

## 가우시안 랜덤매질을 통과한 광도변동의 시뮬레이션

## (Numerical Simulation of Irradiance Scintillation through a Gaussian Random Medium)

白 定 基\*  
(Jeong Ki Pack)

## 要 約

본 논문에서는 파동역학 수치법을 사용하여 굴절을 변동이 미약한 2차원 가우시안 랜덤매질을 통과한 광파의 광도변동을 시뮬레이션하고 그 결과를 기존의 해석적 방법 또는 수치해석 방법에 의한 결과와 비교하였다. 파동역학 수치법은 위상공간에서 주요한 광선경로만을 추적하여 광파를 재구성함으로써 광도를 계산하는 방법이다. 파동역학 수치법의 강점은 어떠한 형태의 랜덤매질에도 적용될 수 있다는 데 있다.

## Abstract

The wave-kinetic numerical method is used in simulating the irradiance scintillations of optical wave through a two-dimensional random medium containing weak Gaussian fluctuations of the refractive index. The results are compared to existing analytical or numerical results. The wave-kinetic method is a phase-space ray-tracing method for certain key ray trajectories, and the irradiance is calculated by reconstructing the entire beam from these trajectories. The strength of the wave-kinetic method lies in the fact that it can be applied to any type of random media.

## 1. 서 론

지난 20여년간 랜덤매질을 통과한 광파의 광도변동에 대해 많은 연구가 행해져 왔으나 대부분의 연구는 해석적 해를 찾는데 치중되어 왔다.<sup>[1~5]</sup> 그러나 해석적 접근방법은 광도에 대한 고차의 통계적인 모멘트를 구하는데 어려움이 있다.

최근들어 컴퓨터를 이용한 수치해석적 방법이 시도되고 있는데, 이러한 수치해석적 접근방법은 랜덤매질을 통과한 광파의 광도를 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 직접 계산하기 때문에 원칙적으로는 광도변동에 대한 어떠한 통계

적인 양도 계산할 수 있다는 장점이 있다.

지금까지 발표된 시뮬레이션 방법은 주로 위상스크린(phase screen)에 국한된 것이며 그 개략적인 방법은 위상스크린에 의한 위상변동을 적절히 시뮬레이션하고 자유공간에서의 광파전파는 잘 알려진 Huygens Fresnel 회절공식을 이용함으로써 위상스크린을 통과한 광파의 광도를 계산하는 것이다.<sup>[6~9]</sup> 광역매질(extended medium)인 경우는(즉, 송신기와 수신기가 모두 랜덤매질 내에 있는 경우) 위상스크린의 경우보다 시뮬레이션이 훨씬 더 어려우며 수중음향학 분야에서 split-step Fourier 알고리즘을 사용하여 시뮬레이션한 예가 있다.<sup>[9,10]</sup>

본 연구에서는 파동역학 수치법(wave kinetic numerical method)<sup>[12,13]</sup>을 이용하여 위상스크린과 광역매질에 의한 광도변동을 시뮬레이션하고, 시뮬레이션에 의해 얻어진 광도 데이터로부터 광도의 covariance를 계산하여 이론치 또는 다른 수치해석적 방법에 의해 얻어진

\*正會員, 東亞大學校 電子工學科  
(Dept. of Elec. Eng., Dong-A Univ.)  
接受日字: 1992年 6月 29日

결과와 비교함으로써 시뮬레이션 방법의 타당성을 입증하였다.

랜덤매질의 구현은 랜덤모션모델(random-motion model)을 단순화 시켜서 사용하였으며, 일반적인 굴절을 스펙트럼(예컨대, von Karman 또는 Kolmogorov 스펙트럼)을 갖는 3차원 매질인 경우 계산시간이 너무 많이 소요되므로, 2차원 가우시안(Gaussian) 랜덤매질에 대해 시뮬레이션하였다.

II. 랜덤매질의 구현

임의의 위치  $\vec{r}$ 에서의 굴절을 변동을  $\delta n(\vec{r}) \equiv n(\vec{r}) - \langle n(\vec{r}) \rangle$ 로 두고, 랜덤함수  $\delta n(\vec{r})$ 이 통계적으로 균일하며(statistically homogeneous),  $|\delta n(\vec{r})| \ll 1$ 이라고 가정하자. 일반적인 랜덤매질의 통계적인 성질은 굴절을 변동의 covariance,  $Cn(\vec{r}) \equiv \langle \delta n(\vec{r})\delta n(\vec{r}') \rangle$ , ( $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ), 또는  $\vec{r}$ 에 대한 Fourier 변환, 즉 스펙트럼  $\Phi_n^{(3)}(\vec{K})$ 로써 나타낼 수 있다.

굴절율의 변동  $\delta n$ 은 가우시안 와적(Gaussian eddy)의 가중합,

$$\delta n(\vec{r}, t) = \sum_{j=1}^M \left[ \sum_{i=1}^{N_j} (sgn)_{ij} A_j e^{-i(\vec{r} - \vec{R}_{ij})^2 / \ell^2} \right] \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있다.<sup>[13]</sup> 여기서  $A_j$ 는 중심  $\vec{R}_{ij}$  크기  $\ell_j$ 인 와적의 가중치를 나타내며  $(sgn)_{ij}$ 는  $\pm 1$ 의 값을 랜덤하게 가지는 변수이다. 시간과 공간의 상관관계를 무시하고,  $A_j = \langle \delta n^2 \rangle$ 으로 둘 때,

$$\Phi_n^{(3)}(K) = 2^{-3} \langle \delta n^2 \rangle \int_0^\infty dt \ell^6 n(t) e^{-K^2 \ell^2 t / 2} \quad (2)$$

