
 論 文

大韓造船學會論文集
 第29卷 第1號 1992年 3月
 Transactions of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol.29, No. 1, March 1992

전달매트릭스법 및 유한요소-전달매트릭스 결합방법에 의한 구조계의 동특성 감도해석

조대승*, 김극천**

Sensitivity Analysis of Dynamic Characteristics of Structural Systems by the Transfer Matrix Method and the Combined Finite Element-Transfer Matrix Method

by

D. S. Cho* and K. C. Kim**

요 약

공진회피설계, 진동응답 크기 및 진동부가응력의 허용치 설계관점에서의 최적설계를 위해 사전에 지정된 동특성을 갖는 구조물을 설계하기 위해서는 초기설계된 구조물의 설계변경이 요구된다. 이와 같은 경우에 초기설계에 대한 해석과 동시에 기준계(base system) 설계변수 변경에 따른 동특성 및 응답변화량을 계산하는 감도해석방법을 적용하면 효율적인 설계변경이 가능하다.

이산화 모델링에 의한 구조계의 동특성 해석에 있어서 전달 매트릭스법(TMM) 및 유한요소-전달매트릭스 결합방법(FETMM)으로 해석가능한 구조계에 대해서는 이 방법들을 적용하는 것이 유한요소법보다 매우 효율적임은 잘 인식되고 있다. 그러나, 동특성 감도해석에 대한 기존의 연구들은 대부분이 유한요소법의 사용을 전제로 하고 있고, TMM 및 FETMM에 의한 동특성 감도해석 연구사례는 찾아보기 어렵다.

본 논문에서는 TMM 및 FETMM에 의한 구조계의 동특성 감도해석방법을 제시하고, 중간구속조건을 갖는 양단 탄성지지 보-기둥과 부가계를 갖는 보강판을 예로 해서 수치 실험적 검증을 수행하였다. 이로부터 본 논문에서 제시한 감도해석방법의 타당성과 효율성은 물론 최적 동특성 구조물을 추구하는 재설계 과정에 감도해석 결과를 이용하는 방법이 매우 효율적으로 적용될 수 있음이 확인되었다.

발표: 1991년도 대한조선학회 추계연구발표회('91.11.15)

접수일자: 1991년 11월 22일, 재접수일자: 1992년 2월 7일

* 정회원, 현대선박해양연구소

** 정회원, 서울대학교 조선해양공학과

Abstract

For the design of structural systems having the prescribed or optimum dynamic characteristics, some design changes of the initially designed system are required. In these cases, if the sensitivity analysis which can predict the changes of dynamic characteristics due to the changes of design variables is applied, the design changes can be carried out rationally and very efficiently.

For many structural systems, it is well known that the analysis by the transfer matrix method(TMM) and the combined finite element-transfer matrix method(FETMM) is more efficient than the analysis by the finite element method. However, most known studies on the sensitivity analysis of structural systems premise using the finite element method.

In this paper, the sensitivity analysis methods by the TMM and the FETMM are presented and some numerical investigations on the beam-column with elastically restrained ends and intermediate constraints and the stiffened plate having subsystems are carried out. The results of the numerical examples show good accuracy and computational efficiency of the presented methods, and show that the application of sensitivity analysis in the dynamic characteristic reanalysis give good results within the practically changeable range of design variables.

1. 서 론

공진회피설계, 진동응답 크기 및 진동부가용력의 허용치 설계관점에서의 최적설계를 위해 사전에 지정된 동특성을 갖는 구조물을 설계하기 위해서는 초기설계된 구조물의 설계변경이 요구된다. 이와 같은 경우에 초기설계에 대한 해석과 동시에 기준계(base system) 설계변수 변경에 따른 동특성 및 응답변화량을 계산하는 감도해석방법을 이용하면 효율적인 설계변경이 가능하다.

이산화 모델링에 의한 구조계의 동특성 감도해석에 대한 기존의 연구들은 그 대부분이 유한요소법의 사용을 전제로 하고 있다[1, 2](1984, 1986).

일반적으로 구조해석에 있어서 유한요소법(FEM)은 범용성은 높으나 계 전체의 자유도에 비례하는 선형 연립방정식의 해법으로 귀착되어 대용량 전산기가 필요하고 계산시간도 많이 소요되는데 반하여, 전달매트릭스법(TMM) 및 유한요소-전달매트릭스 결합방법(FETMM)은 상태량 벡터의 요소수에 대응하는 차수의 매트릭스로부터 도출되는 선형 연립방정식의 해법으로 귀착되기 때문에 유한요소법에 비해 적은 용량의 전산

기를 이용할 수 있고 계산시간도 짧다. 따라서, 보유추계, 골조구조, 판·각유추구조, 격자구조 및 이들을 1차계로하는 복합적 구조계 등 TMM 및 FETMM으로 해석가능한 구조계[3-5](1963, 1978, 1988)에 대해서는 이들 방법을 적용하는 것이 유한요소법보다 효율적이다[3-15](1963-1991).

TMM 및 FETMM에 의한 감도해석은 유한요소법을 전제로 하는 감도해석방법과는 달리 취급되어야 하겠는데, TMM에 의한 감도해석은 Yamakawa[16](1988)가 전달매트릭스를 직접미분하여 1차감도 전달매트릭스를 유도하고 이를 회전축계와 양단이 단순지지된 보의 과도응답 감도해석에 적용하였고 그 밖의 연구사례는 찾아 보기 어렵다.

본 연구에서는 TMM 및 FETMM에 의해 해석가능한 구조계에 대해 직접미분방법을 이용하여 고차감도 전달매트릭스를 유도하고, 감도상태량 벡터 관계식과 경계에서의 감도상태량벡터의 지지항을 이용한 동특성 감도해석 방법을 제시한다. 또, 기준계의 동특성 해석결과 및 감도전달매트릭스의 특성을 이용하여 감도전달항만의 연산으로 감도연산 대수방정식을 도출하는 효율적인 연산방법을 마련한다.

본 연구에서 제시한 동특성 감도해석방법의 타당성 및 효율성을 확인하기 위해 중간구속조건을 갖는 양단 탄성지지 보-기둥과 부가계를 갖는 보강판에 대해 동특성 감도해석을 수행하였다. 이들 수치계산 예의 기준계 동특성 해석결과는 엄밀해, 유한요소법 등 타 방법에 의한 결과와 비교 검토하였고, 감도해석결과는 감도를 이용한 동특성 변경 예측치와 통상적 재해석에 의한 동특성 변경치를 비교 검토하였다.

2. TMM 및 FETMM에 의한 구조계의 동특성 감도해석

일반적으로 구조계는 양단경계의 유무에 따라 open structural systems, closed structural systems 및 이들에 중간구속조건이 부가된 계 즉, branched structural systems, 중간에 강지지 또는 released conditions를 갖는 계 등으로 구분할 수 있다.

본 장에서는 TMM 및 FETMM에 의한 동특성 감도해석에 요구되는 감도전달매트릭스와 감도상태량벡터 관계식의 유도방법을 일반적으로 기술하고, 이들 관계식과 경계조건을 이용한 동특성 감도해석방법은 open structural systems에 대해서만 기술한다. closed structural systems 및 중간구속조건을 갖는 구조계에 대한 동특성 감도해석 방법은 저자의 논문[17](1991)에 나타나 있다.

