

푸리에 급수를 이용한 매니플레이터 경로 계획

(Path Planning for Manipulators Using Fourier Series)

元 鍾 華*, 崔 秉 旭*, 鄭 明 振*

(Jong Hwa Won, Byoung Wook Choi, and Myung Jin Chung)

要 約

이 논문은 푸리에 급수를 이용한 매니플레이터의 경로 계획에 대한 수치적 방법을 제시한 것이다. 여유 자유도 매니플레이터에 대하여는 여유 관절을 푸리에 급수로 미리 정하고, 그 급수의 최적 계수를 다차원 탐색법에 의하여 찾음으로써 연속 경로에 대한 최적해를 얻을 수 있다. 한편, 비여유자유도 매니플레이터에 대하여는 2차 연속인 점 경로에 대한 관절의 궤적을 주파수를 고려하여 얻을 수 있다. 제시한 방법을 3축 평면 매니플레이터와 PUMA 560 매니플레이터에 적용하고, 얻어진 궤적들을 고속 푸리에 변환을 통하여 해석하였다.

Abstract

This paper proposes a numerical method of motion planning for manipulators using Fourier series. For a redundant manipulator, we predetermine the trajectories of redundant joints in terms of the Nth partial sum of the fourier series, then the optimal coefficients of the fourier series are searched by the Powell's method. For a nonredundant or redundant manipulator, C^2 -continuous smooth joint trajectory for a point-to-point task can be obtained while considering the frequency response. We apply the proposed method to the 3-link planar manipulator and the PUMA 560 manipulator. To show the validity of the proposed method, we analyze solutions by the Fast Fourier Transform (FFT). Also, several features are discussed to obtain an optimal solution.

I. 서 론

푸리에 급수를 이용하여 매니플레이터의 경로 계획을 하는 방법을 제시하고자 한다. 이러한 방법의 응용 대상으로는 연속 경로(continuous path) 계획과 점 경로(point-to-point) 계획을 열거할 수 있다. 특히, 여유 자유도 매니플레이터(redundant manipulator)의 경우에는 여유자유도를 이용한 최적화 문제를 다룰 수 있으며, 비여유자유도 매니플레이터(nonredundant manipulator)의 경우에는 점 경로에 대한 2차 연속(C^2 -con-

tinuous)인 관절의 궤적을 얻음과 동시에 사용하고자 하는 매니플레이터의 고유 진동수 등을 고려한 경로 계획이 가능하다.

1. 여유자유도 매니플레이터의 의의
일반적으로 매니플레이터의 기구학은 다음과 같이 표현된다.

$$x = f(\theta) \quad (1)$$

여기서도 x 는 직교 좌표계상의 m 차원 벡터이고 θ 는 관절 공간상에서의 n 차원 벡터이다. 우리는 $m=n$ 일 경우를 비여유자유도 매니플레이터라고 하고 $m < n$ 일 경우를 여유자유도 매니플레이터라고 한다. 그리고 $(n-m)$ 차원의 여유자유도를 갖는다고 말한다.

*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科
(Dept. of Electrical Eng., KAIST)
接受日字 : 1991年 7月 20日

일반적으로 여유자유도의 쓰임새는 크게 보아서 첫째, 최적화의 대상이 되거나, 둘째로는 보다 바람직한 목적에의 이용으로 구별된다. 예를 들어 최적화의 대상으로는 주어진 작업의 수행시 필요한 에너지의 최소화, 혹은 소요 시간의 최소화 등이 있고 이용의 대상으로는 기구학적 특이점 회피, 장애물 회피 등이 있다. 따라서 여유자유도 매니플레이터는 그 경로 계획에 있어서 일차적으로는 주어진 작업의 수행을 할 수 있음은 물론 부가적으로 성능 지수의 최적화 등이 가능하다.

2. 순시적 방법 및 통시적 방법에 의한 여유자유도 이용
 여유자유도 매니플레이터의 경로 계획은 시간 영역에서 보아 순시적 최적화 방법(local optimization method)과 통시적 최적화 방법(global optimization method)이 있다. 순시적 최적화 방법은 주어진 작업과 여유자유도의 이용을 시간 영역상의 매 주어진 시간마다 수행하는 반면에 통시적 최적화 방법은 주어진 작업과 여유자유도의 이용을 전시간 영역을 통시적으로 보아서 수행하게 하는 방법이다. 순시적 방법은 대체로 미분 기구학을 이용하여 원하는 해의 궤적을 얻는다. 기구학식을 미분하면 다음과 같은 미분 기구학식을 얻을 수 있다.

$$\dot{x} = J\dot{\theta} \quad (2)$$

여기서 J 는 $m \times n$ 행렬식으로서 자코비안(Jacobian) 행렬이라고 불린다. 만일 \dot{x} 에 각속도 성분이 포함된 경우에는 속도 전파법(velocity propagation method)등에 의해 자코비안 행렬을 구하면 된다. 비여유자유도 매니플레이터의 경우에는 J 가 정방행렬이 되어 이 행렬이 특이행렬이 아닌 경우에는 역행렬이 존재하지만, 여유자유도 매니플레이터의 경우에는 J 가 일반적으로 행의 수보다 열의 수가 더 많은 방형 행렬이 되어 역행렬이 존재하지 않게 된다. 이러한 경우의 미분 기구학식의 해는

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x} + (I - J^+ J)v \quad (3)$$

으로 주어지고 v 는 임의의 n 차원 벡터로서 이 벡터를 이용하여 순시적인 자유도 이용을 하게 된다.^[1-5] 그리고 J^+ 는 $J^+(J \cdot J^T)^{-1}$ 로 주어지고 의사 역행렬(pseudoinverse matrix)이라 부른다. 이와 같은 최적화 방법들은 최적화 하고자하는 성능 지수의 경도벡터를 v 에 치환함으로써 이루어지거나, 최적화의 필요 조건을 만족하는 v 를 구함으로써 이루어진다.

이상에서와 같은 순시적 최적화 방법들은 의사 역행렬에 기초하여 얻어지고 순시적인 직교 좌표 공간 속도 정

보만을 이용하므로 여유자유도의 실시간 이용이 가능한 반면에 여러가지 단점들이 보고되었다.^[6, 7] 이러한 단점들을 극복하기 위하여 변형되고 개선된 순시적 방법들이 제안되기도 하였다.^[8, 9] 한편, 이러한 의사 역행렬에 기초한 방법 이외에 Chang^[10]은 최적화의 조건식을 구하여 이 추가의 조건식을 기구학식과 함께 연립시킴으로써 반복적 작업에 대하여 반복적 해를 주는 방법을 제안하였다.

