論文92-29B - 7 - 10

퍼지제어기의 함수 구현능력에 대한 연구

(A Study on the Function Generating Capability of the Fuzzy Controllers)

李 志 弘*, 鄭 秉 炫**, 蔡 錫*, 吳 英 碩*

(Ji Hong Lee, Byoung Hyun Chung, Seog Chae, and Young Seok Oh)

要 約

퍼지제어기 내부의 데이타 및 정보의 처리 방법 자체가 다른 제어이론과 많이 다른것은 사실이지만 궁극적으로 퍼지제어기가 수행하는 내용은 궁극적으로 f : A⊂R^n→R^m의 함수로 표현될 수 있다. Mamdani의 직접 추론법과 무게중심에 의한 defuzzification 방법을 사용하는 퍼지제어기가 임의의 함수를 구현할 수있는 충분조건에 대해 조사하였다. 주로 f : R^1→R^1과 g : R^2→R^1의 경우를 중점적으로 분석하였으며 분석결과를 MIMO 시스템으로 확장할 수 있음을 보였다.

Abstract

Fuzzy controllers have been successfully applied to many cases to which conventional control algorithms are difficult to be applied. Even though the representations and the processings of data and information in the fuzzy controller are quite different from those in other control algorithms, the information processing operation that it carries out is basically a function $f: A \subset R^n \rightarrow R^m$, from a bounded subset A of an n-dimensional Euclidean space to a bounded subset f[A]of an m-dimensional Euclidean space, where n and m are the number of measured states and the number of control inputs of the controlled system, respectively. Under the assumptions of Mamdani's direct reasoning method and C.O.G.(center of gravity) defuzzification method, the fuzzy controllers are proven to perform the mapping of any given functions f with appropriately defined fuzzy sets. The mapping capabilities of fuzzy controllers are analyzed in detail for two cases; $f: R^1 \rightarrow R^1$ and $g: R^2 \rightarrow R^1$. Also, it will be shown that the results can be extended to multiple dimensional cases.

I. 서 론

퍼지이론의 제어문제에의 응용의 기원은 Zadeh[1]의 연구와 Chang과 Zadeh[2]의 연구에 있으며 그 이후 많은 연구가 진행되어왔고[3,4,5] 또한 많은 응용사례가 발표되고 있다.[6,7] 전형적인 퍼지제어기의 두 경우가 그림1과 그림2에 나타나있는데. 두 경우 모두 제어대상 시스템의 상태변수를 측정하여 퍼지 데이타 처리방법에 의해 제어입력을 계산하고 있다.

퍼지제어기를 연구하는 많은 사람들의 연구가 어떻게 하면 퍼지집합이나, 추론법칙, defuzzification 방법 및 지식베이스 구축등을 효과적으로 구성, 조합하여 만족스러운 퍼지제어기를 만들어내느냐 하는 것이었다. 그런데, 그림 1,2의 구조를 살펴보면, 퍼지제어기는 그 내부의 퍼지고유의 정보처리 방법에도 불구하고, 궁극적으로 f : E⊂R^1→R^1과 g : D⊂R^2→R^1의 crisp한 함수로 그 기능이 표현됨을 알 수 있다. 여기서 R^1과 R^2는 각각 1차원 및 2차원의 Euclidean공간이다.

*正會員, 金烏工科大學 電子制御工學科
(Dept. of Elec. Control and Eng., Kumoh Nat'l Univ.)
**正會員, 韓國電子通信研究所
(Electronic Telecommunication Research Institute)
接受日字 : 1992年 1月 20日

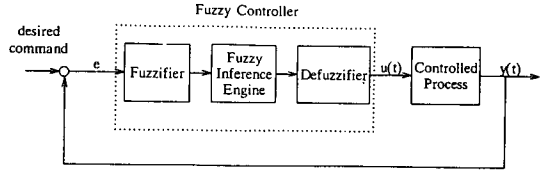


그림 1. 퍼지 궤환 제어기(경우 1)
Fig. 1. A fuzzy feedback controller(case1).