로 주어지며,<sup>[11]</sup> 이때  $n(t)dt$ 은  $t$ 과  $t+dt$  사이의 크기를 가지는 와적의 단위체적당 수를 나타낸다. 윗 식은 새로운 변수  $p = K^2$ ,  $\zeta = 1/2\ell^2$ 를 도입하면  $G^{(3)}(p) \equiv \Phi_n^{(3)}(K)$ ,  $F^{(3)}(\zeta) \equiv 2^{-3} \langle \delta n^2 \rangle \ell^6 n(t)$ 에 대한 Laplace 변환식으로 나타낼 수 있다. 즉,

$$G^{(3)}(p) = \int_0^\infty d\zeta F^{(3)}(\zeta) e^{-p\zeta} \quad (3)$$

2차원 매질인 경우는  $F^{(3)}(\zeta) \equiv 2^{-2} \langle \delta n^2 \rangle \ell^4 n(t)$ 로 주어짐을 쉽게 보일 수 있으며, 가우시안 스펙트럼  $\propto e^{-K^2 \ell^2}$ 인 경우

$$n(s) \equiv \frac{4}{\pi \ell^2} \delta(s - \ell/\sqrt{2}) \quad (4)$$

가 되어 크기가  $\ell/\sqrt{2}$ 인 한 종류의 와적만으로써 랜덤매질을 구현할 수 있다.

전술한 모델을 그대로 시뮬레이션할 경우 계산시간이 너무 많이 소요되므로, 본 연구에서는 그림 1과 같이 주어진 매질을 여러 개의 얇은 층(slab)으로 나누고 각 층내의 와적을 중심면(2차원인 경우는 중심선)으로 이동시킨 단순화된 모델을 사용한다. 이 경우, 두께를 D, 폭을 W라 할 때

$$\delta n(x, z) = \sum_{j=1}^N \delta n_j(x, z) \quad (5)$$

$$\delta n_j(x, z) = \eta_0 \sum_{m=1}^{N_j} (sgn)_{jm} e^{-2[z - x_m]^2 + (z - z_j)^2 / \ell^2}$$

으로 나타낼 수 있으며, 여기서  $\eta_0 = \langle \delta n^2 \rangle$ , N은 층의 수,  $N_j = 4WD/\pi \ell^2$ 은 j-번째 층내의 와적의 수이며 와적의 중심  $(x_m, z_j)$ 는  $z_j = (j-1)D$ 인 선상에서 균일분포를 가진다.

이때 j-1번째 층에 의한 위상변동은  $D \gg \ell \gg \lambda$ 인 경우 식 (5)로부터

$$\phi_j(x) = k \int_{z_j - D/2}^{z_j + D/2} dz \delta n_j(x, z) \approx \sqrt{\pi/2} k \eta_0 \sum_{m=1}^{N_j} (sgn)_{jm} e^{-2(x - x_m)^2 / \ell^2} \quad (6)$$

로 주어지며, variance는  $\phi_0^2 = \sqrt{\pi} k^2 \ell D \eta_0^2$ 이 된다. 식 (5), (6)에서  $N=1$ 로 두면 얇은 위상 스크린(thin phase screen)에 대한 표현식이 된다.

상기한 단순화 모델, 즉 각 층의 와적들을 중심면(또는 선) 상으로 이동시키는 것은 관측점  $z=L$ 에서의 중심이동에 따른 굴절 및 회절에 의한 영향을 무시할 수 있는 범위내에서 가능하다. j-번째 층에 의한 굴절각 변동의 실효값은  $\theta_{rms}^{(j)} = \sqrt{2} \phi_0 / k \ell$ 이며,  $D \theta_{rms}^{(j)} \ll \ell$ 일때 중심이동에 따른 굴절의 영향을 무시할 수 있으므로  $D \phi_0 \ll k \ell^2$ 의 조건이 요구된다. 또한 유효반경  $\ell$ 인 와적에 의한 회절각은  $\lambda/\ell$  정도의 크기를 가지므로  $D \ll k \ell^2$ 일때 회절의 영향도 무시가능하다. 본 시뮬레이션에서 사용된 변수값들은  $k \sim 10^7 \text{m}^{-1}$ ,  $\ell \sim 0.01 \text{m}$ ,  $D \sim 100 \ell$  이므로 전술한 두 가지 조건이 잘 만족된다.

앞으로의 논의의 편의를 위해 몇 개의 변수를 정의하자. 먼저 Fresnel 거리와 가우시안 와적의 유효초점거리를 각각  $L_F = k \ell^2$ ,  $f = L_F / 2 \phi_0$  ( $\phi_0 = \phi_{\rho}$ )로 정의하면<sup>[6]</sup>, 변

수  $r=L_F/L$ ,  $\zeta \equiv L/f=2\phi_0/r$ 는 각각 랜덤매질에 의한 회절과 굴절의 정도를 나타내는 변수가 된다. 변수  $r$ 가 큰 경우 기하학적 광학(geometrical optics) 영역에 해당되며 작을 경우는 Fraunhofer 회절 영역에 해당된다. 또한  $\zeta$ 가 작은 경우는 광도변동이 미약하며 그 반대일 경우는  $\zeta$ 가 크게 된다.

2차원 가우시안 위상스크린에 대한 광도변동의 covariance<sup>[16]</sup>는

$$\delta C_1(x) = C_1(x) - 1, \sigma_1^2 = \delta C_1(0)$$

$$C_1(\vec{x}) \equiv \frac{\langle I(\vec{x}/2)I(-\vec{x}/2) \rangle}{\langle I^2 \rangle} = \frac{r}{\pi} \int_0^\infty du \int_0^u dv e^{-\phi_f^2(u,v)} [\cos(r\vec{x}u) + \cos(r\vec{x}u)] \cos(ruv) \quad (7)$$

로 주어진다. 위 식에서  $\vec{x} = x/\iota$ 이며,  $f(u,v) = 2 - 2e^{-u^2} - 2e^{-v^2} + e^{-(u+v)^2} + e^{-(u-v)^2}$ 이다. 주어진  $r$ (또는  $\phi_0$ ) 값에 대한 scintillation index  $\sigma_1^2$ 의  $\zeta$ 에 따른 변화는 그림 2와 같다.