2.1 감도전달매트릭스의 유도

TMM 및 FETMM으로 해석가능한 구조계의 전달매트릭스의 유도방법은 [3-6,11,14](1963-1988)에 나타나 있고, 이들 전달매트릭스를 이용한 인접이산화전달요소간의 상태량벡터 관계식은 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} Z^L \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U & R \\ 0' & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} Z^L \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad (2.1a)$$

또는

$$\bar{Z}^L_{i+1} = \bar{U}_i \bar{Z}^L_i \quad (2.1b)$$

여기서 Z^L 은 해당 station의 $(m \times 1)$ 좌상태량벡터, U 는 이산화전달요소의 $(m \times m)$ 전달매트릭스, R 은 $(m \times 1)$ 외력전달벡터, $0'$ 는 $(m \times 1)$ null vector이다. 식(2.1a)를 설계변수 x_j 에 대하여 미분하여 이를 식(2.1a)와 같은 형태로 나타내면

$$\begin{Bmatrix} Z^L_j \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U & \Gamma^{(1)} \\ 0' & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} Z^L_j \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad (2.2a)$$

또는

$$Y^L_{i+1,j} = S_{i,j} Y^L_i \quad (2.2b)$$

여기서

$$\Gamma_i^{(1)} = U_{i,j} Z^L_{i,j} + R_{i,j} \quad (2.3)$$

가 된다. 여기서 하첨자 j 는 설계변수 x_j 에 대한 미분을 나타내며, $Y^L_{i+1,j}$, Y^L_i 는 해당 station의 1차 감도상태량벡터 $S_{i,j}$ 는 1차감도전달매트릭스로 정의되며 식(2.2a)또는 식(2.2b)는 인접 이산화전달요소간의 1차감도 상태량벡터 관계식이다[16](1988).

인접 이산화전달요소간의 2차감도 전달매트릭스 및 감도상태량벡터는 식(2.2a)를 설계변수 x_k 에 대해 미분하고 이를 1차감도 상태량벡터 관계식의 유도에서와 마찬가지로 식(2.1a)의 형태로 나타내면

$$\begin{Bmatrix} Z^L_{j,k} \\ 1 \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} U & \Gamma^{(2)} \\ 0' & 1 \end{bmatrix}_i \begin{Bmatrix} Z^L_{j,k} \\ 1 \end{Bmatrix}_i \quad (2.4a)$$

또는

$$Y^L_{i+1,j,k} = S_{i,j,k} Y^L_{i,j,k} \quad (2.4b)$$

여기서

$$\Gamma_i^{(2)} = U_{i,k} Z^L_{i,j} + \Gamma_{i,k}^{(1)} \quad (2.5)$$

가 된다. 여기서 $Y^L_{i+1,j,k}$, $Y^L_{i,j,k}$ 는 해당 station의 2차

감도 상태량벡터, $S_{i,k}$ 는 2차감도 전달매트릭스로 정의되며 식(2.4a) 또는 식(2.4b)는 인접 이산화 전달요소간의 2차 감도상태량벡터 관계식이다.

상기와 동일한 방법으로 설계변수들에 대한 n 차감도 전달매트릭스 및 감도상태량벡터 관계식을 유도할 수 있다.

2.2 고유진동 감도해석

TMM 및 FETMM에 의거한 구조계의 고유진동 감도해석은 먼저 기준계의 고유진동해석을 수행하여야 한다.

고유진동해석에 있어서 인접이산화전달요소간의 상태량 벡터관계식(2.1a)는 외력이 없으므로

$$Z_{i+1}^t = U_i Z_i^t \tag{2.6}$$

로 표현된다. 탄성지지 또는 관성요소가 부가된 경계에 대해서 이들을 이산화전달요소로 간주하면 임의의 경계조건을 고전적 경계조건 즉 고정, 단 순지지 또는 자유단으로 취급할 수 있고, 고전적 경계조건에 대해서는 경계에서의 상태량벡터 미지항 m 개 중 $m/2$ 개는 영이 되므로 구조계의 좌 상태량벡터 Z_i^t 를

$$Z_i^t = \begin{Bmatrix} 0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \vdots \\ \kappa_{\frac{m}{2}} \end{Bmatrix} = \kappa_1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} + \kappa_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots + \kappa_{\frac{m}{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

여기서 $0 : Z_i^t$ 의 기지항에 해당하는 $(\frac{m}{2} \times 1)$ null column vector로 둘 수 있다. 식(2.6)에 Z_i^t 을 대입하여 계의 좌단으로부터 차례로 계산을 이행하면 $(i+1)$ 번째 이산화전달요소에 좌상태량벡터는

$$Z_{i+1}^t = \kappa_1 \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{m,1} \end{Bmatrix}_i + \kappa_2 \begin{Bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{m,2} \end{Bmatrix}_i + \dots + \kappa_{\frac{m}{2}} \begin{Bmatrix} t_{1,m/2} \\ t_{2,m/2} \\ \vdots \\ t_{m,m/2} \end{Bmatrix}_i \tag{2.8}$$

로 표현되며 특히 우경계 $(n+1)$ station에서는 상태량벡터의 영인 항 $m/2$ 개에 대하여 고유진동 연산대수방정식

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \kappa_1 \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{p1} \\ \vdots \\ t_{m/2,1} \end{Bmatrix}_n + \kappa_2 \begin{Bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{p2} \\ \vdots \\ t_{m/2,2} \end{Bmatrix}_n + \dots + \kappa_p \begin{Bmatrix} t_{1p} \\ t_{2p} \\ \vdots \\ t_{pp} \\ \vdots \\ t_{m/2,p} \end{Bmatrix}_n + \dots + \kappa_{\frac{m}{2}} \begin{Bmatrix} t_{1,m/2} \\ t_{2,m/2} \\ \vdots \\ t_{p,m/2} \\ \vdots \\ t_{m/2,m/2} \end{Bmatrix}_n \tag{2.9a}$$

또는,

$$\underline{0} = T_n^* Z_i^{*L} \tag{2.9b}$$

여기서 $T_n^* =$

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1p} & \dots & t_{1,m/2} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2p} & \dots & t_{2,m/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{p1} & t_{p2} & \dots & t_{pp} & \dots & t_{p,m/2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{\frac{m}{2},1} & t_{\frac{m}{2},2} & \dots & t_{\frac{m}{2},p} & \dots & t_{\frac{m}{2},m/2} \end{bmatrix}_n \tag{2.10}$$

$$Z_i^{*L} = \{ \kappa_1 \ \kappa_2 \ \dots \ \kappa_p \ \dots \ \kappa_{\frac{m}{2}} \}^t \tag{2.11}$$

가 도출되어지고, 이 식으로부터 고유원진동수 및 $\kappa_i, i=1,2,\dots, m/2$ 을 연산할 수 있다[3](1963). 고유진동형은 κ_i 를 식(2.7) 및 식(2.8)에 대입하여 상태량벡터를 구하므로써 결정할 수 있다.

고유진동 1차감도해석은 고유진동해석 결과 및

경계에서의 감도상태량벡터의 기지항을 이용한다. 즉, 고전적 경계조건은 설계변수 변경에 무관하므로 경계에서의 상태량벡터에 있어서 영의 값을 갖는 $m/2$ 개의 기지항의 감도 또한 영의 값을 가진다. 따라서 좌단 1차 감도상태량벡터는

$$Y_{1,j}^L \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ \kappa_{1,j} \\ \kappa_{2,j} \\ \vdots \\ \kappa_{m/2,j} \\ 1 \end{Bmatrix} = \kappa_{1,j} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \kappa_{2,j} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots + \kappa_{m/2,j} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

여기서 $\underline{0} : Z_j^L$ 의 영의 값을 갖는 기지항의 감도에 해당하는 $(\frac{m}{2} \times 1)$ null column vector

로 둘 수 있다. $Y_{1,j}^L$ 과 인접 이산화전달요소간의 1차감도상태량벡터 관계식(2.2)를 이용하여 계의 좌단으로부터 차례로 연산을 이행하면 고유진동 해석에서와 마찬가지로 방법에 의해 우경계에서 감도상태량벡터의 영의 값을 갖는 기지항 $m/2$ 개에 대하여 감도연산 대수방정식