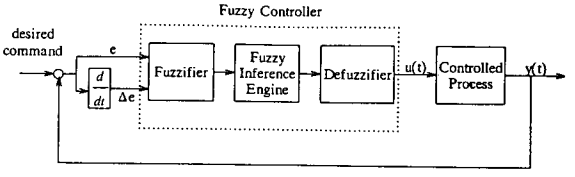


그림 2. 퍼지 궤환 제어기(경우2)
Fig. 2. A fuzzy feedback controller(case2).

이때 자연스러운 의문이 발생하는데 그 의문은, "과연 퍼지제어가 어떤 함수라도 구현해 낼 수 있겠는가?," 또는 "여러 설계요소의 변화에 의해 퍼지제어기가 구현하는 함수공간(function space)이 Compact한가" 하는 것이다. 본논문의 목적은 이런 의문에 대해 분석하는 것이다.

본 논문에서는 주로 그림1,2의 $f: E \subset R^1 \rightarrow R^1$과 $g: D \subset R^2 \rightarrow R^1$의 두 경우에 대해 분석해 보겠다. 주어진 어떤 함수도 구현할 수 있는 퍼지제어기와 그 내부의 설계요소(membership function, inference rules, defuzzification 방법)가 존재함을 증명하기 위해 첫째, 함수의 정의역을 적당히 분할하고, 둘째, 각 분할된 영역에서의 함수 부분을 구현할 수 있는 설계요소가 존재하며, 셋째, 그 결과를 전 정의역에 확장하는 방법을 택하였다. 이후로 그림1 및 2의 제어기를 경우 1, 경우 2의 제어기라고 부르기로 한다.

2절에서는 경우 1퍼지제어기의 구조를 정의하고 이 구조의 함수구현능력에 대해 분석하고 예제를 다룬다. 3절에서는 같은 순서로 경우 2의 퍼지제어기에 대해 분석하고, 4절과 5절에서 검토와 결론을 기술한다.

Ⅱ. 경우 1의 퍼지제어기

이절에서는 그림 1의 퍼지제어기에 대해 분석한다. 내부의 구조에 대해 2-A 절에서 정의하고 이 구조의 제어기의 함수구현 능력에 대해 분석하며, 2-B에서 예를 들어 설명하겠다.

A. 모델

그림 1에서 보인 바와 같이 경우 1의 퍼지제어기는 실함수 f를 실행한다.

$$f: E \rightarrow U,\ E \subset R^1,\ U \subset R^1 \qquad (1)$$

여기서 R^1은 1차원 Euclidean 공간이고 E과 U는 e과 u를 원소로 갖는 universe이다. E에서의 퍼지 집합 $\tilde{A}$는

$$\tilde{A} = \int_E \mu_{\tilde{A}}(e)/e \qquad (2)$$

로, 그리고 U에서의 퍼지집합 $\tilde{B}$는

$$\tilde{B} = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{B}}(u_i)/u_i \qquad (3)$$

로 표시한다. 또한 Mamdani의 직접 추론법과 C. O. G (center of gravity) defuzzification 퍼지제어기를 가정한다. 그러면 다음과 같은 퍼지제어기의 성질이 정리된다.

보조정리 1 :

(1)로 표시되는 함수 f가 주어져있다고 하자. 그러면, f가 단조증가 또는 단조감소함수이면 (2)꼴의 convex한 연속 퍼지집합들과 (3)꼴의 이산 퍼지집합에 의해 f를 오차없이 구현하는 퍼지제어기가 존재한다.

증명 :

먼저 f가 E에서 단조 감소함수인 경우를 가정하자. 그리고 E를 $[e_r, e_v]$로 표시하자. 그러면, $f(e_r)$과 $f(e_v)$는 각각 E에서 f의 최대값과 최소값이 된다. 그리고 다음과 같은 제어규칙을 생각하자.

$$If\ e\ is\ \tilde{E}_r,\ then\ u\ is\ \tilde{U}_r \qquad (4)$$

$$If\ e\ is\ \tilde{E}_v,\ then\ u\ is\ \tilde{U}_v \qquad (5)$$

여기서 각 퍼지집합은 다음과 같이 정의한다.