$\zeta \ll 1$ 과  $\zeta \gg 1$ 인 경우의 광도변동에 대한 통계적 성질은 잘 알려져 있으므로 본 논문에서의 관심 영역은 그 중간 영역 즉 random-focusing 영역이다.

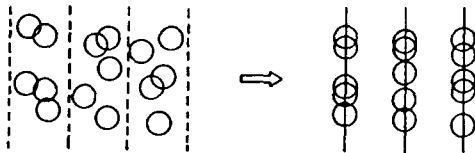


그림 1. 단순화 모델  
Fig. 1. Simplified model.

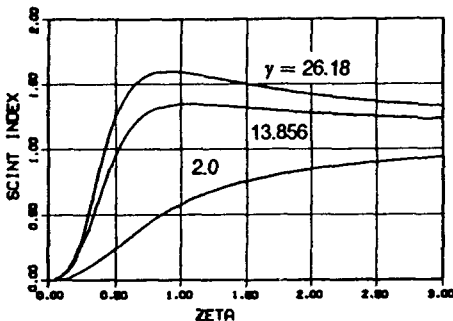


그림 2.  $\sigma_1^2$ 에 대한  $\xi$ 의 영향  
Fig. 2. Effects of  $\xi$  on  $\sigma_1^2$ .

III. 파동역학 수치법에 의한 시뮬레이션

와적의 유효반경  $\iota \gg \lambda$  이고,  $|\delta n| \ll 1$ 인 경우  $e^{ikz}$  성분을 분리시킨 단색파에 대한 전체의 phasor,  $u(x,z) = E(x,z) e^{-ikz}$ , 는  $z$ 방향에 대한 변화율이 크지 않으므로 스칼라 포물선 방정식(scalar parabolic equation)을 만족한다. 길이에 관계되는 모든 변수들을  $\iota$ 에 대해 정규화시켰을 때(즉,  $x/\iota \rightarrow x, z/\iota \rightarrow z, s/\iota \rightarrow s, k\iota \rightarrow k, F/\iota \rightarrow F$ ),  $u(x,z)$ 에 대한 WDF(wigner distribution function)은

$$F(x,\theta;z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-k\theta s} u(x+s/2,z) u^*(x-s/2,z) \quad (8)$$

로 주어지며( $\theta = k_x/k_z$ ) 비선형 역학방정식(nonlinear kinetic equation)을 만족한다.<sup>[14,15]</sup> 임의의 관측점  $z$ 에서의 광도  $I(x,z)$ 는  $F$ 를  $k\theta$ 에 대하여 적분하면 구할 수 있다. 위 식에서 \*는 공액을 의미한다.

굴절을 변동이 미약할 경우 역학방정식은 선형화가 가능하며(Liouville approximation), 이때  $dF/dz=0$ 를 만족하고 특성방정식은  $dx(z)/dz = \theta(z), d\theta(z)/dz = \partial[\delta n(x,z)]/\partial z$ 로 주어진다. 입사파를 가우시안 빔,  $u(x,0) = \exp(-x^2/w_0^2)$ , 으로 가정할 경우  $z=0$ 에서의 WDF  $F(x,\theta)$ 는 식(8)로부터 쉽게 구해지며, 수치해석적 계산을 위해 이것을 여러개의 좁은 가우시안 WDF으로 이산화시킨다.<sup>[12,13]</sup> 즉,

$$F(x,\theta) = \sum_{n=1}^{N_F} A_n \exp\left[-\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 (\delta x_{ij} A_{ij} \delta x_{ij})\right],$$

$$A_n \equiv \frac{W_n}{2\pi} e^{-2(nAx)^2/w_0^2}$$

$$A_{11} = 1/(2\Delta x^2), A_{22} = k^2 w_0^2/2, A_{12} = 0, A_{21} = 0 \quad (9)$$

여기서  $\delta x_1 = x - n\Delta x$ 는  $n$ -번째 가우시안 빔의 중심  $x^n = n\Delta x$ 에 대한  $x$ 좌표를 나타내며,  $\delta x_2 = \theta$ 이다. 위 식에서  $\theta$ 에 대한 가우시안 함수,  $\exp(-k^2 w_0^2 \theta^2/2)$ 의 폭은 평면파인 경우( $w_0 \rightarrow \infty$ ) 매우 좁으므로  $\theta$ 에 대해서는 이산화시키지 않았다.

그림 1과 같은 단순화된 모델에서  $j$ -번째 층은  $z_j = (j-1)D$ 에 위치하고  $\delta n_j(x,z)$ 는 식(5)와 같이 주어지므로 굴절을 변동이 작을 경우 이 층에 대한 광선추적(ray tracing)은 반복 섭동법(iterated perturbation method)<sup>[12,13]</sup>을 사용하면 된다. 특히  $D \gg \iota$ 인 경우 ( $j-1$ )-번째 층의 가운데에 위치한 와적들의 광선경로에 대한 영향은

$z=z_i-1$ 에서 광선의 기울기가  $\delta\theta_{j-1}$  만큼 변화하는 것으로 근사할 수 있다(impulse approximation). 광선의 기울기와 위치는

$$\begin{aligned} \theta_j &= \theta_{j-1} + \delta\theta_{j-1} \\ x_j &= x_{j-1} - 1 + D\theta_j \\ \delta\theta_j &= -2\sqrt{2\pi} \eta_0 \sum_{m=1}^{N_F} (sgn)_{jm} (x_{j-1} - x_{jm}) \\ \exp[-2(x_{j-1} - x_{jm})^2] \end{aligned} \quad (10)$$

으로 주어지며, 이때 좌적중심  $x_{jm}$ 은 폭  $W$ 인  $x$  축상에 균일하게 분포한다.