이에 비하여 최근에는 통시적 방법으로 해결하고자 하는 연구가 진행되어 왔다.^[11-16] 통시적 방법에 의한 최적화의 문제는 성능 지수가 다음과 같이 적분형으로 주어진다.

$$\min \int_{t_0}^{t_1} G(\theta, \dot{\theta}) dt \quad (4)$$

여기에서 t_0 와, t_1 는 각기 작업 시작 시간 및 종료 시간을 의미한다. 위의 식에서 제한 조건식으로는 매니플레이터의 기구학식 (1)이 사용된다. 이러한 방법으로는 Kazerounian과 Wang^[14, 15]이 통시적 관절 속도를 최소화하는 최적해로서 2차 미분 방정식을 유도하였으며 이의 해를 구하는 방법으로는 수치적 탐색법과 주기 함수를 이용한 근사법을 제시하였으며, Martim^[16] 등은 통시적 관절 속도를 최소화하는 최적해로서의 2차 미분 방정식이 특수한 경우에는 1차 방정식으로 줄어 들 수 있음을 보였다.

하나의 중요하고 추세로서 우리는 여유자유도의 이용에 있어서 순시적 방법보다는 통시적 방법이 바람직함이 여러 연구들에 의해서 밝혀 졌고 향후 본 논문의 연구도 통시적 방법에 대한 것으로 국한하고자 한다.

3. 주파수 특성을 고려한 점 경로 계획

주파수 영역에서의 여유 자유도 매니플레이터 및 비여유자유도 매니플레이터에 대한 점 경로 계획이 가능하다. 이의 가장 큰 의의는 기존의 방법이 전혀 고려하지 않은 시각으로서 매니플레이터의 구조적 고유 진동, 발진, 후단 제어기의 대역폭 등을 고려한 점 경로 계획이 가능하며, 이 방법에 의한 관절 궤적은 시간 영역에서 최초로 주어진 관절 궤적과 근사적인 관계를 유지한다는 점이다. 다시 말하여, 주파수 영역에서의 점 경로 계획의 한 방법으로서 관절 속도 윤곽(joint velocity profile) 보정법을 제시하고자 한다. 이 방법에 의하여 보정된 관절 속도 윤곽은 주어진 매니플레이터의 주파수 특성을 만족하게 됨은 물론 보정전의 관절 속도 윤곽과는 근사적인

관계에 있으며, 경우에 따라 1차 혹은 2차 연속인 관절 제적을 얻을 수 있다.

II. 여유자유도 매니플레이터의 연속 경로 계획

이 장에서는 여유자유도 매니플레이터의 연속 경로 계획에 대하여 논하고자 한다. 특히, 설명의 편의상 반복적 작업이 주어진 경우에 대하여 적분형의 관절 속도 놈(norm)을 최소화하는 문제를 해결하여 봄으로서 주파수를 고려한 푸리에 급수에 의한 최적해를 구하는 과정을 보여준다.

1. 반복적 연속 경로 계획을 위한 최적해

1) 주기적 작업과 주기적 해

주어진 작업을 수행하면서 적분형으로 주어진 성능 지수를 주파수 영역에서 최적화하는 방법을 제시하기 위하여 일단 모든 작업을 주기적인 작업으로 한정하고자 한다. 대부분의 경우에 있어서 매니플레이터는 작업 공간내에서 반복 작업을 수행하게 된다. 비여유자유도 매니플레이터의 역기구학에 의한 관절 제적은 본래 성질상 주기적 작업에 대하여 주기적일 수 밖에 없으나, 여유자유도 매니플레이터의 역기구학에 의한 해는 고유해(homogeneous solution)에 의한 무수히 많은 일반해(general solution)가 존재하므로 항상 주기적인 해가 되지는 않는다. 따라서 해의 주기성을 보장하기 위하여 우리는 주기적 작업에 대한 통시적 방법에 의한 해의 추가적인 제한으로서 다음과 같은 조건식이 필요하게 된다.

$$\theta(t_0) = \theta(t_1) \quad (5)$$

이와 같이 주기적인 작업에 대하여는 다음과 같은 기본 작업 주파수를 정의할 수 있다.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (6)$$

여기서 T 는 주어진 작업의 주기로서 작업 시작 시간과 종료 시간의 차 ($t_1 - t_0$)로서 주어지고 이와 같이 주기적으로 주어진 작업에 대한 관절 제적은 또한 주기적으로 주어지야만 해로서 얻어진 제적이 반복성을 갖게 된다. 이를 수학적으로 표현하면 다음과 같다. 즉, 얻어지는 해는 주기함수가 되며 주기함수는 다음의 다리그레(Dirichlet) 조건을 만족하면 푸리에 급수로 표현이 가능하다.

(1) 주어진 주기함수는 절대값의 한주기간의 적분치가 유한할 것

(2) 주어진 주기함수는 한주기내에서 유한개의 극대점과 극소점을 가질 것

(3) 주어진 주기함수는 한주기내에서 유한개의 불연속점을 가질 것

위와 같은 다리그레 조건에 비추어 얻고자 하는 관절의 제적을 고찰하면 위의 조건에 합치함을 알 수 있다. 이때의 해는 역시 ω_0 를 기본 주파수로서 갖게되며 어떠한 성능지수를 최적화하든지, 어떠한 방법으로 해를 구하든지 그 해는 푸리에 급수로서 표현이 가능하게 된다.

$$\theta(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_k \sin(k\omega_0 t) + \sum_1^{\infty} b_k \cos(k\omega_0 t) \quad (7)$$

따라서 (7)식으로 부터 $\theta(t)$ 의 1차, 혹은 몇차 미분이던지 구할 수 있으며, 그러한 미분은 모두 푸리에 급수로서 표현 가능하다. 다음 식은 1차 미분식을 나타 낸다.

$$\dot{\theta}(t) = \sum_1^{\infty} a_k k\omega_0 \cos(k\omega_0 t) - \sum_1^{\infty} b_k \omega_0 \sin(k\omega_0 t) \quad (8)$$

2) 푸리에 급수에 의한 해의 근사화

푸리에 급수로 나타난 (7)식 및 (8)식에는 기본 작업 주파수의 고조파 성분들을 포함하고 있으며 이러한 고조파 성분들이 가지는 매니플레이터의 주파수 응답 특성상의 고려할 점에 대하여 설명하겠다. 첫째로는 급수의 모든 고조파 성분에 의하여 관절의 해가 표현될 필요가 없으며, 비록 높은 고조파 성분이 포함되어 있더라도 후단의 제어기가 이를 제어하는데는 한계가 있으므로 우리는 한정된 수의 고조파만을 사용하도록 한다. 이에 관하여는 두가지의 경우를 예시할 수 있는 바, 하나는 실제 대부분의 경우에 있어서 디지털제어를 하게 되는데 이 때의 제어입력으로서의 매니플레이터의 $\theta(t)$ 는 수십 내지 수백 Hz에 불과하며, 또 하나는 이러한 관절 제적에 있어서 ω_0 의 10배를 넘는 정도의 고조파 성분은 이미 무시하여도 좋을 정도로 그 고조파의 크기(amplitude)가 작다는 점이다. 이에 관하여는 제 2장에서 표로서 설명하고자 한다.

