

## 구배행렬법에 의한 복소 유전율 및 투자율의 결정

### (Determination of Complex Permittivity and Permeability by a Gradient Matrix Method)

全中昌\*, 朴位相\*

(Joong Chang Chun and Wee Sang Park)

#### 要 約

반사투과법에 구배행렬 수치해석 기법을 적용하여 초고주파 물질의 복소 비유전율과 비투자율을 동시에 결정하는 기법을 제안하였다. 이 기법은 부적절한 시료 길이에 따른 위상 모호성을 갖지 않으며, 반파장 길이의 저손실 물질의 측정에도 적용될 수 있다. 동축케이블 시료에 대한 구배행렬을 유도하였고 이에 의한 계산 결과를 보였다.

#### Abstract

A gradient matrix method in conjunction with the transmission-reflection method to determine the complex permittivity and permeability of a microwave material is presented. This method does not incur the phase ambiguity due to an improper sample length, and is applicable to the measurement of low-loss materials of a half wavelength. A gradient matrix for a coaxial cable sample is derived, and the results are illustrated.

#### I. 서 론

초고주파 대역에서 유전물질은 초고주파 가열, 비파괴 시험, 유전체 공진기, 전자파의 생체효과, 그리고 전파흡수와 차폐 등에 응용되고 있으며 점점 더 그 범위가 넓어지고 있다. 이를 위하여는 초고주파 대역에서의 물질상수, 즉 비유전율과 비투자율을 정확하게 측정할 필요가 있다.

물질상수 측정기법으로는 측정 시스템이 비교적 간단하고 넓은 주파수 범위에서 측정이 가능한 반사투과법

(transmission-reflection method)이 많이 사용되고 있다. 시간영역에서의 반사투과법이 Nicolson과 Ross<sup>[1]</sup>에 의하여 처음으로 제안되었으며, 그 후 Weir<sup>[2]</sup>에 의하여 주파수영역에 대한 기법이 발표되었다. 현재까지도 Nicolson-Ross-Weir 방법이 널리 쓰이고 있으며, 이 방법에서는 복소 비유전율과 복소 비투자율을 산란계수의 함수로 표현하여 측정된 산란계수로부터 물질상수를 해석적(analytic)으로 계산한다.<sup>[3]</sup> 그러나 이 방법은 계산수식은 간단하지만 저손실 물질의 측정에는 부적합하며,<sup>[3][4]</sup> 특히 시료 길이가 관내 파장(guided wavelength)보다 길어지면 phase ambiguity가 발생하여 group delay를 측정 및 계산하여 phase를 보정하여야 한다.<sup>[2]</sup> 이 phase ambiguity를 피하기 위하여 주로 관내 파장의 1/4 길이인 시료가 사용되어 왔다.<sup>[3]</sup>

최근에 이런 문제점을 해결하기 위하여 더욱 개선된 수치해석적 기법이 Baker-Jarvis 등<sup>[5]</sup>에 의하여 제시되었다. 즉 이들은 Nicolson-Ross-Weir 방법에서 유도된

\*正會員, 浦項工科大学 電子電氣工學科

(Dept. of Electronic and Electrical Eng., Pohang Institute of Science and Technology)

接受日字: 1992年 6月 5日

(※이 연구는 산업과학기술연구소와 국방과학연구소의 연구비 지원으로 수행되었음.)

수식을 서로 조합하여 새로운 수식들을 도출하고 여기에 Newton-Raphson 수치해석 기법을 적용함으로써 시료 길이에 제한없이 물질상수를 계산할 수 있음을 보였다. 그리고 오차해석을 통하여 관내 반파장의 시료 길이에서 측정오차가 최소임을 보였다. 또한 저손실 물질의 측정에서는 시료 길이가 관내 반파장의 정수 배인 주파수에서 Nicolson-Ross-Weir 방법의 해가 발산함을 보였다. 그러나 Baker-Jarvis 방법에서도 복소 비유전율과 복소 비투자율을 동시에 계산할 경우 시료 길이가 관내 반파장의 정수배로 되는 주파수에서 알고리즘이 불안정하며 이때문에 비투자율이 1인 비자성체에 대하여만 적용할 수 있었다.

따라서 임의의 시료 길이, 특히 관내 반파장의 길이에서, 복소 비유전율과 비투자율을 동시에 계산할 수 있는 기법이 요구되고 있다. 본 연구에서는 Nicolson-Ross-Weir의 수식에 직접 구배행렬법 (gradient matrix method)을<sup>[6][7]</sup> 적용하여 동축케이블 또는 구형도파관에 부터 복소 비유전율과 복소 비투자율을 동시에 계산하는 방법을 보였다.