식(9)는 빔 중심  $x_j^n, \theta_j^n$ 에 대해서도 만족한다. 빔 중심에 대한 좌표를  $X_j^n = x_j - x_j^n, \Theta_j^n = \theta_j - \theta_j^n$ 으로 두자. 광선의 폭(이산화된 가우시안 빔의 폭)이 충분히 좁은 경우( $j-1$ ) 번째 층에서  $j$ -번째 층으로의 변환은 선형적으로 근사할 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_{j-1}^n \\ \Theta_{j-1}^n \end{bmatrix} &= T_{n1} \begin{bmatrix} X_j^n \\ \Theta_j^n \end{bmatrix} \\ T_{n1} &= \begin{bmatrix} 1 & -D \\ -\delta\theta_{j-1}' & 1 + D\delta\theta_{j-1}' \end{bmatrix}, \delta\theta_{j-1}' = \left(\frac{d\delta\theta_j}{dx}\right) x = x_{j-1}^n \end{aligned} \quad (11)$$

윗 식에서  $\det(T_{n1})=1$  이므로 선형근사는 에너지 보존 법칙을 만족함을 알 수 있다.  $N$ 개의 층에 대해 선형변환을 연속적으로 적용시키면 관측점  $z=L$ 에서의 WDF은

$$\begin{aligned} F_1(x, \theta) &= \sum_{n=1}^{N_F} A_n \exp\left[-\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\delta x_i A_{ij} \delta x_j)\right] \\ A &= T_n^T A T_n, T_n = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} = T_{n1} T_{n2}, \dots; T_{nN} \end{aligned} \quad (12)$$

로 주어진다. 여기서  $\delta x_1 = x - x_N^n, \delta x_2 = \theta - \theta_N^n$ 이며,  $n$ 번째 광선중심의 기울기와 위치는 각각  $\theta_n = \theta_0 + \sum_{p=1}^N \delta\theta_p^n, x_n^n = x_0^n + D \sum_{p=1}^N \theta_p^n$ 이고,  $\theta_0^n = 0, x_0^n = n\Delta x$ 는 입사면에서의 광선에 대한 값들을 나타낸다. 관측점에서의 광도는  $F_L(x, \theta)$ 를  $k\theta$ 에 대해 적분하면 얻어지며 평면파인 경우( $w_0 \rightarrow \infty$ ),

$$I_L(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=1}^{N_F} \frac{1}{|D_n|} \exp[-(x - x_N^n)^2 / 2D_n^2 \Delta x^2] \quad (13)$$

으로 주어진다.

전술한 광도계산은 1차 근사이며 이에 대한 보정항은 다음과 같이 구할 수 있다. 임펄스 근사를 할 경우  $j$ -번째 층에 의한 WDF의 변화는  $z_j = (j-1)D$ 에서의 위상 임펄스와 거리  $D$ 만큼의 자유공간 전파를 고려하면 된다.  $z_{j+1}$ 에서의 입사파와 위상임펄스  $\theta_{j+1}$ 이 인가된 후의 광도를 각각  $u_j, u_j'$ 라 할 때

$$u_j'(x) = u_j(x) \exp[i\phi_j(x)] \quad (14)$$

로 주어지며, WDF는

$$\begin{aligned} F_j'(x_i, \theta_{j+1}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-ik\theta_{j+1}s} [u_j'(x_i + s/2)] \\ [u_j'(x_i - s/2)]^* &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-ik\theta_{j+1}s} \\ e^{-i\delta\phi_{j+1}(x_i, s)} &\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_j e^{-ik\theta_j s} F_j(x_i, \theta_j) \end{aligned} \quad (15)$$

로 나타낼 수 있다. 윗 식에서  $\delta\phi_{j+1}(x, s) = \phi_{j+1}(x + s/2) - \phi_{j+1}(x - s/2)$  이다. 자유공간 전파에 의한 변환식은

$$\begin{aligned} x_j &= x_{j+1} - D\theta_{j+1} \\ \theta_j &= \theta_{j+1} \end{aligned} \quad (16)$$

로 주어지므로  $z_{j+2}$ 에서의 WDF는

$$F_{j+1}(x_{j+1}, \theta_{j+1}) = F_j'(x_j = x_{j+1} - D\theta_{j+1}, \theta_{j+1}) \quad (17)$$

가 된다.

식 (15)에서의  $\delta\phi$ 를 Taylor 급수로 전개하면

$$\delta\phi_j(x, s) = \phi_j^{(1)}(x)s + h_j(x, s)$$

$$h_j(x, s) \approx 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\phi_j^{(2m-1)}(x)}{(2m-1)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m-1} \quad (18)$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 윗 첨자(1), (2m-1)은  $x$ 에 대한 미분을 뜻한다. 윗 식에서  $s$ 에 대한 1차항만을 포함시키면 전술한 Liouville 근사가 되고 3차항까지를 고려하면 Frankenthal 등이 제안한 two-scale expansion<sup>[7]</sup>과 같게 됨을 보일 수 있다.

입사파를 평면파로 가정하고 WDF를 이산화시켜 상기한 과정에 의해  $z=L$ 에서의 WDF를 구하고  $k\theta$ 에 대해 적분하면 광도에 대한 표현식은

$$I_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega e^{ix\Omega} \tilde{I}_1(\Omega),$$

$$\tilde{I}_1(\Omega) = \frac{4x}{\pi} \sum_n e^{-4x^2(\Omega + g_n(\Omega))^2/2} e^{-i\sum_{j=1}^N h_j} \quad (19a)$$

로 주어지며 [부록참조], 여기서

$$g_n(\Omega) = \sum_{j=1}^N \delta\phi_{nj}'(\alpha_j)$$

$$\alpha_j = \alpha_{j+1} + [\Omega + \sum_{j=1}^N \delta\phi_{nj}'(\alpha_j)/r_{1j}], \quad (19b)$$

$$\alpha_N = \Omega/r_{1N}, (j=N-1, \dots, 1)$$

이다. 위 식에서  $x_n = x\Omega$ ,  $r_1 = kc^2/D$  이며  $h_{nj}$ ,  $\xi\phi_{nj}'$  은 각각 n번째 광선중심에서의  $h_j$ ,  $\delta\phi_j$ ,  $\partial[\delta\phi_j]/\partial x$ 를 나타낸다.