둘째로는 매니플레이터의 구조적 고유 진동수들이 계획된 관절 경로에 포함되지 않도록 배제하는 것이다. 이를 위하여는 근사화하는 푸리에 급수의 고조파를 구조적 고유진동수보다 낮은 주파수 성분으로만 구성하는 것이다. 보통의 잘 알려진 PUMA 560 매니플레이터의 경우 구조적 고유진동수는 5-10Hz의 범위에 있다. 이와 같은 논거에서 위의 급수들은 N 차 고조파까지의 합으로서 근사화할 수 있다.

한편, 매니플레이터의 여유자유도를 고려하면 만일에 이와 같이 급수에 의한 근사화를 여유자유도의 수 만큼

의 관절에 대하여 한다면 나머지 관절은 기구학식에 의하여 유일하게 결정할 수가 있게 된다. 즉, 최초의 기구학식 $x=f(\theta)$ 에서 θ_p 를 근사화된 관절, θ_i 를 나머지 관절이라 하면 기구학식은 $x=f(\theta_p, \theta_i)$ 로 되고 이에 관한 역기구학해는 $\theta_i=f^{-1}(x, \theta_p)$ 로 주어진다. 이 경우의 역기구학해는 더 이상 여유 자유도가 없게 되어 유일해를 갖는다. 물론 보다 엄밀하게 표현하면 여유자유도를 갖는 역기구학해는 무수히 많은 해를 갖는데 비하여 위와 같은 경우에는 비여유자유도의 역기구학해와 같이 매니퓰레이터의 자세에 따라 유한개로 되는 유일해를 의미하며 관습상 유일해라고 하므로 이에 따르도록 한다. 다시 말하면 위팔(upper arm), 아래팔(lower arm)에 다른 복수개의 해는 있을 수 있으나 유일해라 부를 수 있다.

또한, 여유 관절을 선정함에 있어서는 어느 관절을 여유 관절로 하느냐는 최적해를 얻는데는 지장이 없으나 내부의 관절부터 여유 관절로 하는 것이 역기구학해의 식을 얻거나 프로그래밍에 있어서 다소 유리하다. 여하튼 임의의 관절을 선택하더라도 같은 결과를 얻을 수 있음을 다음 장에서 보이도록 한다.

이제 관절의 제약을 살펴 보면 θ_p 는 푸리에 급수의 계수로 표현되고 θ_i 도 f^{-1} 함수를 풀면 푸리에 급수로 표현 가능하므로 전체적으로 f 함수는 푸리에 급수로서 규정시킬 수 있다. 그리고 $\theta(t)$ 역시 푸리에 급수로 표현된 $\theta(t)$ 를 미분함으로써 얻어진다. 따라서 최소한의 푸리에 계수를 이용하여 주어진 원래의 최적화 문제를 재구성할 수가 있게 된다. 이상과 같은 방법에 의해 여유자유도 이용 문제의 재구성을 하면 다음과 같이 주어진다.

$$\min \int_{t_0}^{t_1} G(a_k, b_k) dt \quad (9)$$

이때 기구학적 제한식으로는

$$x = f(a_k, b_k) \quad (10)$$

가 주어지고 $k=1, 2, \dots, N$ 이다.

3) 최적해를 얻기 위한 가정

전절에서와 같이 재형성된 문제의 해는 구해진 급수의 계수에 의해 주어지는데, 일반적으로 물리적 의미를 지니는 에너지 최소화 등과 같은 문제에 있어서 최적해를 보장하는 두 개의 가정을 제시한다.

첫째, 최적해는 그 푸리에 급수의 신호 전력이 최소이다. 통상 신호 전력이라 함은 각 고조파의 실수 부분 및 허수 부분의 제곱의 평방근을 합산한 것을 지칭한다.

둘째, 최적해는 그 푸리에 급수의 계수가 단조 감소한다.

이상과 같은 두개의 가정은 해를 구하는 과정에서 최적해가 아닌 극한해들을 매우 유효하게 배제하게 된다. 첫째의 가정은 어떤 해가 기구학적 제한식, 즉 작업을 수행하면서 성능 지수를 극적으로 최소화하는 것이라면 그러한 해 중에서 가장 크기가 작은 것이 최적해이고 나머지는 극한해일 것이라는 가정이다. 일반적으로 관절의 움직임이 크면 이에 수반하여 관절의 속도, 가속도, 토크 등이 전부 클 것으로 예상되고 이러한 실제 물리량에 기초한 성능 지수들도 큰 값을 가질 것이므로 첫째 가정에 의해 우리는 극한해들을 유효하게 배제한다. 두번째의 가정은 높은 주파수의 고조파가 낮은 주파수의 고조파보다 큰 값을 가지게 되면 계획된 경로에 불필요한 진동이 포함됨은 물론, 근사화를 할 경우에도 고유 진동 주파수 이상의 고조파를 생략하거나 하는 것이 어려워진다.

4) 다차원 탐색에 의한 최적해

우리는 식 (9)와 (10)에 의한 최적해를 구하면 되는데 이는 다차원 탐색법에 의하여 얻어진다. 이러한 다차원 탐색법에는 포웰(Powell)의 방법 [18]등을 사용하면 된다. 일반적으로 탐색에 의한 해는 탐색할 변수의 초기치에 의한 극한해가 나오는데 이러한 극한해가 전절의 가정에 의하여 어떻게 배제되는가를 설명하면 다음과 같다. 우선, 첫째 가정에 의해 모든 변수는 초기치가 영에서부터 탐색되어지면 된다. 그리고, 둘째 가정에 의해 고조파를 더욱 많이 포함시킬 수록 최적해에 가까워진다.