II. 반사투과법의 이론

반사투과법은 반사 산란계수  $S_{11}$ 과 투과 산란계수  $S_{21}$ 을 측정함으로써 복소 비유전율  $\epsilon_r$ 과 복소 비투자율  $\mu_r$ 을 계산하는 방법이다. 그림1은 길이  $d$ 의 시료로 채워진 동축 케이블 또는 구형 도파관을 나타낸다. 구역 I, II, III에서의 전계식은 다음과 같이 표현할 수 있다.<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} E_I &= \exp(-\gamma_0 x) + C_1 \exp(\gamma_0 x) \\ E_{II} &= C_2 \exp(-\gamma x) + C_3 \exp(\gamma x) \\ E_{III} &= C_4 \exp(-\gamma_0 x) + C_5 \exp(\gamma_0 x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서  $\gamma = j\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2}$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= j\sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2} \\ \epsilon &= \epsilon_r \epsilon_0 = (\epsilon' - j\epsilon'') \epsilon_0 \\ \mu &= \mu_r \mu_0 = (\mu' - j\mu'') \mu_0 \end{aligned} \quad (2)$$

이며,  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$ 는 각 주파수를,  $\lambda_c$ 는 차단 파장을,  $\epsilon_0$ 와  $\mu_0$ 는 진공의 유전율과 투자율을,  $\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon''$ 와  $\mu_r = \mu' - j\mu''$ 는 시료의 복소 비유전율과 복소 비투자율을 나타낸다. 자계에 관한 식은 Maxwell 방정식으로부터 유도할 수 있으며, 경계면 A와 B에서 경계조건을 이용하면 상수  $C_1 \sim C_5$ 를 구할 수 있다. 측정 기준면(reference plane)을 A, B로 변환하여 식 1, 2로부터 산란계수를

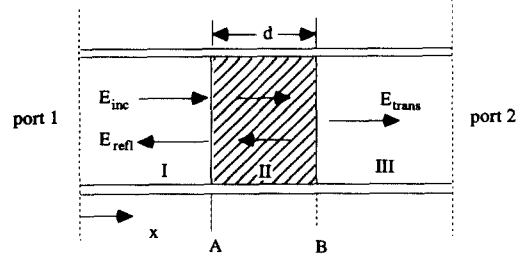


그림 1. 시료가 장착된 동축케이블 또는 구형도파관  
Fig. 1. Coaxial or rectangular waveguide sample holder filled with material.

유도하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$S_{11} = S_{22} = \frac{\Gamma(1 - T^2)}{1 - T^2 \Gamma^2} \quad (3)$$

$$S_{21} = S_{12} = \frac{T(1 - \Gamma^2)}{1 - T^2 \Gamma^2} \quad (4)$$

여기서  $\Gamma$ 는  $d = \infty$ 일 때의 반사계수를  $T$ 는 시료 길이  $d$ 에 대한 전달계수를 나타내며, 각각 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\frac{\gamma_0}{\mu_0} - \frac{\gamma}{\mu}}{\frac{\gamma_0}{\mu_0} + \frac{\gamma}{\mu}} \\ T &= e^{-\gamma d} \end{aligned} \quad (5)$$

특히, sample holder가 동축 케이블일 경우  $\lambda_c = \infty$  이므로 식5는 아래의 식 6과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sqrt{\mu_r} - \sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{\mu_r} + \sqrt{\epsilon_r}} \\ T &= e^{-j\omega \sqrt{\mu \epsilon} d} \end{aligned} \quad (6)$$

Nicolson-Ross-Weir의 계산식은 식 3,4,5로부터 다음과 같이 주어진다.<sup>[2][3]</sup>

$$\begin{aligned} \mu_r &= \frac{1 + \Gamma}{A(1 - \Gamma) \sqrt{\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}}} \\ \epsilon_r &= \frac{\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}\right) \lambda_0^2}{\mu_r} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서  $A = \left(\frac{j}{2\pi d} \ln T\right)^{-1}$ 로 정의되고, 관내파장  $\lambda_g$ 는  $\lambda_g^{-1}$

= (Real[A])<sup>-1</sup>로 주어진다. 이에 관한 상세한 내용은 참고문헌 [2]에 잘 언급되어 있다.