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \kappa_{1,j} \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{m/2,1} \end{Bmatrix}_n + \kappa_{2,j} \begin{Bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{m/2,2} \end{Bmatrix}_n + \dots + \kappa_{m/2,j} \begin{Bmatrix} t_{1,m/2} \\ t_{2,m/2} \\ \vdots \\ t_{m/2,m/2} \end{Bmatrix}_n + \begin{Bmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \\ \vdots \\ \gamma_{m/2}^{(1)} \end{Bmatrix}_n \quad (2.13a)$$

또는

$$\underline{0} = T_n^* Z_{1,j}^{*L} + \Gamma_n^{(1)} \quad (2.13b)$$

여기서

$$Z_{1,j}^{*L} = [\kappa_{1,j} \ \kappa_{2,j} \ \dots \ \kappa_{m/2,j}]^T \\ \Gamma_n^{(1)} = [\gamma_1^{(1)} \ \gamma_2^{(1)} \ \dots \ \gamma_{m/2}^{(1)}]^T \quad (2.14)$$

을 도출할 수 있다. 여기서 $\Gamma_n^{(1)}$ 는 설계변수 x_i 에 대한 계전체의 1차감도를 나타내는 $(m/2 \times 1)$ column vector이고, T_n^* 는 식(2.10)과 같다. 따라서 실제 연산에 있어서는 식(2.12) 우변의 $(m/2+1)$ 번째 column vector를 이용하여 $\Gamma_n^{(1)}$ 만 연산하면 식(2.13b)를 도출할 수 있다.

감도연산 대수방정식 (2.13b)는 $(m/2+1)$ 개의 미지항 즉, 좌단감도 상태량벡터의 미지항 $x_{i,j} = 1, 2, \dots, m/2$ 과 고유원진동수 감도 ω_j 에 대한 $m/2$ 개의 선형대수방정식이다. (2.13b)에서 우선 ω_j 를 구하기 위해 T_n^* 의 좌고유 벡터 즉,

$$X^T T_n^* = \underline{0} \quad (2.15)$$

을 만족하는 벡터 X' 를 식(2.13b)에 전승하면

$$\underline{0} = X'^T T_n^* Z_{1,j}^{*L} + X'^T \Gamma_n^{(1)} \\ = X'^T \Gamma_n^{(1)} \quad (2.16)$$

이 되고 이 식은 ω_j 만의 1차 함수이므로 식(2.16)으로부터 ω_j 를 연산할 수 있다.

고유원진동수감도 ω_j 가 구해지면 좌단상태량벡터의 미지항 $Z_{1,j}^{*L}$ 의 연산은 $Z_{1,j}^{*L}$ 을 이용하여 구한다. 즉, $Z_{1,j}^{*L}$ 은 T^* 의 우고유벡터에 해당하므로 $Z_{1,j}^{*L}$ 을

$$(Z_{1,j}^{*L})^T (Z_{1,j}^{*L}) = \text{constant} \quad (2.17)$$

로 uniqueness를 가지도록 하고 이를 설계변수 x_i 에 대하여 미분하면

$$(Z_{1,j}^{*L})^T Z_{1,j}^{*L} = 0 \quad (2.18)$$

이 성립한다. 또한, 식(2.13b)에서 $p(p \leq \frac{m}{2})$ 번째 방정식을 소거한 식을

$$\underline{0} = T_n^* Z_{1,j}^{*L} + \Gamma_n^{(1)} \quad (2.19)$$

이라 하면 식(2.18)과 식(2.19)는 하나의 식

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} T_n^* \\ (Z_{1,j}^{*L})^T \end{bmatrix} Z_{1,j}^{*L} + \begin{bmatrix} \Gamma_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

으로 표현할 수 있다. 식(2.20)에서 $\begin{bmatrix} T_n^* \\ (Z_{1,j}^{*L})' \end{bmatrix}$

는 T_n^* 와는 달리 그 역행렬이 존재하므로 좌단 미지 감도상태량벡터 $Z_{1,j}^{*L}$ 은

$$Z_{1,j}^{*L} = - \left[\begin{matrix} T_n^* \\ (Z_{1,j}^{*L})' \end{matrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_n^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

으로 연산되어진다. 식(2.21)의 우변의 역행렬은 설계변수의 미분항을 포함하고 있지 않으므로 설계변수의 갯수와 관계없이 해당 고유원진동수에 대해 한번의 연산만 하면 된다.

$Z_{1,j}^{*L}$ 이 구해지면 $\kappa_{i,j}=1, 2, \dots, m/2$ 를 이용하여 각 이산화전달요소의 감도상태량벡터를 연산할 수 있다.

TMM 및 FETMM에 의거한 고유진동 감도해석은 각 이산화 전달요소 station에서의 변위량 및 힘량의 감도를 연산하므로 각 이산화전달요소의 감도상태량벡터가 구해지면 고유 진동형감도는 물론 힘량 및 기타 변위량의 감도도 알 수 있다.

고유진동 2차감도 해석은 1 차감도 해석에서와 마찬가지로 좌단2차감도 상태량벡터 $Y_{1,j}^{*L}$

와 인접 이산화전달요소간의 2차감도 상태량벡터 관계식 (2.4b)를 이용하여 1차감도 해석에서의 (2.13b)에 상응하는

$$\underline{0} = T_n^* Z_{1,j}^{*L} + \Gamma_n^{(2)} \quad (2.22)$$

을 도출할 수 있다. 이 식에 T_n^* 의 좌고유벡터 X' 를 전승하면

$$0 = X' \Gamma_n^{(2)} \quad (2.23)$$

이 구해지고 이 식은 고유원진동수 2차감도 ω_{jk} 만의 1차함수이므로 고유원진동수 1차감도 연산과 같은 방법으로 ω_{jk} 를 구할 수 있다. ω_{jk} 가 구해지면 $Z_{1,j}^{*L}$ 은 식(2.18)을 설계변수 x_k 에 대하여 미분함으로써 구해지는 조건식

$$(Z_{1,j}^{*L})' Z_{1,j}^{*L} = - (Z_{1,j}^{*L})' Z_{1,j}^{*L} \quad (2.24)$$

과 식(2.22)에서 $p(p \leq m/2)$ 번째 방정식을 소거한 식

$$\underline{0} = T_n^* Z_{1,j}^{*L} + \Gamma_n^{(2)} \quad (2.25)$$

에 의해

$$Z_{1,j}^{*L} = - \left[\begin{matrix} T_n^* \\ (Z_{1,j}^{*L})' \end{matrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \Gamma_n^{(2)} \\ (Z_{1,j}^{*L})' Z_{1,j}^{*L} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

으로 연산되어진다. 이 때 식(2.26)의 역행렬은 1 차감도 해석에서 이용된 식(2.21)에서의 역행렬과 같으므로 다시 계산할 필요가 없다. $Z_{1,j}^{*L}$ 이 계산되어지면 각 이산화전달요소의 2차감도 상태량벡터는 1차감도 해석과 마찬가지로 방법으로 연산할 수 있다. 상기의 고유진동 2차감도 해석방법은 마찬가지로 방법으로 3, 4, ... n차 감도해석에도 적용할 수 있다. 즉, n차감도 상태량벡터 관계식을 이용하여 2차감도해석에 있어서의 식(2.22)과 식(2.24)에 대응하는 식들을 도출하면 1차감도해석과 마찬가지로 방법으로 감도해석이 가능하다.

2.3 강제진동응답 감도해석

TMM 및 FETMM에 의거한 강제진동응답 감도해석은 고유진동감도해석의 경우와 마찬가지로 먼저 기준계의 강제 진동응답 해석을 수행하여야 한다.