2. 3축 평면 매니퓰레이터에의 응용에

1) 주기적 작업과 매니퓰레이터

평면상에 놓여 있는 3축 평면 매니퓰레이터를 그림 1에 도시하였다. 직교 좌표계의 가로와 세로 좌표를 매니퓰레이터의 선단의 위치로 하자. 이 경우 기구학적으로

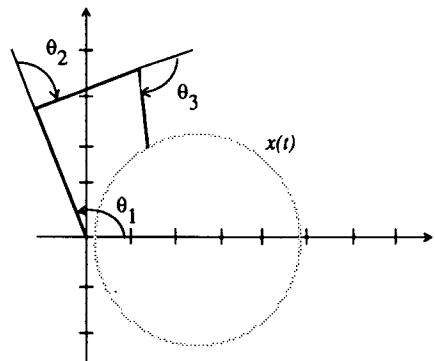


그림 1. 3축 평면 매니퓰레이터의 기구학적 구조
Fig. 1. Geometry of a three-link planar manipulator.

비특이점에서는 여유자유도가 1인 여유자유도 매니플레이터가 된다. 이 매니플레이터의 각축의 길이는 각각 $l_1=3.0, l_2=2.5,$ 그리고 $l_3=2.0$ 단위 길이로 하자.

앞으로의 간단한 수식 표현을 위하여 다음과 같은 약호를 사용한다. 즉, $s_1=\sin(\theta_1), c_1=\cos(\theta_1), s_{12}=(\theta_1+\theta_2), c_{12}=(\theta_1+\theta_2)$ 등과 같이 표현하면 기구학식은

$$x = \begin{bmatrix} l_1c_1+l_2c_{12}+l_3c_{123} \\ l_1s_1+l_2s_{12}+l_3s_{123} \end{bmatrix} \quad (11)$$

로서 주어진다. 또한 주어지는 주기적 작업은 반경이 R인 원을 반시계 방향으로 단위 시간에 회전하는 것으로서 직교 좌표상에서의 초기 위치는 (C-R, 0)로서 주어진다. 다음의 수식이다.

$$x = \begin{bmatrix} -R \cos(2\pi t)+C \\ -R \sin(2\pi t) \end{bmatrix} \quad (12)$$

우리는 주어진 작업이외의 부가적인 성능 지수를 최적화할 수 있는데 일단 많은 연구자들이 채용하는 성능 지수로서 관절 속도 놈의 적분치를 사용하기로 한다. 이러한 성능 지수는 다음의 수식으로 주어진다.

$$\min \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \dot{\theta}^t \dot{\theta} dt \quad (13)$$

2) 근사화 최적해

우선 R=2.3 이고 C=2.5인 작업을 작업 1이라고 칭하자. 본 논문에서 제안한 방법에 의하면 푸리에 급수에서 적절한 고조파까지 포함시켜야 하므로 일단 N차 고조파까지를 포함시키고 나중에 적당한 기준에 의해 N을 결정하도록 하자. 또한, 여유자유도가 1인 경우에 해당하므로 하나의 축에 대해 근사해를 얻으면 되는데 통상 제1축의 구조적 고유 진동수가 제일 낮으므로 제 1축에 대하여 근사식을 사용하도록 하자. 따라서 우리는 근사화된 최적해의 형태를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta_1(t) = \theta_{10} - \sum_{k=1}^N b_{1k} + \sum_{k=1}^N a_{1k} \sin(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^N b_{1k} \cos(k\omega_0 t) \quad (14)$$

위의 식은 (7)식과 같으나 보다 명료한 표현을 위하여 푸리에 급수의 직류 성분을 명백하게 쓴 것이다. 위의 의미에 의하여 θ_{10} 는 작업 시작점에서의 θ_1 의 값이 된다. 우리는 다음과 같은 논제에서 N을 5로 제한하고자 한다. 일단 가상적인 구조적 고유 진동수를 10Hz로 하고 이보다 작은 고조파만을 사용하며, 둘째로는 최적해의 근사식

으로서 충분한 결과를 얻음과 동시에 다차원 탐색 범위를 가급적 줄이는 양자의 타협점으로서 결정한 것이다. 이렇게 얻어진 푸리에 계수를 이용하여 기구학식을 (10)식과 같이 표현하고, 또한 성능 지수식 (13)을 (9)식과 같이 표현한다. 이후 최적화를 위한 푸리에 급수의 다차원 탐색을 포월의 방법에 의하여 근사화 최적해를 구하였다. 그러나 일단 근사화 최적해와 수학적인 최적해를 비교하기 위하여 그림 2에는 수학적으로 얻어진 최적해를 보인다.

수학적 필요 조건에 의한 최적해를 구하는 방법은 시간 영역에서의 통시적 방법에 속하는 것으로서 참고 문헌 [14-17]을 참고하여 여기에서는 그 결과식만을 적도록 한다.

$$\ddot{\theta} = J^+(\dot{x} - \dot{j}\dot{\theta}) \quad (15)$$

이러한 미분 방정식이 주기적 작업 1에 대하여 주기적 해를 주도록 하는 관절 자세와 관절 속도를 구한다. 이러한 종류의 문제는 초기 관절각이 주어지고 최적해를 주는 초기 관절속도를 구하는 초기치 문제로 다루어질 수 있으며 Choi^[17] 등이 제시한 매개 변수화기법을 이용하여 구할 수 있다. 그림 2에서 우리는 수학적으로 얻어진 최적화 필요 조건식에서 얻어진 최적해와 하나의 극한해를 도시하였다. 그림에서 우리는 주어진 초기 자세가 같음에도 불구하고 초기 관절 속도가 다름에 따라 최적해 혹은 극한해를 주는 것을 알 수 있다. 또한 그림 3에서는 최적해와 근사화 최적해의 대비를 통해 어느 정도의 근사화가 이루어 지는가를 보인다. 우리는 단지 수개의 고조파만으로 원래의 최적해를 근사화하였음에도 불구하고 얻어진 결과가 충분히 만족할 만한 근사해임을 알 수 있다.

3) 해에 대한 고속 푸리에 변환 해석

전 절에서 최적해에 대한 두가지 가정을 하였는데 이 절에서는 가정에 대한 타당성 조사를 하도록 하자. 일단

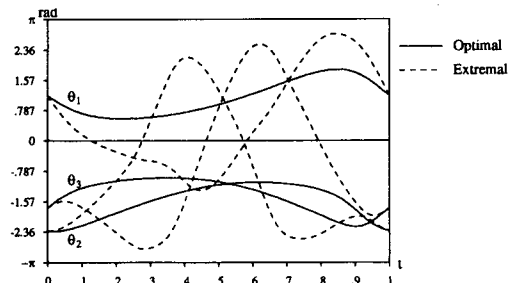


그림 2. 작업 1에 대한 최적해와 극한해
Fig. 2. Optimal vs. extremal solution for Task 1.