식 (19)는 임펄스 근사의 범위내에서는 정확한 표현식이며 이로부터 몇가지 근사식식을 얻을 수 있다. 먼저  $k\theta(x) = d\phi(x)/dx$ 의 관계식과 식 (18)로 부터  $\delta\phi_{nj}'(s) = k\delta\theta_{nj} s + h_{nj}'(s)$ 로 나타낼 수 있는데,  $h_{nj}'(s)$ 항을 무시하면,

$$\tilde{I}_1(\Omega) = \frac{4x}{2\pi n} \sum \left[ e^{-ix\Omega} e^{-4x^2 D_s^2 \Omega^2/2} \right]$$

$$\left[ e^{-i\sum_{j=1}^N h_j(\hat{\alpha}_j/r_{1j})} \right]$$

$$\hat{\alpha}_j = \hat{\alpha}_{j+1} + (1 + D \sum_{p=1}^N \delta\theta_{np}') \hat{\alpha}_p, (\hat{\alpha}_N = 1) \quad (20)$$

가 됨을 보일 수 있다. 여기서  $h_{nj}$ 의 함수로 주어진 두번째 항이 보정항이며 이를 제외한 나머지 부분은 식 (13)으로 주어진 Liouville 근사에 의한 광도의 스펙트럼에 해당된다. 또한, 위 식에서  $\delta\theta_{np}'$ 을 무시하면  $\alpha_j = N-j+1$ 로 되어

$$\tilde{I}_1(\Omega) = \frac{4x}{2\pi n} \sum \left[ e^{-ix\Omega} e^{-4x^2 D_s^2 \Omega^2/2} \right] \left[ e^{-i\sum_{j=1}^N h_j(N-j+1/r_{1j})} \right] \quad (21)$$

로 간략화 된다. 앞으로 식 (13), (21), (20), (19)로 주어진 표현식을 각각 WK(LV), WK(I), WK(II), WK(III)라 하기로 한다.

위상스크린인 경우는 광도의 covariance에 대한 이론식이 식 (7)로 주어지나 광역매질인 경우는 이론식이 없다. 단순화된 모델에 대해 임펄스근사를 할 경우 광역매

질에 대해서도 Huygens-Fresnel 회절공식을 사용할 수 있으므로, 광역매질에 대해서는 H-F 공식을 이용한 결과와 비교해 봄으로써 전술한 여러가지 근사식의 정확도를 알아보기로 한다. 식 (14)와 각 스펙트럼(angular spectrum)으로 표현된 H-F 공식<sup>[6]</sup>을 이용하면 (j+1)-번째 층에 대해서

$$u_{j+1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqx} e^{-iq^2/2r_j} U_j(q),$$

$$U_j(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-iqx} \left[ u_j(x) e^{i\phi_{j+1}(x)} \right] \quad (22)$$

로 주어지므로 FFT 알고리즘을 이용하여 N개의 층에 대해 반복계산하면  $z=L$ 에서의 전계 및 광도를 계산할 수 있다.

#### IV. 시뮬레이션 결과 및 검토

시뮬레이션에 사용된 변수값들은 다음과 같다:  $\lambda=0.6 \mu\text{m}$ ,  $l=1\text{cm}$ ,  $\gamma=13.856$ ,  $\Delta x=0.005l$ . 그리고 광도의 covariance 계산을 위해 x축 방향으로  $0.1l$ 의 간격을 가진 11개의 수신점에서 광도 데이터를 구하였다.

시뮬레이션에 사용되는 랜덤매질의 폭  $w$ 는 유한하므로 매질의 가장자리 부분은 통계적으로 매우 불균일하게 된다 따라서, 수신점의 폭을  $w_s$ 라 하면  $w-w_s$ 는 분산변수  $L_w = \theta_0 l$ 에 비해 충분히 커야 한다. 실제 시뮬레이션 경험에 의하면  $w-w_s \geq 10L_w \approx 7\xi l$ 의 조건을 만족하는 경우 수신점에서의 가장자리 효과는 무시할 수 있다. 유한한 스크린의 폭에 의한 회절현상을 가지고도 유사한 조건을 유도할 수 있다<sup>[6]</sup>.

먼저 위상스크린에 대한 결과를 살펴보도록 하자. 그림 3은  $\phi_0=12.0$  일때의 시뮬레이션에 의한 두 수신점에서의 광도 데이터로서 두 데이터 사이에 어떤 상관관계가 있음을 보여주고 있다. 실제  $\phi_0=1.0, 12.0(\xi=0.144, 0.5)$ 일때 각각  $N_1=1500, 2500$ 개의 광도데이터로부터 계산한 covariance는 그림 4-7과 같다.

그림 4와 5는 WK(III)(위상스크린의 경우 랜덤위상을 구현하고 H-F 공식을 이용하여 시뮬레이션한 결과와 동일함)를 사용하여 얻어진 결과이며 covariance가 이론치와 잘 일치함을 알 수 있다. 그러나 광도의 분산(scintillation index)은  $\phi_0^2=1.0$ 인 경우 이론치는  $\sigma_1^2 = 0.066$ , 표준편차는  $S_E = \langle \hat{\sigma}_1^2 \rangle = \langle \sigma_1^2 \rangle \sqrt{2/N_1} = 0.0024$ 로서 시뮬레이션에 의한 값  $\hat{\sigma}_1^2 = 0.067$ 은  $\sigma_1^2 \pm S_E$  범위 안에 있으나,  $\phi_0^2=12.0$ 인 경우는  $\hat{\sigma}_1^2 = 0.840 \approx \sigma_1^2 - 4.5 S_E$  ( $\sigma_1^2 = 0.962, S_E = 0.029$ )로서 이론치와 상당히 다르다. 국외 데이터(outlier), 즉 다른 것에 비해 특별히 크거나