강제진동응답해석에 있어서의 좌단 상태량벡터 \bar{Z}_1^L 은

$$\bar{Z}_1^L \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_1 \\ \vdots \\ \kappa_{m/2} \\ 1 \end{bmatrix} = \kappa_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \kappa_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$+ \kappa_{\frac{m}{2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

여기서 0 : Z_1^L 의 지지항에 해당하는 $(\frac{m}{2} \times 1)$ null vector

로 들 수 있으므로 인접 이산화요소간의 상태량 벡터 관계식 식(2.1a)에 Z_1^L 을 이용하여 계의 좌단으로부터 차례로 계산을 수행하면 고유진동해석에서와 마찬가지로 방법으로 우경계에서 상태량 벡터의 영인 항 $m/2$ 개로부터 강제진동응답 연산 대수방정식

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} = \kappa_1 \begin{Bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \cdot \\ t_{m/2,1} \end{Bmatrix} + \kappa_2 \begin{Bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \cdot \\ t_{m/2,2} \end{Bmatrix} + \dots + \kappa_{\frac{m}{2}} \begin{Bmatrix} t_{1,m/2} \\ t_{2,m/2} \\ \cdot \\ t_{m/2,m/2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_{m/2} \end{Bmatrix} \quad (2.28a)$$

또는, $0 = T_n^* Z_1^L + F_n$ (2.28b)

여기서, $F_n = \{f_1, f_2, \dots, f_{m/2}\}'$ (2.29)

을 도출할 수 있다. 식(2.28b)의 T_n^* 는 기진주파수가 고유원진동수와 같지 않으면 T_n^{*-1} 가 존재하므로 좌단 상태량 벡터의 미지항 Z_1^L 은

$$Z_1^L = -T_n^{*-1} F_n \quad (2.30)$$

로 구해진다. 따라서, 각 이산화전달요소의 상태량 벡터는 Z_1^L 의 $\kappa_i, i = 1, 2, \dots, m/2$ 을 이용하여 계산할 수 있다.

과도응답해석의 경우 초기조건이 주어지면 초기 가속도는 다음과 같이 구한다. 즉 인접요소간의

평형방정식에 초기조건을 대입하고 초기가속도와 힘량을 상태량벡터요소로 나타내었을 때의 전달 매트릭스[8](1983)를 이용하여 상기와 같은 방법으로 연산할 수 있다. 초기가속도가 연산되면 과도응답계산은 각 시간증분마다 상기의 과정을 반복해야 하나 시간증분 Δt 이 일정하면 식(2.1a)에서 U 는 일정하므로 외력전달벡터 R 만을 시간구간마다 다시 연산하면 된다. 따라서 식(2.28b)에서도 외력을 고려한 F_n 만 시간구간마다 연산하면 된다.

강제진동응답 1차감도 해석을 위한 감도연산 대수방정식은 고유진동 감도해석과 같은 방법에 의해 식(2.13b)로 나타낼 수 있는데 T_n^* 는 강제진동해석에서와 같고, 기진주파수가 설계변수의 변경에 무관하다고 가정하여 연산된 $\Gamma_n^{(1)}$ 로부터 좌단 1차감도 상태량 벡터의 미지항 $Z_{1,j}^{*L}$ 은

$$Z_{1,j}^{*L} = -T_n^{*-1} \Gamma_n^{(1)} \quad (2.31)$$

로 연산되어진다. 따라서, 각 이산화전달요소의 감도상태량 벡터는 $Z_{1,j}^{*L}$ 을 이용하여 연산할 수 있다.

과도응답 감도해석에 있어서도 과도응답해석과 마찬가지로 시간구간마다 감도상태량 벡터를 연산하여야 한다. 이 경우 시간증분 Δt 가 일정하면 식(2.31)에서 외력 및 감도를 고려하는 $\Gamma_n^{(1)}$ 만 다시 연산하면 각 시간구간에 대한 과도응답 1차감도 해석을 수행할 수 있다.

강제진동응답 2차감도해석은 인접 이산화전달요소간의 2차감도 상태량 벡터 관계식 (2.4b)를 이용하여 계 전체의 외력 및 감도를 고려하는 벡터 $\Gamma_n^{(2)}$ 를 연산하면

$$Z_{1,jk}^{*L} = -T_n^{*-1} \Gamma_n^{(2)} \quad (2.32)$$

로 첫번째 이산화전달요소의 좌감도상태량 벡터를 연산할 수 있고 이로부터 각 이산화전달요소의 2차감도 상태량 벡터를 구할 수 있다.

강제진동응답 n 차감도 해석도 강제진동응답 1차 및 2차감도 해석과 같은 방법으로 수행할 수 있다.

3. 수치계산 예 및 고찰

본 연구에서 제시한 동특성 감도해석 방법의 타당성 및 효율성을 확인하기 위해 보유추 구조계 및 판유추 구조계 모델에 대해 일련의 수치계산을 수행하였다.

3.1 고유진동 감도해석

3.1.1 관성요소 및 스프링을 갖는 보-기둥의 고유진동 2차감도 해석(TMM)

TMM을 이용한 고유진동 감도해석 수치계산 예로서 Fig. 3.1에 보인 바와 같이 양단이 회전에 대해 탄성구속된(k_{r1}, k_{r2}) 균일단면 Euler보에 일정한 축력 P 가 작용하고 집중질량 m 및 병진스프링 k_v 이 부가된 계의 고유진동 2차감도 해석을 수행하였다.

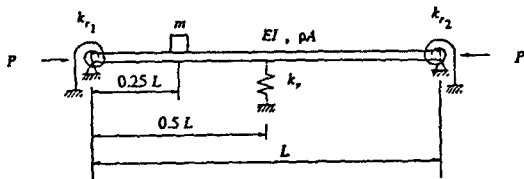


Fig.3.1 Beam-column with attached mass and springs

수치계산을 위한 모델링은 16개의 보-기둥요소와 각각의 부가물 요소로 이산화하였으며, 이들과 각 이산화요소의 전달매트릭스는 보-기둥요소에 대해서는 균일단면 보에 축력을 고려한 전달매트릭스[3](1963), 부가물은 각각을 이산화 요소로 간주한 전달매트릭스를 이용하였다.

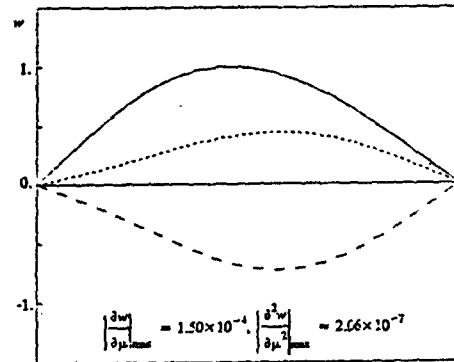
수치계산은 편의상 무차원 파라미터

$$\lambda = \frac{PL^2}{EI} \quad \mu = \frac{m}{\rho AL} \tag{3.1}$$

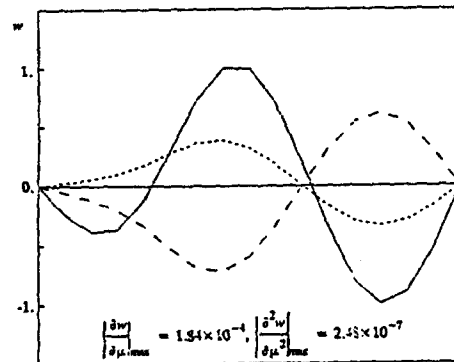
$$K_v = \frac{k_v L^3}{EI} \quad K_r = \frac{k_r L}{EI}$$

여기서 ρA : 보의 단위길이 당 질량
 EI : 보의 굽힘강성 L : 보의 길이
 를 도입하고, 기준계(base system)가 $\mu=1, K_v=10, K_{r1}=K_{r2}=1, \lambda=1$ 인 경우의 진동수파라미터

$$\Omega_i = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \tag{3.2}$$



(a) 1-st mode ; $\Omega = 8.30$



(b) 3-rd mode ; $\Omega = 81.19$

base system mode shape : ——— 1-st order sensitivity : - - - -
 2-nd order sensitivity : ······

Fig. 3.2 The mode shapes and its 1-st and 2-nd order sensitivities to the design variable μ of a beam-column structure : $\mu=1, K_v=10, K_{r1}=K_{r2}=1, \lambda=1$.