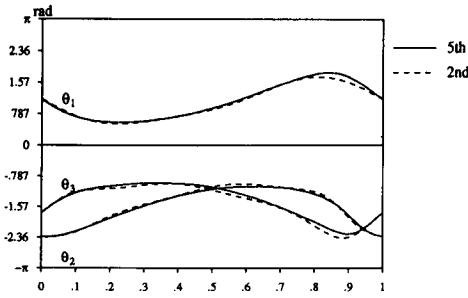


그림 3. 작업 1에 대한 근사화와 최적해
Fig. 3. Approximate optimal solution for Task 1.

그림 2에 도시한 최적해와 극한해의 θ_3 의 제적을 4096점을 균등하게 표본화하여 고속 푸리에 변환(fast fourier transform)한 결과를 표 1에 정리하였다. 표 1의 각 데이터는 k번째 고조파에 대한 복소 전력의 크기이다. 이 표로부터 최적해의 각축에 대한 복소 전력의 합이 항상 극한해의 각 축에 대한 복소 전력의 합보다 작음을 알 수 있다. 즉, 이미 기술한 첫번째 가정에 부합하는 결과이다. 또한, 극한해의 경우 θ_3 는 제 5 고조파의 크기가 제 3 고조파나 제 4 고조파의 크기보다 더 커짐을 알 수 있고 이에 따라 단조 감소하지 않는데 이는 둘째 가정에 대한 위반임을 알 수 있다. 또한, 제 5 고조파의 크기는 제 1 고조파의 크기에 비하여 이미 수% 미만임에 주목한다면 이와 같은 근사해가 충분한 실용성을 갖추었음을 알 수 있다.

표 1. 작업 1에 대한 고속 푸리에 변환 자료
Table 1. FFT Data for Task 1.

고 조 파	최 적 해			극 한 해		
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
1차	0.5918	0.6055	0.5770	1.7608	2.0506	2.1853
2차	0.1373	0.1607	0.1778	0.5102	0.8852	1.0871
3차	0.0396	0.0649	0.0774	0.1161	0.1571	0.0427
4차	0.0116	0.0274	0.0352	0.0764	0.1223	0.0431
5차	0.0036	0.0127	0.0157	0.0583	0.0653	0.0727

4) 임의의 관절을 근사화한 경우

우리는 이러한 근사화 방법에서 어느 관절을 여유 관절로 볼 것인가에 대한 의문을 갖게 된다. 따라서 어떤 관절이 선택되더라도 근사화 최적해가 얻어질 수 있는가를 알아보자. 이미 언급한대로 내부의 관절로부터 여유 관절로 보는 것이 주파수의 관점등에서 유리하지만, 최외곽의 관절을 여유 관절로 한 경우와 비교하여 설명하겠

다. 우선 3축 평면 매니플레이터의 제 3축을 다음과 같이 근사화 하자.

$$\theta_3(t) = \theta_3(t_0) - \sum_{k=1}^N b_{3k} + \sum_{k=1}^N a_{3k} \sin(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^N b_{3k} \cos(k\omega_0 t) \quad (16)$$

전 절에서와 같이 주어진 문제를 푸리에 급수를 이용한 다차원 탐색 문제로 바꾼후 작업 1에 대한 최적 계수를 찾으면 된다. 이 경우 θ_1 을 여유 관절로 했을 때와 θ_3 를 여유 관절로 했을 때의 차이는 그림상으로는 매우 근사해서 식별하기 곤란하므로 우리는 각 경우에 있어서 성능 지수의 값을 비교하겠다. θ_1 을 여유 관절로 한 경우는 87이고 θ_3 를 여유 관절로 한 경우에는 15.82이다. 참고적으로 이 경우의 미분 방정식에 의한 최적해와 극한해의 성능 지수의 값은 14.87과 215.14이다. 따라서 어떤 관절을 여유 관절로 하든지 최적해의 근사해가 됨을 알 수 있다. 또한, 그 궤적으로 부터 주파수 해석을 통하여 얻을 수 있는 고속 푸리에 변환 데이터를 비교하는 것도 의미가 있으므로 다음의 표에 정리한다.

표 2. 임의의 여유 관절에 대한 고속 푸리에 변환 자료
Table 2. FFT data of arbitrary redundant joint for Task 1.

고 조 파	여유 관절 θ_1			여유 관절 θ_3		
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
1차	0.5900	0.6071	0.5760	0.5911	0.6068	0.5758
2차	0.1379	0.1518	0.1776	0.1368	0.1620	0.1776
3차	0.0403	0.0655	0.0775	0.0383	0.0675	0.0775
4차	0.0122	0.0280	0.0352	0.0100	0.0285	0.0365
5차	0.0038	0.0131	0.0157	0.0044	0.0125	0.0166

결국, 우리는 임의로 여유 관절을 정하더라도 그것은 근사화 최적해임을 알 수 있다. 실제 근사화 정도의 차이는 존재하지만 어디까지나 최적해에 대한 근사해이지 극한해에 대한 근사해가 아님에 주목할 필요가 있다.

III. 점 경로에 있어서의 근사해

1. 점 경로 계획에서의 주파수 성분

매니플레이터의 경로 계획은 직교 좌표 공간상에서의 경로 계획과 관절 공간상에서의 경로 계획으로 대별되나

점 경로(point-to-point path) 계획의 경우는 통상 관절 공간상에서 경로 계획을 한다. 이 경우에 있어서 매니플레이터의 점 경로 계획에는 관절 속도 윤곽법(joint velocity profile)에 의하여 관절의 궤적이 정하여 진다. 이렇게 하여 얻어진 점 경로의 궤적은 여러 가지 주파수 성분을 포함하게 된다. 이러한 매니플레이터의 궤적의 주파수 특성을 살펴 보면 우리는 다음과 같이 바람직하지 않은 주파수 성분들이 포함되어 있음을 알 수 있다.