$$\tilde{E}_r = \int_E \mu_{\tilde{E}_r}(e)/e \qquad (6)$$

$$\tilde{E}_v = \int_E \mu_{\tilde{E}_v}(e)/e \qquad (7)$$

$$\tilde{U}_r = \mu_{\tilde{U}_r}(u_r)/u_r = 1.0/\mu_r \qquad (8)$$

$$\tilde{U}_v = \mu_{\tilde{U}_v}(u_v)/u_v = 1.0/u_v \qquad (9)$$

이상의 정의와 Mamdani의 직접추론법, C. O. G. defuzzification방법에 의해 제어입력은

$$u(e)=\frac{\mu_{\tilde{E}_r}(e)\mu_r+\mu_{\tilde{E}_v}(e)u_v}{\mu_{\tilde{E}_r}(e)+\mu_{\tilde{E}_v}(e)},\quad e\in E \tag{10}$$

로 주어진다. $f(e_r)$과 $f(e_v)$를 u_r과 u_v로 대치하고 $\mu_{\tilde{E}_r}$과 $\mu_{\tilde{E}_v}$를

$$\mu_{\tilde{E}_r}(e)=\frac{f(e)-f(e_v)}{f(e_r)-f(e_v)} \tag{11}$$

$$\mu_{\tilde{E}_v}(e)=\frac{f(e_r)-f(e)}{f(e_r)-f(e_v)} \tag{12}$$

로 하면

$$u(e)=f(e),\ e\in E \tag{13}$$

를 얻는다. 또한, $\tilde{E}_r$과 $\tilde{E}_v$가 convex 퍼지집합이며 최대값 1최소값 0을 가짐을 쉽게 알 수 있다. 단조 증가 함수인 경우에도 증명 과정이 근본적으로 위의 설명과 같으므로 여기서는 생략한다.

(10)의 계산과정을 그림 3에 도식적으로 나타내었다 이 과정을 살펴보면, i)측정된 e의 값 e_0으로 두 개의 e 공간에서의 멤버쉽함수($\tilde{E}_r$, $\tilde{E}_v$)의 높이, 즉 feasibility를 계산한다. (오른편 아래 그림) ii)계산된 feasibility로 출력(u)공간에서의 fuzzy number ($\tilde{u}_r$, $\tilde{u}_v$) 의 weight(높이)로 회전시킨다. (왼편 아래 그림) iii) 계산된 높이에 의해 두 fyzzy singleton의 무게중심(u_0)을 구한다. (왼편 위 그림) iv)계산된 u_0와 맨 처음 측정된 e_0를 (e, u)공간에 대응시킨다.(오른편 위의 그림 v)이상의 과정을 $[e_r, e_v]$의 구간에 대해 수행하면 그림 3의 오른편 위의 그림과 같은 입출력 특성을 얻는다.

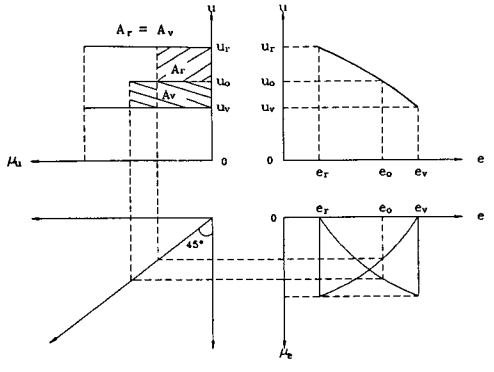


그림 3. 식(10)의 계산에 대한 도식적 해석
Fig. 3. Graphical interpretation of the calculation of (10).

이상의 결과를 일반적인 경우로 확장하면 다음으로 정리된다.

정리 1 :

(1) 꼴의함수 f가 주어져 있다고 하자. 그러면 (2)꼴의 convex한 연속 퍼지집합들과 (3)꼴의 이산 퍼지집합에 의해 f를 오차없이 구현하는 퍼지제어기가 존재한다.

증명 :

f가 정의역 E의 부분집합 E^k, k=1,2,…, N에서 단조변화(단조감소 또는 단조증가)하도록 E를 분할하자. E^k, k=1,2,…, N는

$$E=\bigcup_k E^k \tag{14}$$

$$E^i\cap E^j=\phi,\quad if\ i\neq j \tag{15}$$

을 만족하므로 각 E^k에 보조정리 1을 적용하면 증명이 완성된다.