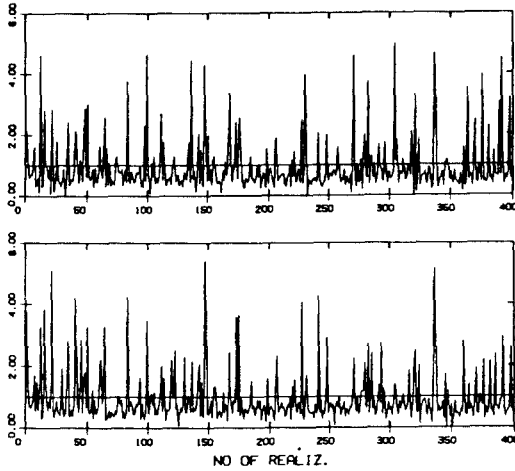


그림 3. 0.095 $\ell$ 의 간격을 가진 두 수신점에서의 광도변동:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 12.0 (\xi = 0.5)$

Fig. 3. Irradiance Fluctuations at 2 receivers separated by 0.095 $\ell$ :  $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 12.0 (\xi = 0.5)$ .

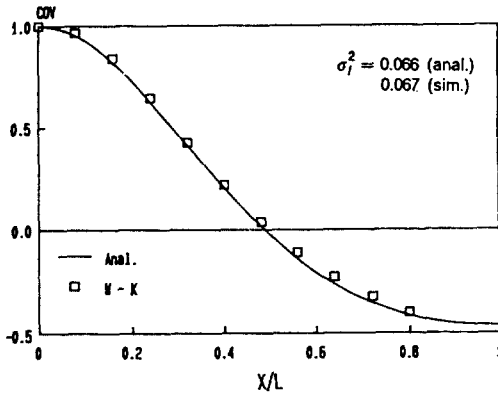


그림 4. 수신점의 간격에 대한 광도의 정규화 covariance:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 1.0 (\xi = 0.144)$ .

Fig. 4. Normalized covariance of irradiance vs receiver separation:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 1.0 (\xi = 0.144)$ .

작은 데이터를 적절히 제거하면 이론치에 다소 더 근접하게 되나, 경험에 의하면 굴절률 변동이 큰 경우는 일반적으로 시뮬레이션에 의해 정확한 분산값을 구하기 힘들다.

그림 6과 7은 WK(LV)에 의한 결과이며  $\phi_0 = 12.0$ 인 경우는 이론치와 많이 다르다. 실제 시뮬레이션 해 본 결과에 의하면 WK(LV)는  $\xi \leq 0.2$ 인 영역에서 유효하다.

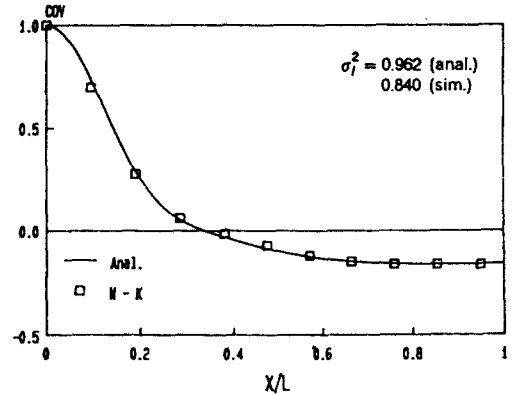


그림 5. 수신점의 간격에 대한 광도의 정규화 covariance:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 12.0 (\xi = 0.5)$

Fig. 5. Normalized covariance of irradiance vs receiver separation:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 12.0 (\xi = 0.5)$ .

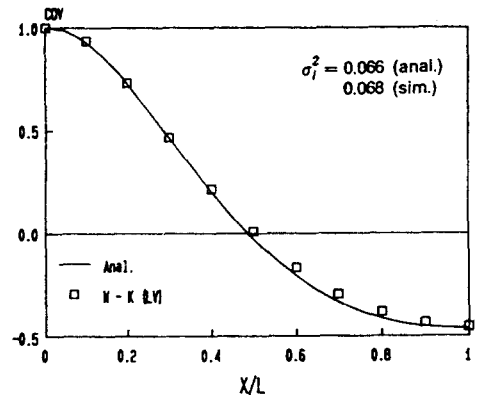


그림 6. 수신점의 간격에 대한 광도의 정규화 covariance:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 1.0 (\xi = 0.144)$ :WK(LV)

Fig. 6. Normalized covariance of irradiance vs receiver separation:  
 $\gamma = 13.856, \phi_0^2 = 1.0 (\xi = 0.144)$ :WK(LV).

광역매질인 경우는 주어진 매질을 100개의 층으로 나누어 시뮬레이션하였으며, 이론치가 없으므로 전 절에서 언급한 바와 같이 단순화된 모델에 H-F 공식을 적용시킨 결과와 비교하였다. 여러가지 근사식에 대해 시뮬레이션해 본 결과 WK(LV), (I), (II), (III)의 유효영역은 각각  $\xi \leq 0.2, 0.5, 0.9, 1.2$ 이다.  $\phi_0^2 = 1.0, 5.0 (\xi = 0.144, 0.323)$ 인 경우 WK(I)을 사용하여 얻어진 1500개의 광도 데이터로부터 계산한 covariance와 분산은 그림 8, 9와 같으며 H-F에 의한 결과와 잘 일치하고 있다.

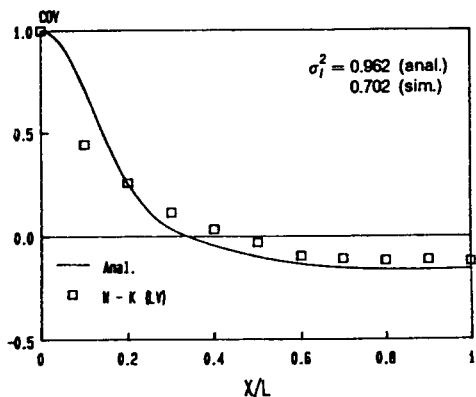


그림 7. 수신점의 간격에 대한 광도의 정규화 covariance:  
 $\sigma_i^2 = 0.962$  (anal.)  
 $0.702$  (sim.)  
**Fig. 7.** Normalized covariance of irradiance vs receiver separation:  
 $\sigma_i^2 = 0.962$  (anal.)  
 $0.702$  (sim.)

