 따라서 최적동특성 구조물을 추구하는 재설계과정에 있어서 감도해석 결과를 이용하는 방법은 설계변수들의 변경에 따른 시산적 재해석방법에 비해 매우 효율적이다.

후 기

이 논문은 1990년도 한국과학재단지원 목적기초연구 과제번호 90-02-00-02-03의 일부이다. 이 기회에 동 재단에 심심한 사의를 표한다.

참 고 문 헌

- [1] Bhat, R.B., "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Ritz Method", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 102, 1985.
- [2] Dickinson, S.M. and Blasio, A.D., "On the Use of Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method for the Study of the Flexural Vibration and Buckling of Isotropic and Orthotropic Rectangular Plates", *J. of Sound and Vibration*, Vol. 108, 1986.
- [3] Lam, K.Y. and Hung, K.C., "Orthogonal Polynomials and Sub-Sectioning Method for Vibration of Plates", *Computer & Structure*, Vol.34, 1990.
- [4] Lam, K.Y. and Hung, K.C., "Vibration Study on Plates with Siffened Opening Using Orthogonal Polynomials and Partitioning Method", *Computer & Structure*, Vol.37, 1990.
- [5] Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L., "Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates", *J. of Sound and Vibration*, Vol.69, 1980.
- [6] Huang, T.C., "The Effect of Rotary Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", *J. of Applied Mechanics*, Vol.28, ASME, 1961.
- [7] Leissa, A.W., "Recent Studies in Plate Vibrations : 1981-85 Part II. Complicating Effects", *Shock and Vib. Dig.*, Vol.19, 1987.
- [8] Mindlin, R.D., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates", *J. of Applied Mechanics*, Vol.18, ASME, 1951.
- [9] Hinton, E. and Owen, D.R.Jr., *Finite Element Software for Plates and Shells*, Pineridge Press, 1984.
- [10] Cowper, G.R., "The Shear Coefficients in Timoshenko's Beam Theory", *J. of Applied Mechanics*, Vol. 33, ASME 1966.
- [11] Shade, H.A., "Bending Theory of Ship Bottom Structure", *Trans. SNAME*, Vol.46, 1938.
- [12] Hughes, O.F., *Ship Structural Design*, Wiley-Interscience Pub., 1983.
- [13] Fox, R.L. and Kapoor, M.P., "Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors", *Jour. AIAA* Vol.6, No.2, 1968.
- [14] Farshad, M., "Variation of Eigenvalues and Eigenfunctions in Continuum Mechanics", *Jour. AIAA* Vol.12, 1974.
- [15] Conte, S.D. and Boor, C., *Elementary Numerical Analysis*, McGraw Hill Book Comp., 1981.