B. 예제

2-A절에서 설명한 내용을 임의의 함수를 선택하여 구체적으로 기술하겠다. 그림 4와 같이 임의로 주어져있는 함수(사실은 숙련 조작자가 가지고 있는 어떤 의미에서의 최적의 제어 규칙)를 생각한다. 그리고 이를 u=f(e)로 표시하자. 어떻게 그 함수를 얻는가 하는 것이 설계에 관한 문제라면 여기서 다루는 것은 그 함수가 구현가능한가 하는가를 분석하는 해석에 관한 것임을 다시 한번 강조한다. f의 정의역이 E^k, k=1,2,…, 10의 부분집합으로 분할되었으며 f는 그 각각의 영역에서 단조증가 또는 단조감소함수이다. (그림 5) 그 각구간은 f가 단조 증가하는

$$E^{2i-1}=(e_v^i,\ e_r^i)\quad i=1,2,\cdots,5 \tag{16}$$

과 f과 단조감소하는

$$E^{2i}=(e_r^i,\ e_v^{i+1})\quad i=1,2,\cdots,5 \tag{17}$$

구간으로 구분할 수 있다. e_r, e_v, u_r, or u_v등의 표기에서 "ridge"과 "valley"의 처음 영문이 사용되었음을 부언한다. 그러면 측정된 값 e에 대해 membership의 정도는

$$\tilde{E}_r^k=\int_E \mu_{\tilde{E}_r^k}(e)/\,e \tag{18}$$

$$\mu_{\tilde{E}_r^k}(e)=\begin{cases}\dfrac{f(e)-f(e_v^k)}{f(e_r^k)-f(e_v^k)} & e\in E^{2k-1}\\ \dfrac{f(e)-f(e_v^{k+1})}{f(e_r^k)-f(e_v^{k+1})} & e\in E^{2k}\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{19}$$

에 의해 결정되며 퍼지집합 E_v^k는

$$\widetilde{E}_v^k = \int_E \mu_{\widetilde{E}_v^k}(e)/e \tag{20}$$

$$\mu_{\widetilde{E}_v^k}(e) = \begin{cases} \dfrac{f(e)-f(e_r^k)}{f(e_v^k)-f(e_r^k)} & e \in E^{2k-1} \\ \dfrac{f(e)-f(e_r^{k+1})}{f(e_r^k)-f(e_v^{k+1})} & e \in E^{2k} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{21}$$

로 정해진다. 앞 절에서의 방법으로 구해진 각 퍼지집합 $\widetilde{E}_r^i, i=1,2,\cdots,5$과 $\widetilde{E}_v^j, j=1,2,\cdots,5$는 그림 6에 나타내었다. 그림 6으로부터 각 퍼지집합은 convexity를 만족하며 최대값과 최소값을 1과 0으로 가짐을 쉽게 알 수 있다. 이상 구해진 퍼지집합으로 퍼지제어기는 주어진 함수 f를 정확히 구현할 수 있다.

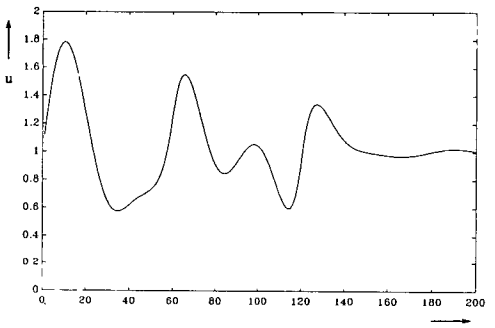


그림 4. 경우 1의 퍼지 제어기에 의해 재구성될 임의로 선택된 함수
Fig. 4. An arbitrarily chosen function to be reconstructed by case 1 fuzzy controoller.

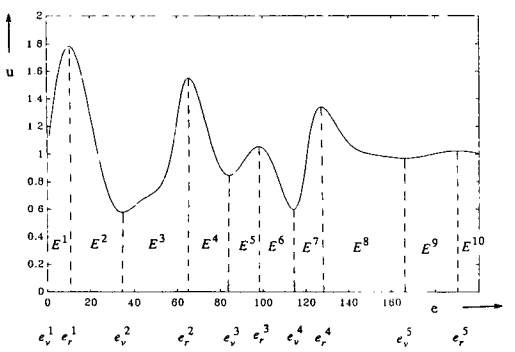


그림 5. 그림 4의 예제함수에 대해 분할된 영역
Fig. 5. Partitioned domains for the example function of Fig. 4.