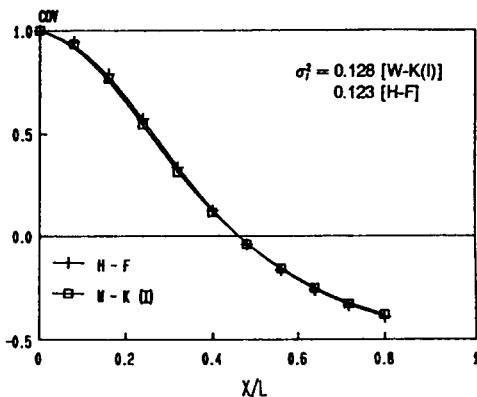


그림 9. 수신점의 간격에 대한 광도의 정규화 covariance:  
 $\sigma_i^2 = 0.128$  [W-K(I)]  
 $0.123$  [H-F]  
**Fig. 9.** Normalized covariance of irradiance vs receiver separation:  
 $\sigma_i^2 = 0.128$  [W-K(I)]  
 $0.123$  [H-F]

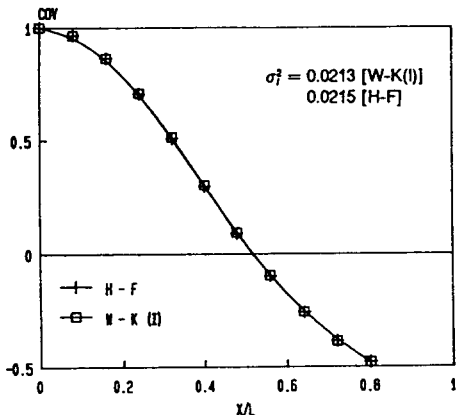


그림 8. 수신점의 간격에 대한 광도의 정규화 covariance:  
 $\sigma_i^2 = 0.0213$  [W-K(I)]  
 $0.0215$  [H-F]  
**Fig. 8.** Normalized covariance of irradiance vs receiver separation:  
 $\sigma_i^2 = 0.0213$  [W-K(I)]  
 $0.0215$  [H-F]

여기서 중요한 점은 오차의 누적에 의해 단순화 모델이 유효하지 않는 경우는 일반모델을 사용해야 하며 이때는 H-F 공식을 적용시키기 어렵다. 그러나 파동역학 수치법은 이 경우에도 사용할 수 있다는 장점이 있다(물론 이 경우 광도계산 공식은 단순화 모델에 대한 본 논문의 표현식과 다소 다르게 된다<sup>[12]</sup>).

V. 결 론

본 논문에서는 단순화시킨 랜덤모션 모델과 파동역학 수치법을 사용하여 랜덤매질을 통과한 광파의 광도변동을 시뮬레이션하는 방법을 제시하고, 2차원 가우시안 랜덤매질에 대해 시뮬레이션한 결과를 이론치 또는 H-F 공식을 사용한 결과와 비교해 보았다.

파동역학 수치법은  $\xi$ 값에 따라 여러가지 형태의 근사가 가능하며, 주어진  $\xi$ 값에 대해 적절한 근사식을 사용하여 시뮬레이션한 결과는 이론치(위상스크린) 및 H-F 공식에 의한 결과(광역매질)와 잘 일치하였다.

파동역학 수치법의 장점은 단순화 모델을 사용할 수 없는 경우 일반 모델에 대해서도 적용시킬 수 있다는 데 있다(H-F 공식은 이 경우에는 사용할 수 없다). 본 논문의 알고리즘을 실제의 굴절율 스펙트럼(예컨대, Kolmogorov 스펙트럼), 또는 3차원 문제에 적용시키는 것은 어렵지 않으나 계산시간이 많이 소요된다.

부 록

본 논문의 이산화는

$$I \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_n \exp[-(x-n\Delta x)^2/2\Delta^2 x] \tag{1}$$

에 근거를 두고 있다<sup>[13]</sup>. 이것을 첫번째 층을 통과한 직후의 WDF,

$$F_0^+(x_0, \theta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\theta_1 s} e^{i\theta_0(x_0, s)} \tag{2}$$

에 적용시키면 이산화된 WDF는

$$F_0^+(x_0, \theta_1) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i h_1(x_0, s)} e^{-i k s (\theta_1 - \tilde{\theta}_1(x_0))} G(x_0 - n \Delta x) \quad (3)$$

로 주어진다. 여기서  $\tilde{\theta}_1(x) = d\delta\phi(x)/kdx$ ,  $G(x) = \exp(-x^2/2\Delta x^2)$ 을 나타낸다.  $\Delta x$ 가 충분히 적을 경우 가우시안 함수  $G(x_0 - n\Delta x)$ 의 폭도  $n\Delta x$ 를 중심으로 하여 매우 좁기 때문에

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_1(x_0) &\approx \tilde{\theta}_{n1} + (x_0 - n\Delta x)\tilde{\theta}'_{n1} \\ h_1(x_0, s) &\approx h_{n1}(s) + (x_0 - n\Delta x)h'_{n1}(s) \end{aligned} \quad (4)$$

로 근사된다. 위 식에서  $\theta_{n1}$ ,  $\tilde{\theta}'_{n1}$ ,  $h_{n1}$ ,  $h'_{n1}$ 은 각각 광선 중심  $n\Delta x$ 에서의 함수 및 그 미분값이다. 식 (4)와 자유 공간 전파에 대한 식 (16)(광선의 중심에 대해서도 동일식 적용)을 사용하면

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \theta_1) &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i(h_{n1}(s) + h'_{n1}(s)(X_1^n - D\Theta_1^n))} \\ &\times e^{-i k s (\theta_1 - \tilde{\theta}_1(x_1))} G(X_1^n - D\Theta_1^n) \\ &\equiv \sum_{n=1}^{NF} F_1^n(x_1, \theta_1) \end{aligned} \quad (5)$$

가 된다. 여기서  $X_1^n = x - n\Delta x$ ,  $\Theta_1^n = \theta_1 - \tilde{\theta}_{n2}$ 이다.