Table 3.1 The frequency parameter and its 1-st and 2-nd order sensitivities of the beam-column : $\mu=1$, $K_r=10$, $K_{r1}=K_{r2}=1$, $\lambda=1$.

ord.	frequency parameter Ω		1-st ord. sensitivity			2-nd ord. sensitivity					
	exact	TMM	design variable			design variable					
			μ	K_r	K_{r1}	(μ, μ)	(K_r, K_r)	(K_{r1}, K_{r1})	(μ, K_r)	(μ, K_{r1})	(K_r, K_{r1})
1	8.30	8.30	-2.267	0.054	0.604	1.749	-0.001	-0.151	-0.018	-0.115	-0.002
2	28.95	28.95	-3.214	0.014	0.246	4.834	0.000	-0.031	0.010	-0.180	-0.001
3	81.19	81.19	-1.678	0.015	0.234	2.776	0.000	-0.032	0.001	-0.091	0.000
4	159.32	159.32	-0.004	0.000	0.877	0.006	-0.000	-0.132	0.000	0.010	0.000
5	220.00	220.00	-5.659	0.002	2.129	9.329	0.000	-0.124	-0.000	0.214	0.000
run time (sec)	21.36		7.19 in total			24.09 in total					

와 고유진동형 및 설계변수 μ, K_r, K_{r1} 에 대한 이들의 1차감도와 2차감도를 계산하였다.

기준계의 진동수파라미터와 각 설계변수에 대한 진동수파라미터 1차감도 및 2차감도 계산결과는 Table 3.1에 보인 바와 같다. 이에는 IBM/PC-AT (CPU 10MHz)을 사용하여 고유진동해석 및 감도해석에 소요된 계산시간도 함께 나타내었으며, 진동수 파라미터에 대해서는 비교 목적으로 엄밀해 [18](1991)에 의한 결과도 함께 보였다. 이로 부터 진동수파라미터 계산결과는 TMM과 엄밀해의 부합성이 매우 양호하고, 설계변수 하나에 대한 감도해석을 수행하는데 소요된 계산시간이 기준계 고유진동해석 계산시간을 기준으로 1차감도해석에 약 12%, 2차감도해석에 약 19%가 소요되어 감도해석 연산부담이 적음을 알 수 있다.

고유진동형에 대한 감도계산 결과는 설계변수가 μ 인 경우의 1차 및 3차 진동형에 대해서만 고유진동형과 함께 Fig. 3.2에 예시했다.

Fig. 3.3에는 각각의 설계변수가 -100%에서 100%까지 변경될 경우에 Taylor급수전개를 이용하되 1차감도만 고려한 경우와 2차감도까지 고려한 경우의 1차 및 5차 진동수파라미터 변경예측치를 엄밀해 및 TMM으로 재해석한 계산결과와 비교하였다. 이로 부터 설계변수 변경에 따른 진동수파라미터 변경치는 엄밀해와 TMM으로 재해석한 양자의 결과가 매우 양호한 부합성을 가지며, 진동수파라미터 변경 예측치는 엄밀해 재해석 결과

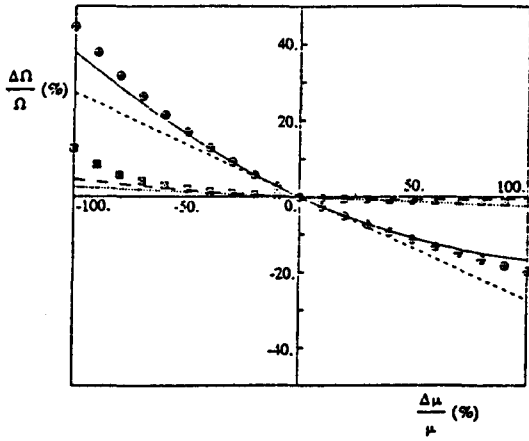
에 대해 기준계 진동수파라미터를 기준으로 설계변수가 K_r, K_{r1} 인 경우 100% 변경 범위내에서 1차감도만 고려한 경우에는 오차 1% 이내, 2차감도까지 고려한 경우에는 오차 0.2% 이내의 부합성을 가짐을 알 수 있다. 설계변수가 μ 인 경우에는 1차감도만 고려한 경우 50% 변경 범위내에서 오차 3% 이내, 2차감도까지 고려한 경우에는 80% 변경 범위 내에서 오차 3% 이내의 부합성을 가진다.

3.1.2 질량-스프링계가 부가된 직사각형 보강판의 고유진동 1차감도 해석(FETMM)

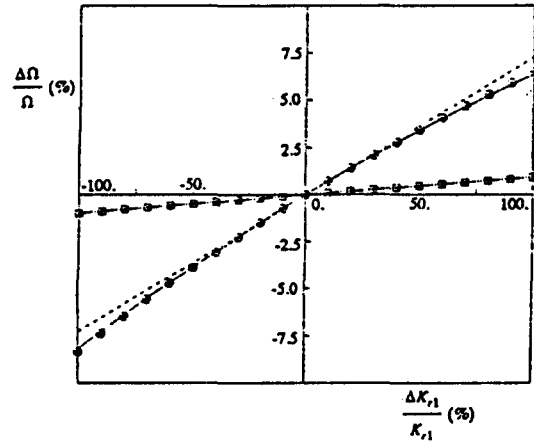
FETMM을 이용한 고유진동 감도해석 수치계산에로서 한 [19](1989)이 고유진동해석 및 실험을 수행한 Fig.3.4에 보인 바와 같은 직사각형 보강판의 중앙에 질량-스프링계가 부가된 계에 대해 고유진동 1차감도 해석을 수행하였다.

수치계산에 있어서 판과 보강재의 인장탄성계수는 $E=21.1 \times 10^6 \text{Kgf/cm}^2$, 질량밀도는 $\rho=8.01 \times 10^{-6} \text{Kgf} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$ 로 하였으며, Poisson비는 $\nu=0.3$ 로 취하였고 4변은 단순지지로 하였으며, 질량-스프링계의 무게는 7.62Kgf, 스프링 상수는 1045 Kgf/cm인 경우로 하였다.

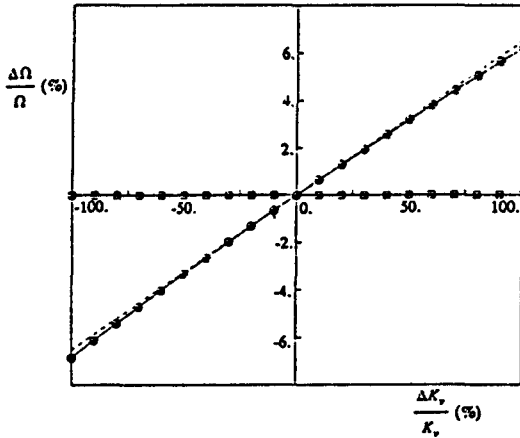
수치계산 모델링은 보강판은 63개의 절점에 의해 48개의 4절점 사각형 판요소와 46개의 2절점 보요소로 이산화하여 8개의 이산화대판요소로 나타내었으며 질량-스프링계는 line segment로 간



(a) design variable : μ



(c) design variable : K_{r1}



(b) design variable : K_v

	1-st order	5-th order
Reanalysis based on exact solution	+	x
Reanalysis based on TOI	c	o
Prediction based on 1-st order sensitivity	---
Prediction based on 1-st and 2-nd order sensitivity	---	---

Fig.3.3 Comparison of the frequency parameter change obtained by the sensitivity analysis and the ordinary reanalysis(base system : $\mu=1.$, $K_v=10.$, $K_{r1}=K_{r2}=K_{r3}=1.$, $\lambda=1.$)

주하여 이산화 전달요소로 취급하였다.