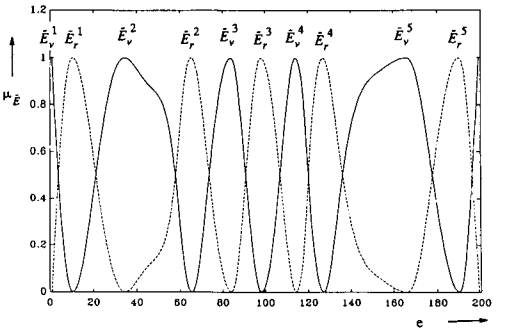


그림 6. 그림4의 예제함수에 대한 결과 퍼지집합
Fig. 6. Resultant fuzzy sets for the example function of Eig. 4.

Ⅲ. 경우 2퍼지제어기

이절에서는 그림 2에서 보인 경우 2의 퍼지제어기에 대해서 함수 구성능력에 대해서 기술하며 그 순서는 2절에서와 같다.

A. 모델

경우 2의 퍼지제어기는 입력 변수가 2개(2차원)인 것외에는 경우 1퍼지제어기와 다를 바 없다. 경우 2의 퍼지제어기가 수행하는 내용은

$$g : D \rightarrow U, D \subset R^2, U \subset R^1 \tag{22}$$

꼴의 함수로 표시된다. 여기서, R^1과 R^2는 각각 1,2차원 Euclidean 공간이다. 또한 편의상 D의 원소를 (e, $\dot{e}$)로 표시하기로 한다.

퍼지제어기의 내부 정보처리방법에 대해서 언급하기 전에 함수의 정의역에서 특별한 부분집합을 정의한다.

정의 1 :

주어진 (22)꼴의 함수 g에 대해, e과 $\dot{e}$에 대한 g의 편미분이 M안에서 부호 변화가 없으면 M을 g의 단조영역(monotonic region)이라 부른다.

이 단조영역의 물리적 의미는 전문가가 갖고 있는 제어 규칙을 적용하기 위해 입력공간을 분할한 입력의 양자화된 경우의 수를 의미한다. 이 단조영역은 항상 C 폐곡선으로 둘러 싸여있으며 C는 두개의 곡선 C_v과 C_r로 이루어져 있는데 그 곡선들은

$$C = C_v \cup C_r \tag{23}$$

과

$$C_r \cap C_v = \phi \tag{24}$$

을 만족함을 알 수 있다.

정의 2 :

(25)~(26)로 표시되는 두개의 곡선으로 둘러싸인 단조영역을 L형 단조영역(Type L monotonic regions)이라 부른다.

$$C_v = \{(e, \dot{e}) \mid e = V(\dot{e}), \min\ g(e, \dot{e}) \mid_{\dot{e}=\dot{e}_0} = g(V(e_0), e_0)\} \tag{25}$$

$$C_r = \{(e, \dot{e}) \mid e = R(\dot{e}), \max\ g(e, \dot{e}) \mid_{\dot{e}=\dot{e}_0} = g(R(\dot{e}_0), e_0)\} \tag{26}$$

정의 3 :

(27)~(28)로 표시되는 두개의 곡선으로 둘러쌓인 단조영역을 H형 단조영역(type H monotonic regions)이라 부른다.

$$C_v = \{(e, \dot{e}) \mid \dot{e} = V(e), \min\ g(e, \dot{e}) \mid_{e=e_0} = g(e_0, V(e_0))\} \tag{27}$$

$$C_r = \{(e, \dot{e}) \mid \dot{e} = R(e), \max\ g(e, \dot{e}) \mid_{e=e_0} = g(e_0, R(e_0))\} \tag{28}$$