첫째로, 여유자유도 매니플레이터이건 비여유자유도 매니플레이터이건 구조적 고유 진동 주파수를 포함한다는 점이다. 일반적으로 매니플레이터의 구조적 고유 진동 주파수는 매니플레이터의 제작시에 사용된 재질에 따라 그 값이 달라질 뿐아니라 매니플레이터의 선단에 있는 작업물, 즉, 부하에 따라서도 달라진다. 통상 부하에 따른 각 관절의 실효적인 관성은 무부하에서 전부하사이에 1:10 정도로 달라 지고, 이는 또 다시 각 관절의 구조적 고유 진동수를 변화시킨다.^[19, 20] 이리하여 통상의 매니플레이터에 있어서의 구조적 고유 진동수는 최저값의 경우에 5-10Hz 범위이다.^[21]

둘째로는, 계획된 경로의 궤적이 무한대의 주파수 성분을 갖고 있다는 점이다. 이 경우 후단에서 사용될 각 관절의 제어가 아무리 잘 설계가 되어도 무한대의 대역폭을 갖는 제어기는 사실상 실현 불가능하므로 계획된 경로를 추종할 수 없게 된다. 이러한 점을 현실에 맞도록 고려한다면 구조적 진동 주파수를 포함시킬 수 있는 주파수 성분의 상한으로 하여 얻어지는 주파수 성분만으로 경로 계획하는 것이 타당할 것이다.

2. 관절 속도 윤곽 보정법

관절 속도 윤곽 보정법은 3단계로 나누어 실시한다. 첫째로는 주어진 관절 속도 윤곽을 주기적인 관절 속도 윤곽으로 확장하는 것이고, 둘째로는 이렇게 하여 얻어진 주기적 관절 속도 윤곽으로부터 푸리에 변환을 통하여 주어진 관절 속도 윤곽의 각 주파수 성분을 얻는 단계이다. 마지막으로, 구해진 관절 속도 윤곽의 주파수 성분 중에 바람직하지 않은 주파수 성분을 제외하고 관절 속도 윤곽을 재구성한 후 이 재구성된 관절 속도 윤곽이 시작점과 종료점에서 정확히 위치하도록 푸리에 계수를 보정하는 일이다. 이리하여 얻어진 것을 보정된 관절 속도 윤곽이라 한다. 각 단계에 대하여 상술하면 다음과 같다.

1) 주기적 관절 속도 윤곽

통상의 점 경로 계획은 그 작업이 주기적이 아닐 수 있으나 시작점과 종료점을 왕복하는 작업으로 가상적으로 생각할 경우에는 주기적인 작업으로 볼 수 있다. 즉, 시간 t_0 에서 시작점, 시간 t_1 에서 종료점에 도착하는 것이 원래의 주어진 작업이라면 $T=2(t_1-t_0)$ 사이에 시작점-

종료점-시작점을 왕복하는 주기적 작업을 상정할 수 있다는 것이다. 이 경우 전절에서 처럼 기본 작업 주파수 ω_0 를 (6)식과 같이 정의할 수 있다.

한편, 우리에게 일단 관절 속도 윤곽이 주어졌다고 하면 시작점에서 종료점까지는 주어진 관절 속도 윤곽과 같고, 종료점에서 다시 시작점 까지는 시간적으로는 t_1 에 대하여 대칭이고 그 부호가 반대인 주기적 관절 속도 윤곽을 얻을 수 있다. 따라서 이렇게 하여 얻어진 주기적 관절 속도 윤곽도 기본 작업 주파수와 같은 기본 주파수와 그 고조파들로 이루어 진다.

2) 주기적 관절 속도 윤곽의 푸리에 변환

위에서 얻어진 주기적 관절 속도 윤곽을 푸리에 급수로 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{\theta}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (17)$$

따라서 우리는 위의 식의 계수 a_k 와 b_k 를 구하면 주파수 영역에서의 관절 속도 윤곽을 특정 시킬 수 있게 된다. 이러한 주기 함수의 푸리에 변환은 다음과 같이 주어진다.^[22]

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{\theta}(t) dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{\theta}(t) \cos(k\omega_0 t) dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} \dot{\theta}(t) \sin(k\omega_0 t) dt \end{aligned} \quad (18)$$

이와 같이 하여 우리는 주어진 작업과 관절 속도 윤곽으로 부터 주기적 작업과 주기적 관절 속도 윤곽을 정의하고 이로부터 푸리에 변환을 통하여 주파수 영역에서의 관절 속도 윤곽에 대한 완전한 표현식을 얻을 수 있다.

3) 보정된 관절 속도 윤곽

앞의 절에서 지적한 바와 같이 앞에서 얻어진 주기적 관절 속도 윤곽은 매우 바람직하지 않은 고조파 성분들을 포함하고 있다. 따라서 현실적인 주파수 성분만을 포함시키기 위하여 구조적 고유 진동수를 상한으로 하는 근사식으로 표현하면 다음과 같다. 이때 (17)식의 직류 성분은 점 경로의 성격상 영으로 되어 푸리에 급수에서 고려하지 않아도 된다.

$$\dot{\theta}(t) = \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^N b_k \sin(k\omega_0 t) \quad (19)$$

여기서 N 은 구조적 고유 진동수를 넘지 않는 범위에서

선택한다. 이제 위의 보정된 관절 속도 윤곽이 두점 사이를 반복 수행하는 것이므로 (19)식을 적분하여 얻어지는 관절의 궤적이 다음과 같다.

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{k\omega_0 t} \sin(k\omega_0 t) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{k\omega_0 t} \cos(k\omega_0 t) \quad (20)$$

위의 보정된 궤적은 시작 시간에서 시작점에, 종료 시간에 종료점에 있어야 하므로 다음의 두 조건식으로 부터 다시 푸리에 급수의 계수 a_k 와 b_k 를 계산하여야 한다.

$$\begin{aligned} x(t_0) &= f(\theta(t_0)) = f(a_k, b_k) \\ x(t_1) &= f(\theta(t_1)) = f(a_k, b_k) \end{aligned} \quad (21)$$

대부분의 잘 알려진 관절 속도 윤곽에 대하여는 닫혀진 형태(closed-form)의 계수식을 얻어 낼 수 있다. 이러한 예제는 후술하기로 한다.