III. Gradient method 및 적용 예

식3과 4의 해를 구하기 위하여, 먼저  $\epsilon_r$ 과  $\mu_i$ 의 초기값을 아래와 같이 벡터  $\vec{Y}_0$ 로 지정한다.

$$\vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} \epsilon'_r \\ \epsilon''_r \\ \mu'_i \\ \mu''_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

이  $\vec{Y}_0$ 에서 산란계수에 관한 error vector  $\Delta \vec{S}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta \vec{S} = \begin{bmatrix} S_{11r}^{(m)} - S_{11r}^{(c)} \\ S_{11i}^{(m)} - S_{11i}^{(c)} \\ S_{21r}^{(m)} - S_{21r}^{(c)} \\ S_{21i}^{(m)} - S_{21i}^{(c)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

여기서 위 첨자 m과 c는 산란계수의 측정값과 계산값을, 아래 첨자 r과 i는 산란계수의 실수부와 허수부를 각각 의미한다. 이  $\Delta \vec{S}$  벡터에서 아래와 같이  $\Delta \vec{Y}$  벡터를 도입한다.

$$\Delta \vec{S} = [G] \Delta \vec{Y} \tag{10}$$

여기서는 [G]는 복수  $\epsilon_r - \mu_i$  공간에서 기울기를 나타내는 구배행렬로서 식 11과 같이 주어지며,  $\Delta \vec{Y}$  벡터는  $\epsilon_r$ 과  $\mu_i$ 의 미소 변위를 나타내는 식 12로써 정의된다.

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial S_{11r}}{\partial \epsilon'_r} & \frac{\partial S_{11r}}{\partial \epsilon''_r} & \frac{\partial S_{11r}}{\partial \mu'_i} & \frac{\partial S_{11r}}{\partial \mu''_i} \\ \frac{\partial S_{11i}}{\partial \epsilon'_r} & \frac{\partial S_{11i}}{\partial \epsilon''_r} & \frac{\partial S_{11i}}{\partial \mu'_i} & \frac{\partial S_{11i}}{\partial \mu''_i} \\ \frac{\partial S_{21r}}{\partial \epsilon'_r} & \frac{\partial S_{21r}}{\partial \epsilon''_r} & \frac{\partial S_{21r}}{\partial \mu'_i} & \frac{\partial S_{21r}}{\partial \mu''_i} \\ \frac{\partial S_{21i}}{\partial \epsilon'_r} & \frac{\partial S_{21i}}{\partial \epsilon''_r} & \frac{\partial S_{21i}}{\partial \mu'_i} & \frac{\partial S_{21i}}{\partial \mu''_i} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\Delta \vec{Y} = \begin{bmatrix} \Delta \epsilon'_r \\ \Delta \epsilon''_r \\ \Delta \mu'_i \\ \Delta \mu''_i \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서  $\Delta \vec{Y}$ 를 식 10으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta \vec{Y} = [G]^{-1} \Delta \vec{S} \tag{13}$$

[G]<sup>-1</sup>은 [G]의 역행렬을 나타낸다. 마지막으로 식13으로부터  $\epsilon_r$ 과  $\mu_i$ 에 관한 새로운 벡터  $\vec{Y}_1$ 을 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\vec{Y}_1 = \vec{Y}_0 + \begin{bmatrix} \alpha_1 \Delta \epsilon'_r \\ \alpha_2 \Delta \epsilon''_r \\ \alpha_3 \Delta \mu'_i \\ \alpha_4 \Delta \mu''_i \end{bmatrix}, 0.5 \leq \alpha_i \leq 0.8 \tag{14}$$

여기서  $\alpha_i$ 는 해의 수렴성을 향상시키기 위한 상수이다. 이상의 과정을  $\|\Delta \vec{S}\|^2 \leq 10^{-10}$ 이 될 때까지 반복한다.  $\|\Delta \vec{S}\|$ 는  $\Delta \vec{S}$  벡터의 Euclidian norm을 의미한다.

동축 케이블 sample holder에 대한 [G]를 계산하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{\beta r}}{\partial z'_r} &= \frac{\partial S_{\beta i}}{\partial z''_r} = \text{Real} \left[ \frac{\partial S_{\beta}}{\partial z_r} \right] \\ \frac{\partial S_{\beta i}}{\partial z'_r} &= -\frac{\partial S_{\beta r}}{\partial z''_r} = \text{Imag} \left[ \frac{\partial S_{\beta}}{\partial z_r} \right] \end{aligned} \tag{15}$$