L형과 H형의 단조영역의 예가 그림 7,8에 나타내어져 있다. 그림 7에서 어떤 수평선을 그어도 그 직선들이 만나는 양쪽 끝의 경계선은 C_r과 C_v이며 이는 그 수평선을 따라가면 이 영역안에서는 단조감소하든지 단조증가하든지 둘 중의 하나의 형태를 취한다는 뜻이 된다. 또 그림 8에서 어떤 수직선을 그어도 그 직선들이 만나는 양쪽 끝의 경계선은 C_r과 C_v이며 이는 그 수직선을 따라가면 이 영역안에서는 단조감소하든지 단조증가하든지 둘 중의 하나의 형태를 취한다는 뜻이된다. 또한 그 자체로는 단조영역이 아닌 예가 그림 9에 있다. 그림 9가 단조영역이 아님은 하나의 e값 e_0에 대한 수평선이 만나는 경계선이 모두 C_r로서 그림 9의 점선을 따라가면 계속 증가 또는 계속 감소하지 않고 올라갔다 내려간다든지 내려갔다 올라간다든지하는 복잡한 형태가 된다는 것을 알 수 있다. 그림 9의 영역을 두 개의 H형 단조영역으로 나누는 방법의 예가 그림 10에 나와 있다. 그림 9와 같은 영역을 그림 10처럼 분할하면 단조영역으로 만들 수 있는데, 그림 10에서 어떤 수평선을 그어도 그 직선들이 만나는 양쪽 끝의 경계선은 C_r과 C_v이며 이는 그 수평선을 따라가면 단조영역안에서는 단조감소하든지 단조증가하든지 둘 중의 하나의 형태를 취한다는 뜻이 된다.

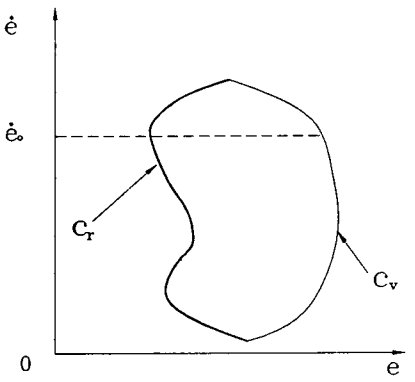


그림 7. H형 단조영역의 예
Fig. 7. An example of type H monotonic region.

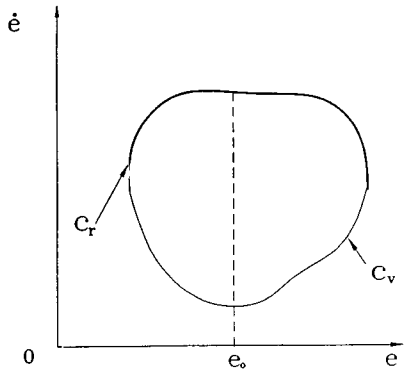


그림8. L형 단조영역의 예
Fig. 8. An example of type L monotonic region.

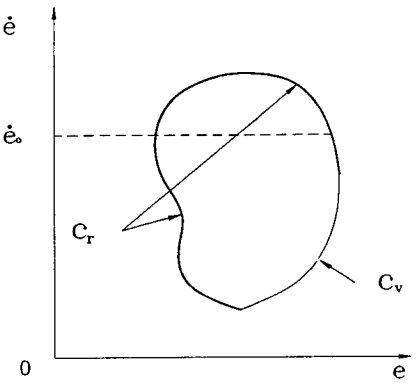


그림 9. 자체가 단조영역이 아닌 영역의 예
Fig. 9. A region that is not monotonic rgeion itself.

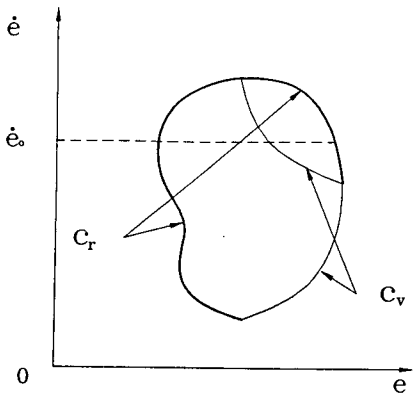


그림10. 그림 9의 영역을 분할하는 가능한 방법의 예
Fig. 10. A possible way of partitioning the region of Fig. 9.