감도해석에 있어서 설계변수는 질량-스프링계의 중량 W_s 와 스프링상수 k_s , $y=60\text{cm}$ 에 위치한 x 방향 보강재 및 $x=90\text{cm}$ 에 위치한 y 방향 보강재의 유효단면 2차 모멘트 I_{x3} , I_y 와 유효단면 극관성모멘트 J_{x3} , J_y 로 하였다.

기준계의 고유진동수 및 고유진동수 1차감도 수치계산 결과는 Table 3.2에 나타내었다. 이에는 서울대 보유 전산기 VAX-11/750을 사용하여 고유진동해석 및 감도해석에 소요된 계산시간도 함께 나타내었으며, 고유진동수에 대해서는 비교 목적으로 구조해석범용 전산프로그램인 SAP6를

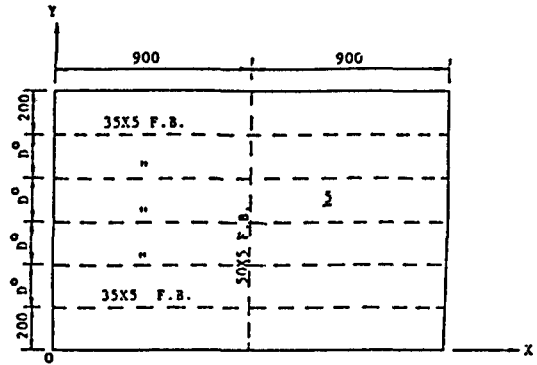


Fig.3.4 Cross stiffened plate(unit : mm)

이용한 유한요소법에 의한 결과와 한[19](1989)의 실험결과도 함께 보였다. 이로 부터 고유진동수 계산결과는 실험결과 및 유한요소법에 의한 결과와 부합성이 매우 양호함을 알 수 있으며, 설계

변수하나에 대한 감도해석을 수행하는데 소요된 계산시간이 기준계 고유진동해석 계산시간을 기준으로 약 2%가 소요되어 감도해석 연산부담이 적음을 알 수 있다. Fig.3.5에는 고유진동형에 대한 결과를 나타내었는데 Table 3.2에 보인 각 설계변수들의 고유진동수 1차감도는 기준계의 차수별 진동형의 nodal line상에서는 $O(10^{-5})$ 이하임을 알 수 있다.

각각의 설계변수들이 -50%에서 50%까지 변경될 경우에 감도를 이용한 고유진동수 변경 예측치를 FETMM에 의한 재해석결과와 비교한 것이

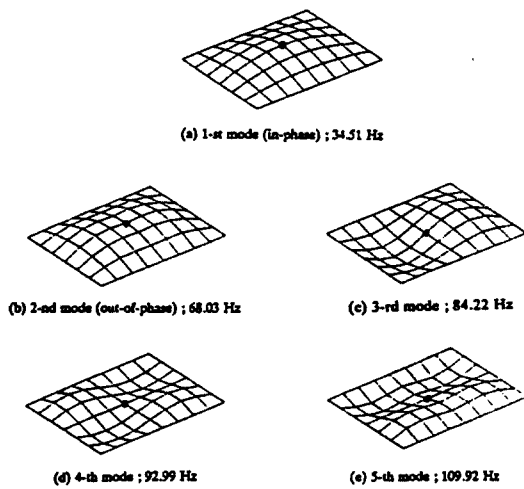


Fig.3.5 Mode shapes of cross stiffened plate having a spring-mass system at center

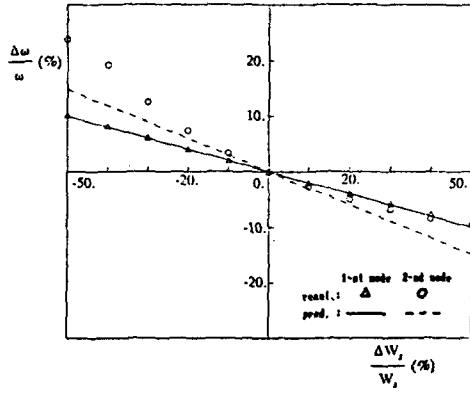
Fig. 3.6이다. 이로 부터 고유진동수 변경 예측치는 재해석 결과에 대해 기준계의 고유 진동수를 기준으로 설계변수가 I_{z3} , I_y 와 J_{z3} , J_y 인 경우 50% 변경 범위내에서 오차 3%이내의 부합성을 가지며, k_z 에 대해서는 오차 2%이내, W_z 에 대해서는 30% 변경 범위내에서 오차 5%이내의 부합성을 가짐을 알 수 있다.

상기 고유진동 감도해석 수치계산 예에서 기준계 고유진동 해석의 효율성은 Dokainish[11](1972)가 지적하였듯이 TMM 및 FETMM과 유한요소법을 단순 비교할 수는 없다. 이는 전자의 방법이 계 전체의 전달매트릭스 및 경계에서의 상태량벡터 특성에 따라 정의되는 진동수방정식으로부터 시산적 방법으로 고유진동수를 구하고, 후자의 방법은 계 전체의 평형방정식을 이용하여 표준적 고유치 문제를 구성한 후 이로부터 고유진동수를 구하기 때문이다.

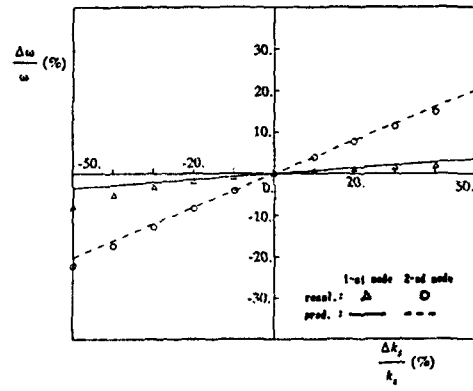
본 연구에서 제시한 고유진동 감도해석방법은 고유진동 해석결과와 감도전달매트릭스의 특성을 이용하여 감도전달항만의 연산으로 감도연산 대수방정식을 도출하고, 이 식이 고유진동수 감도의 1차함수인 것을 이용하여 고유진동수 감도를 구한다. 따라서 시산적 방법으로 고유진동해석을 수행하는데 소요된 시간과 감도해석을 수행하는데 추가로 소요된 계산시간을 단순 비교하기는 어렵지만 2.2절의 정식화에서 감도해석 연산부담이 기준계 고유진동해석 연산부담에 비교하여 매우

Table 3.2 Natural frequencies and its 1-st order sensitivities of the cross stiffened plate having a spring-mass system at center.

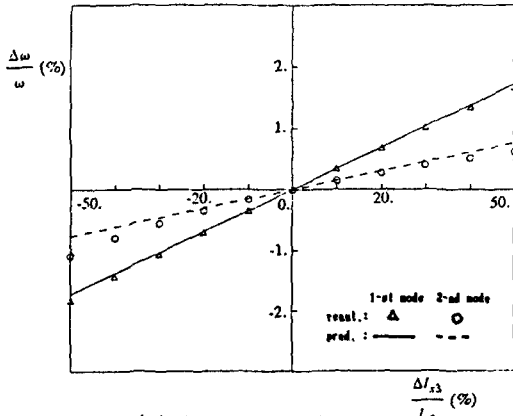
ord.	natural frequency(Hz)			1-st order sensitivity					
	exper.[19]	FEM	FETMM	design variable					
				W_z	k_z	I_{z3}	J_{z3}	I_y	J_y
1	33.2	34.54	34.51	-0.9071	0.0023	0.1521	0.0000	0.4717	0.0000
2	65.6	67.04	68.03	-2.6598	0.0263	0.1328	0.0000	0.1336	0.0000
3	-	84.31	84.22	0.0000	0.0000	1.6594	0.0000	0.0000	0.2353
4	-	93.94	92.99	0.0000	0.0000	0.0000	1.4357	0.0000	0.7958
5	-	110.4	109.92	0.0000	0.0000	0.0000	0.5995	0.9996	0.0000
run time(sec)			345.37	50.83 in total					