여기서  $\beta=11$  또는  $21; z_r = z'_r - jz''_r, z = \epsilon$  또는  $\mu$ 이다. 그리고 편미분에 의한 식들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial \epsilon_r} &= \frac{\left\{ (1 - T^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon_r} - 2T\Gamma \frac{\partial T}{\partial \epsilon_r} \right\} (1 - T^2 \Gamma^2)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \\ &\quad + \frac{2T\Gamma^2 (1 - T^2) \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial \epsilon_r} + T \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon_r} \right)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{11}}{\partial \mu_i} &= \frac{\left\{ (1 - T^2) \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_i} - 2T\Gamma \frac{\partial T}{\partial \mu_i} \right\} (1 - T^2 \Gamma^2)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \\ &\quad + \frac{2T\Gamma^2 (1 - T^2) \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial \mu_i} + T \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_i} \right)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{21}}{\partial \epsilon_r} &= \frac{\left\{ (1 - \Gamma^2) \frac{\partial T}{\partial \epsilon_r} - 2T\Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon_r} \right\} (1 - T^2 \Gamma^2)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \\ &\quad + \frac{2T^2 \Gamma (1 - \Gamma^2) \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial \epsilon_r} + T \frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon_r} \right)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{\partial S_{21}}{\partial \mu} = \frac{\left\{ (1 - T^2) \frac{\partial T}{\partial \mu} - 2T\Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right\} (1 - T^2 \Gamma^2) + 2T^2 \Gamma (1 - T^2) \left( \Gamma \frac{\partial T}{\partial \mu} + T \frac{\partial \Gamma}{\partial \mu} \right)}{(1 - T^2 \Gamma^2)^2} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \epsilon_r} = \frac{-\frac{\sqrt{\mu_r}}{\sqrt{\epsilon_r}}}{(\sqrt{\mu_r} + \sqrt{\epsilon_r})^2} \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \epsilon_r} = \frac{-jk_0 d \sqrt{\mu_r}}{2\sqrt{\epsilon_r}} T \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \mu_r} = \frac{\frac{\sqrt{\epsilon_r}}{\sqrt{\mu_r}}}{(\sqrt{\mu_r} + \sqrt{\epsilon_r})^2} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \mu_r} = \frac{-jk_0 d \sqrt{\epsilon_r}}{2\sqrt{\mu_r}} T \quad (23)$$

이상의 절차를 이용하여 페라이트 시료의 물질상수를 측정할 예를 그림2에 도시하였다.  $\epsilon_r$ 과  $\mu_r$ 의 허수 부분은 실제 흡수이지만 편의상 양수화하여 나타내었다. 회로망 분석기 HP8510B를 사용하여 산란계수  $S_{11}$ 과  $S_{21}$ 을 측정하였으며, HP BASIC/WS(Ver.5.1)으로써 gradient method 알고리즘을 프로그램하였다.

Sample holder로는 7mm Air Line(Maury, 2653H)을 사용하였으며, 시료의 길이는 14.017mm이다. 측정할 주파수 범위는 4.0GHz-12.5GHz이며, 관내 파장은 4.0GHz에서 21.1mm, 12.5GHz에서 9.7mm이다. 이 결과는 Nicolson-Ross-Weir 방법을 사용하여 phase ambiguity를 보정한 결과와 일치한다. 이 시료는 손실 탄젠트가 8GHz에서 0.62로서 손실이 큰 물질에 속한다.

알고리즘의 안정성과 수렴성을 확인하기 위하여 저손실 물질( $\epsilon_r = 10 - j0.02$ ,  $\mu_r = 2 - j0.01$ ,  $d = 25\text{mm}$ )과 비유전율과 비투자율의 크기가 매우 큰 물질( $\epsilon_r = 100 - j100$ ,  $\mu_r = 100 - j100$ ,  $d = 5\text{mm}$ )에 대하여 산란계수를 식 3과 4에 의하여 생성시켜 이 알고리즘을 적용시킨 결과 초기값이 참값의 10~20% 이내로 주어지면 처음에 가정한  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  값을 정확하게 잘 찾음을 확인하였다. 또한 수렴속도가 매우 빨라서 10회 이내의 반복으로 해를 구하였다.

측정하고자 하는 대역의 첫 주파수에서 시료 길이가  $\lambda_g$ 보다 짧을 경우에는 먼저 식7에 보인 Nicolson-Ross-Weir 방법으로 복소 비유전율과 비투자율을 계산하여 gradient method의 초기값으로 쓸 수 있다. 그 다음 주