여기서 이 절에서 다루는 퍼지제어기가 사용하는 퍼지집합중 하나를 기술한다. D에서의 2차원 퍼지집합 $\widetilde{C}$를 다음으로 표시한다.

$$C=\int_D \mu_C(e,\dot{e})/(e,\dot{e}) \tag{29}$$

(29)는 궁극적으로 퍼지관계임을 주목할 필요가 있다. Mamdani의 직접 추론법과 C.O.G. defuzzification방법을 채택한 퍼지제어기를 가정하면 보조정리 1과 유사한 성질이 경우 2의 퍼지제어기에 대해서도 다음으로 유도된다.

보조정리 2 :

(22)꼴로 표시되는 함수 g가 주어져 있다고 하자. D가 단조영역이면 D에서 (29)꼴의 퍼지집합과 U에서의 1차원 퍼지집합에 의해서 g를 오차없이 구현하는 퍼지제어기가 존재한다.

증명 :

먼저 D가 g의 L형 단조영역이라 가정한다. 그러면 D는 $\dot{e}=R(e)$과 $\dot{e}=V(e)$로 표시되는 C_r과 C_v의 두 곡선으로 둘러싸여 있게 된다. 또한 다음으로 주어져 있는 제어규칙을 가정하자.

$$If\ (e_0,\dot{e}_0)\ is\ \widetilde{C}_r,\ then\ u\ is\ \widetilde{U}_r \tag{30}$$

$$If\ (e_0,\dot{e}_0)\ is\ \widetilde{E}_v,\ then\ u\ is\ \widetilde{U}_v \tag{31}$$

뒤에 언급하겠지만 조건부가 퍼지관계로 주어져 있음을 강조한다. U에서의 두 개의 퍼지집합을 다음으로 정의한다.

$$\widetilde{U}_r=\int_u \mu_{\tilde{u}_r}(u)/u \tag{32}$$

where

$$\mu_{\tilde{v}_r}(u)=\begin{cases}1 & u=g(e_0,R(e))\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{33}$$

$$\widetilde{U}_v=\int_u \mu_{\tilde{u}_v}(u)/u \tag{34}$$

where

$$u_{\tilde{u}_v}(u)=\begin{cases}1 & u=g(e_0,V(e_0))\\ 0 & otherwise\end{cases} \tag{35}$$

그러면 제어입력 u는 다음으로 계산된다.

$$u(e,\dot{e})=\frac{u_{E_r}(e,\dot{e})\,g(e,R(e))+\mu_{\tilde{E}_v}(e,\dot{e})\,g(e,V(e))}{\mu_{\tilde{E}_r}(e,\dot{e})+\mu_{\tilde{E}_v}(e,\dot{e})} \tag{36}$$

여기서 $\mu_{\tilde{E}_r}$과 $\mu_{\tilde{E}_v}$를

$$\mu_{\tilde{C}_r}(e,\dot{e})=\frac{g(e,\dot{e})-g(e,V(e))}{g(e,R(e))-g(e,V(e))} \tag{37}$$

$$\mu_{\tilde{C}_v}(e,\dot{e})=\frac{g(e,R(e))-g(e,\dot{e})}{g(e,R(e))-g(e,V(e))} \tag{38}$$

로 정의하고 (36)식에 대치하면

$$u(e,\dot{e})=g(e,\dot{e}),(e,\dot{e})\in D \tag{39}$$

를 얻는다. 고정된 e값에 대해 e를 따라 단조 증가하거나 단조감소하거나 둘 중의 하나만을 성질을 가짐을 알 수 있다. 또한 $\widetilde{E}_r$과 $\widetilde{E}_U$가 convexity와 최대값 1을 가짐도 알 수 있다.

H형 단조영역에 대해서도 e과 ė의 역할을 바꾸어 동일한 과정으로 증명할 수 있으므로 여기서는 생략된다.

다음으로 이 결과를 전 정의역으로 확장한다.

정리2 :

(22)꼴로 표시되는 함수 g가 주어져 있다고 하자. 그러면, D에서 (29)꼴의 퍼지집합과 U에서의 1차원 퍼지집합에 의해 g를 오차없이 구현하는 퍼지제어기가 존재한다.

증명과정은 정리1의 경우와 같으므로 여기서는 생략한다.