3. PUMA 560 매니퓰레이터에의 응용예

1) 작업과 매니퓰레이터

물론 관절 속도 윤곽 보정법에 의한 매니퓰레이터의 작업 수행은 비어유자유도 매니퓰레이터 뿐만 아니고 여유자유도 매니퓰레이터에서도 적용 가능하지만 본 절에서는 응용예로서 사용하기 위하여 잘 알려진 PUMA 560 매니퓰레이터를 쓰기로 한다. 편의상 PUMA 560 매니퓰레이터를 선단의 위치 벡터만을 고려하기 위해서 3축 매니퓰레이터로 생각하자. 이 경우의 매니퓰레이터의 기구학은 다음의 식으로 주어진다.

$$\begin{aligned} P_x &= c_1(l_2c_2 + l_3c_{23} - d_3s_2) - d_3s_1 \\ P_y &= s_1(l_2c_2 + l_3c_{23} - d_3s_2) + d_3c_1 \\ P_z &= -l_3s_{23} - l_2s_2 - d_3c_2 \end{aligned} \quad (22)$$

여기서 (P_x , P_y , P_z)는 매니퓰레이터의 선단의 직교 좌표계이고, 기구학에서 사용할 축의 매개 변수는 $l_2=431.8\text{mm}$, $l_3=-20.32\text{mm}$, $d_3=140.09\text{mm}$, 그리고 $d_4=433.07\text{mm}$ 이다. 또한 모사 실험에서 사용할 점 경로 작업은 t_0 초에서 시작점 (300, -249.09, 0)에서 부터 t_1 초까지 종료점 (700, 151.91, 0)으로 가는 것이다. 물론 여기에서는 단위 시간으로서의 초를 사용한 것이다.

2) 최소 에너지 관절 속도 윤곽 보정의 예

우선 방향 관절 속도 윤곽을 보정하여 보기로 하자. 이러한 일정 관절 속도는 매니퓰레이터의 동작에 있어서 최소 에너지 소비를 의도하는 정도의 운전이다. 보정의 절차는 이미 기술한 바와 같이 3단계로 이루어진다. 주어진 관절 속도 윤곽을 주기적 관절 속도 윤곽으로 만들기

위해 주기를 10초라 하자. 즉 $t_0=0$, $t_1=5$ 이므로 $\omega_0=0$. 2π 가 된다. 이러한 주기적 관절 속도는 기함수이므로 $b_k=0$ 이고 푸리에 급수의 직류 성분 a_0 도 영이 된다.

일단 PUMA 560 매니퓰레이터의 최저 고유 진동수를 15Hz정도라 하자. 우선 주어진 작업의 기본 작업 주파수에 따라서 구조적 고유 진동수를 여기시키지 않기 위해 고조파의 상한이 결정 될 것이다. 따라서 최소 에너지 개념의 방향 윤곽에서 앞으로 사용될 푸리에 급수는 7차 고조파까지만을 포함하게 될 것이다.

우리는 주기적 방형파의 푸리에 급수를 푸리에 변환으로 쉽게 식 (18)을 사용하여 구할 수 있으며 이때, 우함수, 기함수, 대칭성등을 이용하면 보다 쉽게 구할 수 있음은 주지의 사실이다. 이렇게 하여 7차 고조파까지 얻어진 식은 아래와 같다.

$$\dot{\theta}_j(t) = m_j \sum_{k=1}^4 \frac{1}{(2k-1)\omega_0} \sin(2k-1)\omega_0 t \quad (23)$$

여기서 j 는 j 번째 축을 의미하고 m_j 는 관절 속도 윤곽의 크기로서 매니퓰레이터가 시작점과 종료점을 만족하도록 계산하여야 한다. 이를 위하여 위의 식을 적분하여 관절의 궤적식을 얻으면

$$\theta_j(t) = \theta_j(t_0) - m_j \sum_{k=1}^4 \frac{\cos((2k-1)\omega_0 t)}{((2k-1)\omega_0)^2} \quad (24)$$

와 같다. 그런데 주어진 점 경로 작업에 대한 시작점 및 종료점의 위치는 정확해야 하므로 매니퓰레이터의 역기구학을 풀어서 푸리에 급수의 계수를 정하면 아래와 같다.

$$m_j = (\theta_j(t_0) - \theta_j(t_1)) / \left(\sum_{k=1}^4 \frac{\cos((2k-1)\omega_0 t_1)}{((2k-1)\omega_0)^2} \right) \quad (25)$$

그림 4에 보정된 관절 속도 윤곽의 초기와 종료시의 불연속, 다시 말해서, 무한대의 가속도와 감속도가 없음을 알 수 있다. 즉, 1차 연속의 관절 속도 윤곽이 얻어졌으며, 초기점 및 종료점 관절 속도가 영이 되어 실용적이다. 뿐만 아니고 본래 7차 고조파까지만을 사용하였음에도 본래의 관절 속도 윤곽과 유사하게 보정된 것을 알 수 있다. 그림 5에는 얻어진 관절의 궤적을 도시하였는데, 선형 함수와 2차 함수의 혼합법에 의한 궤적과 유사함을 알 수 있으나, 통상 이 방법은 사다리꼴의 관절 속도 윤곽에서 얻어지므로 관절 가속도의 불연속점이 존재하기 때문에 역시 무한대의 고조파를 내재하고 있음은 물론이고 실제 어떤 성분의 고조파가 있는지 알기는 어렵다. 따라서 단순히 궤적의 부드러움만을 추구한 방법에 비하여 제안된 방법이 바람직하다.

우리는 주어진 관절 속도 윤곽을 주파수 응답을 고려하여 보정하였으므로 보정의 타당성을 알아 볼 필요가 있다. 주어진 관절 속도 윤곽의 푸리에 급수의 계수는 식 (18)에서 보정된 관절 속도 윤곽의 푸리에 급수의 계수는 식 (25)에서 쉽게 구할 수 있고 이를 표 3에 나타내었다. 표 3에서 알 수 있듯이 보정되지 않은 관절 속도 윤곽에는 불필요한 고조파의 크기가 결코 무시할 수 없는 크기로 계속 존재하는 반면에 보정된 경우는 모두 사라졌음을 알 수 있다.

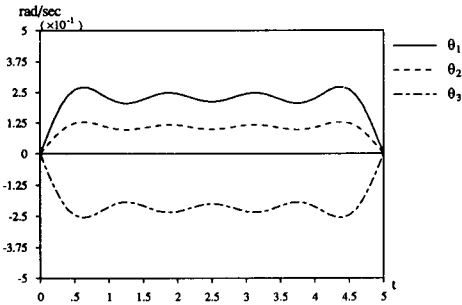


그림 4. 최소 에너지 개념의 보정된 관절 속도 윤곽
Fig. 4. Modified joint vel. profile-min. energy.

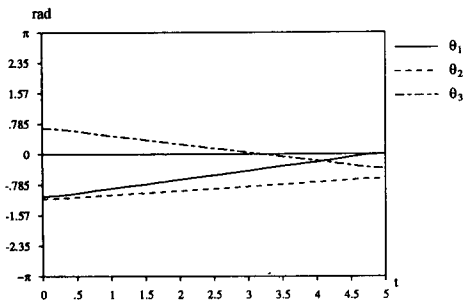


그림 5. 최소 에너지 개념의 보정된 관절의 궤적
Fig. 5. Modified joint trajectory-min. energy.