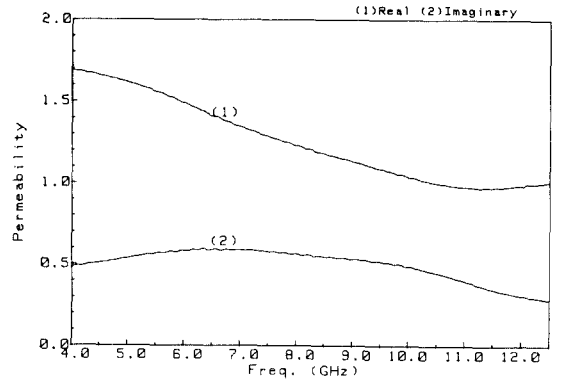
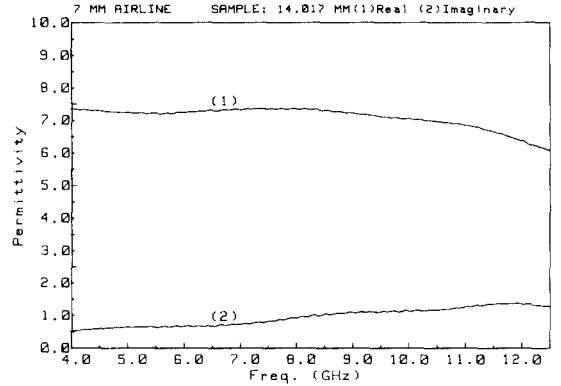


그림 2. 페라이트 시료의 측정 결과(C, XC, X 밴드)  
Fig. 2. Measurement results of a ferrite sample for C, XC, and X bands.

파수에서부터는 바로 앞에서 계산된 값을 초기치로 이용한다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 Nicolson-Ross-Weir 수식에 직접 구배행렬법을 적용하여 복소 비유전율과 비투자율을 동시에 결정할 수 있는 기법을 제시하였다. 본 논문의 방법은 시료 길이와 측정 기준면이 알려졌을 때 회로망분석기의 산란계수 측정 오차 범위 이내에서 시료의 길이와 측정대역에 제한 없이 물질상수를 정확하게 계산할 수 있게 한다. 이 방법은 시료 길이가  $\lambda_g$ 보다 더 길 경우에도 phase ambiguity를 갖지 않으므로 group delay의 측정을 필요로 하지 않는다. 또한 이 기법은 저손실 물질의 측정에서도 해가 발산하지 않으며,  $\lambda_g/2$  두께의 시료를 사용함으로써 측정 오차를 최소화 할 수 있다.

#### 參 考 文 獻

- [1] A.M.Nicolson and G.F.Ross, "Measurement of the intrinsic properties of materials by time-domain techniques," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-19, pp. 377-382, Nov. 1970.
- [2] W.B.Weir, "Automatic measurement of complex dielectric constant and permeability at microwave frequencies," *IEEE Proc.*, vol. 62, pp. 33-36, Jan. 1974.
- [3] Hewlett-Packard. "Measuring dielectric constant with the HP 8510 network analyzer." *Hewlett-Packard Product Note 8510-3*.
- [4] S.S.Stuchly and M.Matuszewski, "A combined total reflection-transmission method in application to dielectric spectroscopy," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. IM-27, pp. 285-288, Sept. 1978.
- [5] J.Baker-Jarvis, E.J.Vanzura, and W.A.Kissick, "Improved technique for determining complex permittivity with the transmission/reflection method," *IEEE Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, pp. 1096-1103, Aug. 1990.
- [6] N.Belhadj-Tahar, A.Fourrier-Lamer, and H.Chanterac, "Broad-band simultaneous measurement of complex permittivity and permeability using a coaxial discontinuity," *IEEE Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, pp. 1-7, Jan. 1990.
- [7] E.Polak, *Computational methods in optimization*, Academic Press, 1971.

---

 著 者 紹 介
 

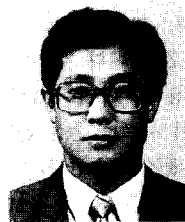
---



全 中 昌(正會員)

1961年 3月 3日生. 1984年 경북대학교 공과대학 전자공학과 졸업. 1991년 포항공과대학 전자전기공학과 졸업(석사과정). 1991년~현재 포항공과대학 전자전기공학과 박사과정. 주관심분야는 마이크로

파 소자 모델링 및 수치적 해석, 전자파의 응용, 마이크로파 회로 및 안테나 설계 등임.



朴 位 相(正會員)

1952年 2月 27日生. 1974年 서울대학교 공과대학 전자공학과 학사. 1982年 미국 위스칸신대학교 대학원 전기공학 석사. 1986年 동 대학원 전기공학 박사. 1986년~1988年 미국 워치타 주립대학교 객원

조교수. 1988年 5月~현재 포항공과대학 전자전기공학과 조교수 및 부교수. 주관심분야는 전자기학, 마이크로파공학, 광섬유 센서공학 등임.