두번째 층을 통과한 직후의 WDF는

$$\begin{aligned} F_1^+(x_1, \theta_1) &= \frac{k}{2\pi n} \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{i h_2(x_1, s)} e^{-i k s (\theta_1 - \tilde{\theta}_2(x_1))} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\theta e^{i k \theta s} F_1^n(x_1, \theta) \end{aligned} \quad (6)$$

로 주어진다. 식 (4)에서와 마찬가지로  $n$ -번째 광선의 중심  $x_1^n = n\Delta x + D\Theta_1^n$ 에 대해  $\tilde{\theta}_2(x_1)$ 과  $h_2(x_1, s)$ 를 근사하고  $|D\Theta_1^n| \sim D\delta\theta_{rms}^{(1)} \ll 1$ 인 경우  $\tilde{\theta}_2(x_1^n) \approx \tilde{\theta}_2(n\Delta x) = \tilde{\theta}_{n2}$  ( $\tilde{\theta}_2'$ ,  $h_2$ ,  $h_2'$ 에 대해서도 마찬가지로)로 근사할 수 있으므로

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_2(x_1) &\approx \tilde{\theta}_{n2} + (X_1^n - D\Theta_1^n)\tilde{\theta}'_{n2}(s) \\ h_2(x_1, s) &\approx h_{n2}(s) + (X_1^n - D\Theta_1^n)h'_{n2}(s) \end{aligned} \quad (7)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 위 식과  $x_1^n = X_2^n - D\Theta_2^n$ 를 식 (6)에 대입하면  $F_2(x_2, \theta_2)$ 를 구할 수 있고, 이 과정을 반복

하여  $F_L(x, \theta)$ 를 구하고  $k\theta$ 에 대해 적분하면 식 (19)와 같은 광도에 대한 표현식을 얻을 수 있다.

参 考 文 献

[ 1 ] V.I. Tatarski, *The effects of the turbulent atmosphere on wave propagation*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1971(available as document TT 68-50464 from U.S. Dept. of Commerce, NTIS, Springfield, VA 22151).

[ 2 ] A. Ishimaru, *Wave propagation and scattering in random media*, vol. 2, Academic Press, 1978.

[ 3 ] R.L. Fante, "Electromagnetic beam propagation in turbulent media(Review)," *Proc. IEEE*, vol. 63, pp. 1669-1692, 1975.

[ 4 ] R.L. Fante, "Electromagnetic beam propagation in turbulent media: An update(Review)," *Proc. IEEE*, vol. 68, pp. 1424-1443, 1980.

[ 5 ] I.G. Yakushikin, "Intensity fluctuations during small-angle scattering of wave fields(Review)," *Radiofiz.*, vol. 28, pp. 535-565, 1985.

[ 6 ] R. Buckley, "Diffraction by a random phase-changing screen: A numerical experiment," *J. Atmos. Terr. Phys.*, vol. 37, pp. 1431-1446, 1975.

[ 7 ] D.L. Knepp, "Multiple phase-screen calculation of the temporal behavior of stochastic waves," *Proc. IEEE*, vol. 71, pp. 722-737, 1983.

[ 8 ] C.L. Rino and J. Owen, "Numerical simulation of intensity scintillation using the power law screen model," *Radio Sci.*, vol. 19, pp. 891-908, 1984.

[ 9 ] S.M. Flatte and F. D. Tappert, "Calculation of the effects of internal waves on oceanic sound transmission," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 58, pp. 1151-1159, 1975.

[ 10 ] R. H. Hardin and D. F. Tappert, "Applications of the split-step-Fourier method to the numerical solution of nonlinear and variable coefficient wave equations," *SIAM Rev. (chronicle)*, vol. 15, pp. 423, 1973.

[ 11 ] D. A. de Wolf, "A random-motion model of fluctuations in nearly transparent medium," *Radio Sci.*, vol. 18, pp. 132-142, 1983.



- [12] D. A. de Wolf and J. K. Pack, "Wave-kinetic numerical approach to propagation of optical beams," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 3, pp. 532-535, 1986.
- [13] J. K. Pack and D. A. de Wolf, "Wave-kinetic numerical approach to propagation of optical beams II: Two canonical problems," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 3, pp. 1766-1771, 1986.
- [14] F. D. Tappert, "Derivation of the collisionless wave kinetic equation," *SIAM Rev. (chronicle)*, vol. 13, pp. 281, 1971.
- [15] F. D. Tappert and I. M. Besieris, "Stochastic wave kinetic equation and its application to wave packet spreading," *URSI Symp. on Electromagnetic Wave Theory, Tbilisi, USSR, Izdatel'stro Nauka, Sibirskoe Otdelenie, Novosibirsk, SSR*, pp. 230-234, 1971.
- [16] E. Jakeman and J. G. McWhirter, "Correlation function dependence of the scintillation behind a deep random phase screen," *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 10, pp. 1559-1643, 1977.
- [17] S. Frankenthal, M. J. Beran, and A. M. Whitman, "Caustic correction using coherent theory," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 71, pp. 1142-1149, 1976.

---

 著者紹介
 

---



白定基 (正會員)

1954年 3月 30日生. 1978年 2月 서울대학교 전자공학과 졸업. 1985年 9月 Virginia Tech 전기공학과 공학석사. 1988年 9月 Virginia Tech 전기공학과 공학박사. 1978年 3月~1983年 2月 국방과학연구소 연구원. 1988年 10月~1989年 2月 한국전자통신연구소 선임연구원. 1989年 3月~현재 동아대학교 전자공학과 조교수. 주 관심분야는 전파 전파, 수치전자기학, 광집적회로 등임.