표 3. 푸리에 계수의 비교표
Table 3. Comparison of fourier coefficients.

고 조 파	주어진 윤곽			보정된 윤곽		
	θ_1	θ_2	θ_3	θ_1	θ_2	θ_3
1차	0.2770	0.1033	0.2616	0.2917	0.1385	0.2755
3차	0.0923	0.0344	0.0872	0.0972	0.0462	0.0918
5차	0.0554	0.0207	0.0523	0.0583	0.0277	0.0551
7차	0.0396	0.0148	0.0374	0.0417	0.0198	0.0394
9차	0.0308	0.0115	0.0291	0.0000	0.0000	0.0000

IV. 결 론

본 논문에서는 매니플레이터의 경로 계획에 있어서 푸리에 급수를 이용함으로써 여유자유도 매니플레이터에 대해서는 연속 경로의 최적화를 할 수 있고, 비여유자유도 매니플레이터에 대해서는 주파수 특성을 고려한 점 경로 계획이 가능함을 보였다. 특히 여유자유도 매니플레이터의 경우 미분 방정식에 의한 방법에서 일어나기 쉬운 극한해를 피할 수 있으며 문제의 형성 과정이 매우 간단함을 보였다. 또한, 점 경로 계획에서는 원래의 관절 속도 윤곽에 충실하면서도 주파수 성분상 실현 가능한 성분만으로 2차 연속인 관절 궤적을 얻을 수 있음을 보였다.

추후의 연구 과제로서는 연속 경로 계획에 있어서 주어진 작업의 주파수 성분이 여러개의 기본 주파수들을 가지고 있는 경우의 문제에 대한 보다 충실한 연구가 진행되어야 할 것이며, 그 결과에 따라서는 제시한 최적해를 얻기 위한 두번째의 가정은 수정되어야 할 가능성이 있다.

參 考 文 獻

- [1] D. E. Whitney, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses," *Trans. Man-Machine Systems*. MMS-10. 1969.
- [2] A. Liegeois, "Automated supervisory control of the configuration and behavior of multibody mechanism," *IEEE Trans. System, Man, Cybern.*, vol. SMC-7, no. 12, pp. 868-871, 1977.
- [3] H. Hanafusa, T. Yoshikawa, and Y. Nakamura, "Analysis and control of articulated robot arms with redundancy," *Prepr. 8th Triennial IFAC World Congress*. XIV. 1981 (Kyoto, Japan)
- [4] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robot manipulators with redundancy," *Robotics Research: The First International Symposium*, edited by M. Brady and R. Paul., Cambridge Mass. : MIT Press, pp. 735-748, 1984.
- [5] R. V. Dubey and J. Y. S. Luh, "An efficient gradient projection optimization scheme for a seven-degree of freedom redundant robot with spherical wrist," *Proc. of IEEE Int. conf. on Robotics and Automation*. 1987.
- [6] C. A. Klein and C. H. Huang, "Review of pseudoinverse control for use with kinema-

- tically redundant manipulators," *IEEE Trans. System, Man, Cybern.*, vol. SMC-13, no. 3, pp. 245-250, 1983.
- [7] J. Baillieul, "Kinematic programming alternatives for redundant manipulators," in *Proc. IEEE Conf. Robotics and Automation*, (St. Louis, MO, Mar. 25-28, 1985), pp. 722-728.
- [8] L. Sciavicco and B. Siciliano, "A solution algorithm to the inverse kinematic problem of redundant manipulators," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 4, no. 4, pp. 403-410, 1988.
- [9] K. Anderson and J. Angeles, "The kinematic inversion of robot manipulators in the presence of redundancy," *The Int. J. of Robotics Research*, vol. 8, no. 6, pp. 80-97, 1987.
- [10] P. H. chang, "A closed-form solution for the control of manipulators with kinematic redundancy," *Proc. of IEEE Int. conf. on Robotic and Automation*, (San Francisco, CA, Apr. 7-10, 1986), pp. 9-14.
- [11] M. Uchiyama, K. Shimizu, and K. Hakomori, "Performance evaluation of manipulators using the Jacobian and its application to trajectory planning," In *Robotics Research: the Second Int. Symp.*, eds. H. Hanafusa and H. Inoue. Cambridge: MIT Press. 1985.
- [12] Y. Nakamura and H. Hanafusa, "Optimal redundancy control of robot manipulators," *Int. J. Robotics Res.* 6(1). 1987.
- [13] K. C. Suh and J. M. Hollerbach, "Local versus global torque optimization of redundant manipulators," *Proc. of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*. 1987.
- [14] K. Kazerounian and Z. Wang, "Global versus local optimization in redundancy resolution of robotic manipulators." *Int. J. robotics Res.* 7 (5). 1988.
- [15] Z. Wang and K. Kazerounian, "An efficient algorithm for global optimization in redundant manipulations." *ASME Trans. on J. of Mech, Trans, and Auto. in Design.* vol. 111, pp. 488-492, Dec. 1989.
- [16] D. P. Martin, J. Baillieul, and J. M. Hollerbach, "Resolution of kinematic redundancy using optimization techniques," *IEEE Trans. on Robotics and Automation*, vol. 5, no. 4, pp. 529-533. 1989.
- [17] B. W. Choi, J. H. Won, and M. J. Chung, "A study on the optimal redundancy resolution of a kinematically redundant manipulator," *Korean Automatic Control Conf.* 1990.
- [18] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukosky, and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes in C*. Cambridge England. : Cambridge Univ. Press, 1988.
- [19] J. J. Craig, *Introduction to Robotics* Mass. : Addison-Wesley. 1986.
- [20] R. P. Paul. *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and control*. Cambridge: MIT Press. 1981.
- [21] K. S. Fu, R. C. Gonzalez, and C. S. G. Lee, *Robotics: Control, Sencing, Vision, and Intelligence* Singapore : McGraw-Hill
- [22] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics* N. Y. : Wiley 1983.

 著 者 紹 介

元 鍾 華 (正會員) 第29卷 B編 第7號 參照
 현재 한국과학기술원 전기 및
 전자공학과 박사과정

鄭 明 振 (正會員) 第26卷 第7號 參照
 현재 한국과학기술원 전기 및
 전자공학과 교수



崔 秉 旭 (正會員) 第29卷 B編 第7號 參照
 현재 금성산전(주) 연구소
 연구단 연구원