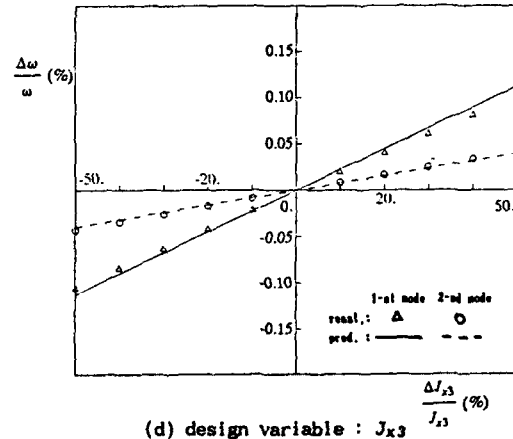
(a) design variable : W_2



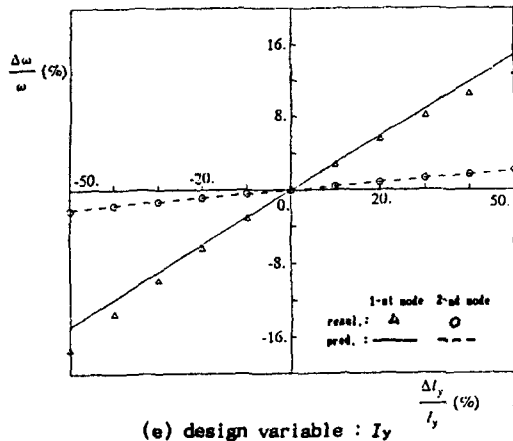
(b) design variable : k_2



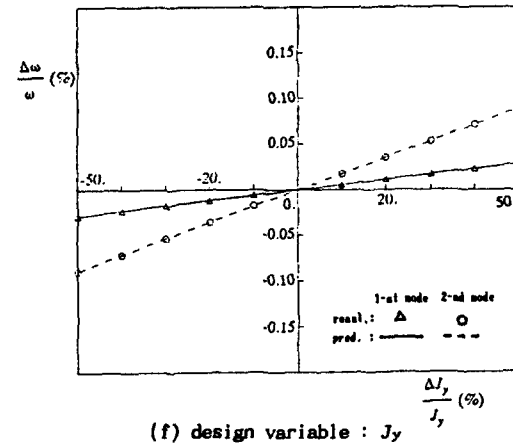
(c) design variable : I_{x3}



(d) design variable : J_{x3}



(e) design variable : I_y



(f) design variable : J_y

Fig.3.6 Comparison of the natural frequency change obtained by the sensitivity analysis and the ordinary reanalysis

적음을 알 수 있다. 이는 상기 두 수치 계산 예 에서도 확인된다.

3.2 강제진동응답 감도해석 : 직사각형 보강판의 과도응답 1차감도 해석(FETMM)

강제진동응답 감도해석 수치계산 예로서 Fig. 3.4에 보인 바와 같은 직사각형 보강판의 중앙에 Fig. 3.7에 보인 바와 같이 기진작용시간 t_0 가 0.024초인 삼각형 충격기진력 $F(t)$ 이 가해진 계에 대해 FETMM을 이용하여 과도응답 1차 감도 해석을 수행하였다.

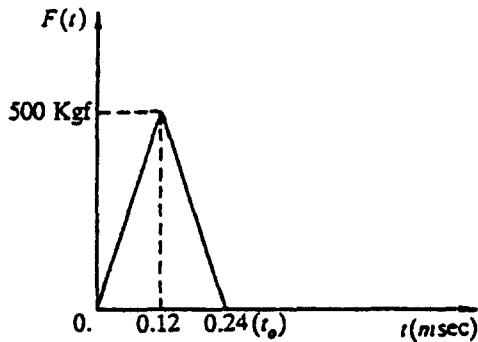


Fig. 3.7 Point excitation force applied to the cross stiffened plate at the center

수치계산에 있어서 보강판의 모델링 및 단면특성은 3.1.2절에서와 같이 하였으며, 구조부재의 감쇠는 등가 Rayleigh감쇠로 치환하고 한[19](1989)의 modal damping ratio 실험결과를 이용하였다.

과도응답해석은 시간에 대한 수치적분 방법으로 Newmark method를 적용하여 시간중분은 0.00025초로 하였다. 감도해석은 설계변수 x_i 를 $y=60\text{cm}$ 에 위치한 x 방향 보강재 및 $x=90\text{cm}$ 에 위치한 y 방향 보강재의 유효단면 2차 모멘트 I_{x3}, I_y 로 하였다.

과도응답 계산결과로서 중앙점에서 $10.4 t_0$ 까지의 과도응답 time history는 Fig. 3.8에 나타내었다. 이 때 비교 목적으로 구조해석범용 전산프로그램인 ADINA를 이용한 유한요소법에 의한 결과도 함께 보였으며, Table 3.3에 응답peak치(W_{max}),과 그때의 시각 t_{peak} 을 나타내고 서울대 보유전산기 VAX-11/750에 의한 계산시간을 비교하였다. 이로 부터 중앙점에서의 과도응답 계산결과는 유한요소법에 의한 계산 결과와 부합성이 양호하며, 계

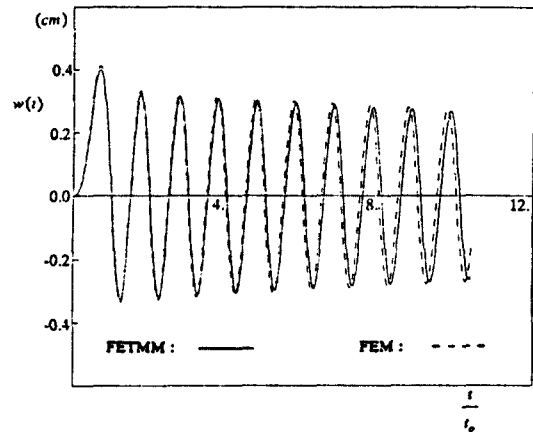


Fig.3.8 Time history of transient response at the excitation point

산소요시간면에서는 FETMM이 유한요소법보다 효율적임을 알 수 있다.

Table 3.3 Peak amplitude of transient response at the excitation point.

method	FETMM	FEM
peak value(cm)	0.3998	0.4125
at time(msec)	0.1675	0.1675
run time(sec)	620.30	809.90

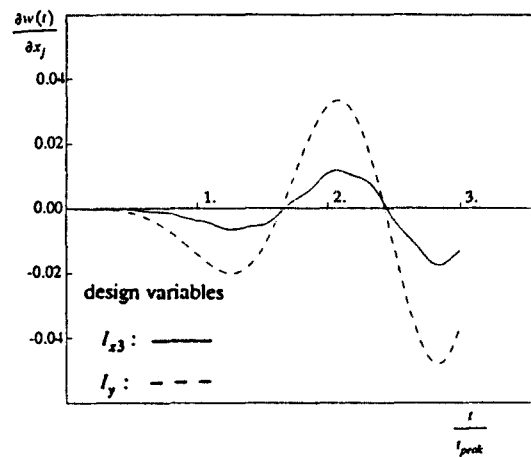
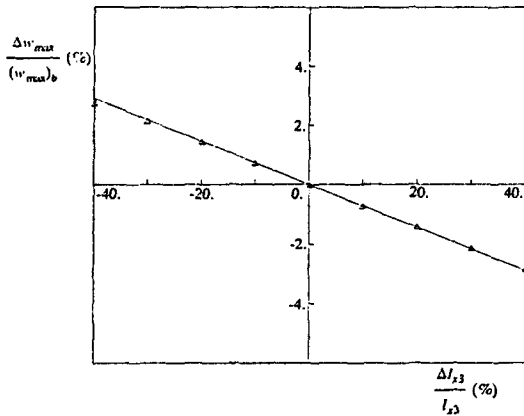
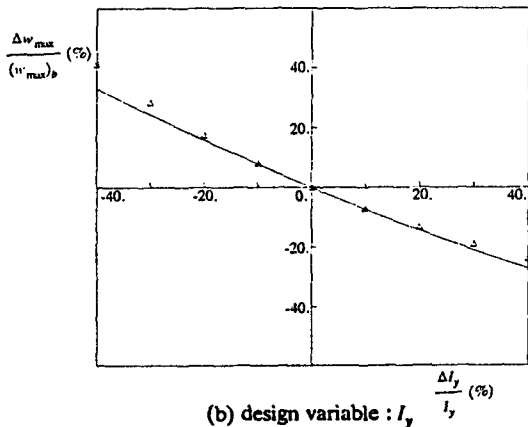


Fig.3.9 Transient response sensitivities at the excitation point

과도응답 감도해석 계산결과로서는 중앙점에서의 각 설계변수들에 대한 3 t_{peak}까지의 과도응답 감도 time history를 Fig. 3.9에 나타내었다. Fig. 3.10에는 이들 두 설계변수가 -40%에서 40%까지 변경될 경우에 감도를 이용한 응답 peak치 W_{max}의 변경 예측치와 FETMM으로 재해석한 계산결과를 비교하였다. 이로 부터 응답 peak치 변경 예측치는 재해석 결과에 대해 기준계의 응답 peak치를 기준으로 40% 변경 범위내에서 설계변수가 I_{x3}인 경우 오차 0.2% 이내, I_y인 경우에는 오차 8% 이내의 부합성을 가진다.



(a) design variable : I_{x3}



(b) design variable : I_y

reanalysis : Δ prediction : —

Fig.3.10 Comparison of the peak response change obtained by the ordinary reanalysis with prediction based on the sensitivity

본 연구에서 제시한 강제진동응답 감도해석방법은 기준계의 강제진동응답해석 결과와 감도전달매트릭스의 특성을 이용하여 감도전달항만의 연산으로 감도연산 대수방정식을 도출하므로 감도해석을 수행하기 위해 추가로 요구되는 연산부담은 기준계 강제진동응답해석 연산부담보다 훨씬 적다. 또 감도상태량이 (m×1)벡터인 경우 인접이산화 전달요소간의 감도상태량벡터 관계식을 이용하여 강제진동응답해석과 마찬가지로 감도연산 대수방정식을 도출하는 Yamakawa[16] (1988)의 방법보다 연산부담이 1/m로 감소된다.

4. 결 론

구조계의 동특성해석에 있어서 전달매트릭스법 (TMM) 및 유한요소-전달매트릭스 결합방법 (FETMM)의 적용이 유한요소법 등 타 방법보다 효과적인 구조계에 대해 설계변수 변경에 따른 동특성 재해석에 이들 방법에 의거한 감도해석방법의 적용 방안이 추구되었다.

TMM 및 FETMM에 의해 해석 가능한 구조계에 대해 직접 미분방법을 이용하여 감도전달매트릭스를 유도하고, 감도상태량벡터 관계식과 경계에서의 감도상태량벡터의 지지항을 이용한 동특성 감도해석 방법을 제시하고, 아울러 기준계의 동특성 해석결과 및 감도전달매트릭스의 특성을 이용하여 감도전달항만의 연산으로 감도연산 대수방정식을 도출하는 효율적인 연산방법도 제시하였다.

본 연구에서 제시한 방법은 일련의 수치계산 예를 통한 타당성 및 효율성 검토 결과로부터 보유추 구조계, 판유추 구조계 등 TMM 및 FETMM으로 해석 가능한 구조계의 설계 변수 변경에 따른 동특성 재해석에 효과적으로 적용될 수 있음이 확인되었다.

후 기

이 논문은 1990년도 한국과학재단 목적기초연구 지원사업 관리번호 90-02-00-02-03(3개년 계

획)의 연구결과 중 일부이다. 동 재단의 연구비 지원에 심심한 사의를 표한다.

참 고 문 헌

- [1] Haug, E.J., et al., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, 1984.
- [2] Adelman, H.M. and Haftka, R.T., "Sensitivity Analysis of Discrete Systems", *AIAA Journal*, V.24, No. 5, May 1986.
- [3] Pestel, E.G. and Leckie, F.A., *Matrix Methods in Elasto Mechanics*, McGraw-Hill Co., 1963.
- [4] Pilkey, W.D., Chang, P.Y., *Modern Formulas for Statics and Dynamics*, McGraw-Hill Co., 1978.
- [5] Tesar, A. and Fillo, L., *Transfer matrix method*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [6] Chu, F.H., W.D., "Transient Analysis of Structural Members by the CSDT Riccati Transfer Matrix Method", *Computer and Structure*, Vol. 10, 1979.
- [7] Saito, H. and Yamaguchi, H., "Free Vibrations of a Rectangular Plate with Viscoelastic Stiffeners", *Bul. of JSME*, V.23, No.185, 1980.
- [8] Yamakawa, H., Ohinishi, T., "Dynamic Response Analysis of Structures with Large Degrees of Freedom by Step-by-Step Transfer Matrix Method", *Bulletin of JSME*, Vol. 26, No. 211, 1983.
- [9] Sato, H. and Shimizu, C., "Transfer Matrix Analysis of Non-Linear Free Vibrations of Circular Plates with Variable Thickness", *J. of Sound and Vibration*, V.97, No.4, 1984.
- [10] Dhoopar, B.L., etc, "Vibration Analysis of Orthogonal Cable Networks by Transfer Matrix Method", *J. of Sound and Vibration*, V.101, No.4, 1985.
- [11] Dokkainish, M.A., "A New Approach for Plate Vibrations : Combination of Transfer Matrix and Finite-Element Technique", *Trans. of ASME, J. of Engineering Industry*, 1972.
- [12] Ohga, M., Shigematsu, T., Hara, T., "A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method", *Trans. of ASCE, J. of Engineering Mechanics*, V.110, No.9, 1984.
- [13] Degen, E.E., Shephard, M.S., Loewy, R.G., "Combined Finite Element-Transfer Matrix Method Based on a Mixed Formulation", *Computer and Structure*, V.20, No. 1-3, 1985.
- [14] Ohga, M. and Shigematsu, T., "Transient Analysis of Plates by A Combined Finite Element-Transfer Matrix Method", *Computer and Structure*, Vol. 26, No.4, 1987.
- [15] Maeda, M. and Yamakoshi, M., "An Analysis of Two Dimensional Elastic Problem by Transfer Matrix Method", *Trans. of the West-Japan Society of Naval Architects*, Vol. 81, 1991.3.
- [16] Yamagawa, H., "Efficient Sensitivity Analysis and Optimum Designs of Linear/Nonlinear Mechanical and Structural Systems for Static and Dynamic Problems by Using the Ordinary and the Incremental Transfer Matrix Methods", *Symposium of KSME/JSME*, 1988.
- [17] 조대승, "전달매트릭스법 및 유한요소-전달매트릭스 결합방법에 의한 구조계의 동특성 감도해석", 서울대학교 공대 박사학위논문, 1991.
- [18] 이종문, 이순홍, 김극천, "다양한 중간구속조건을 갖는 양단탄성구속 보-기둥의 진동해석", 대한조선학회 논문집, 제28권 제2호, 1991.
- [19] 한성용, "Receptance 방법에 의한 복합적 구조계의 진동해석", 서울대학교 공대 박사학위논문, 1989.
- [20] Troisky, M.D., *Stiffened Plates : Bending, Stability and Vibrations*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1976.
- [21] Dawe, D.J., *Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structure*, Oxford University Press, 1984.
- [22] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., 1982.