B. 예제

임의로 주어진 함수 $u=g(e,e)=\sin(\sqrt{e^2+e^{+2}})/(e^2+e^2)^{1/2}$를 생각해 보자. (그림 11)이 함수의 정의역은 앞서 기술한 바에 의해 10개의 H형 단조영역으로 분할되며 그 단조영역 D^i, i=1,2,…,10 각각은 그림 12로 나타난다. C_r과 C_v를 D^1과 D^2에 대해 그림 12에 예를 들어 표시하였다. D^1에 대해 C_r^1은

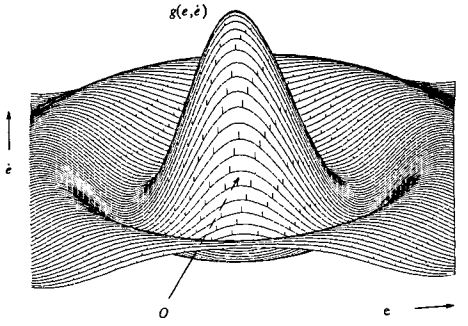


그림11. 경우 2의 퍼지 제어기에 의해 재구성될 임의로 선택된 함수
Fig. 11. An arbitrarily chosen function to be reconstructed by case 2 fuzzy controller.

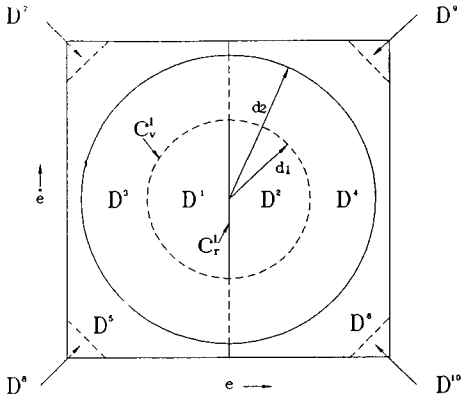


그림12. 그림11의 예제함수에 대해 분할된 영역
Fig. 12. Partitioned domains for the example function of Fig. 11.

$$C_r^1=\{(e,\dot{e})\mid e=0,\ |\dot{e}|\leq d_1\} \tag{40}$$

로 C_v^1은

$$C_v^1=\{(e,\dot{e})\mid e=-((d_1)^2-(\dot{e})^2)^{1/2}\} \tag{41}$$

로 표시되고 D^4에 대해 C_r^4은

$$C_r^4=\{(e,\dot{e})\mid e=+((d_2)^2-(\dot{e})^2)^{1/2}\}$$

로 C_v^4는

$$C_v^4=\{(e,\dot{e})\mid e=V_4(\dot{e}),(e,\dot{e})\in D_4\} \tag{43}$$

로 표시는되데, 여기서

$$V_4(e)=\begin{cases}0 & d_1\leq e\leq d_2\\ ((d_1)^2-(e)^2)^{1/2} & |\dot{e}|<d_1\end{cases} \tag{44}$$

이다.(37)~(38)을 (42)~(44)과 함께 D^1 에 적용하면 퍼지집합 $\tilde{C}_v^1$과 C_r^1 그림 13과 14처럼 구해진다. 다른 영역에 대해서도 경계곡선의 방정식을 구하는 일은 쉬운일이므로 여기서 일일이 구하는 대신 그 결과로구해진 각 D^1에 대해 구한 C_v^1과 C_r^1를 그림 14와 15에 나타내었다. 이 퍼지집합들에 의해 퍼지제어기는 그림 11의 예제함수를 정확히 구현한다.

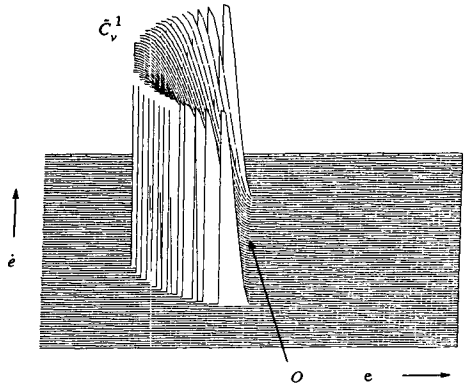


그림13. D^1에서 계산된 퍼지집합 C_v^1
Fig. 13. Resultant fuzzy set C_v^1 on D^1.

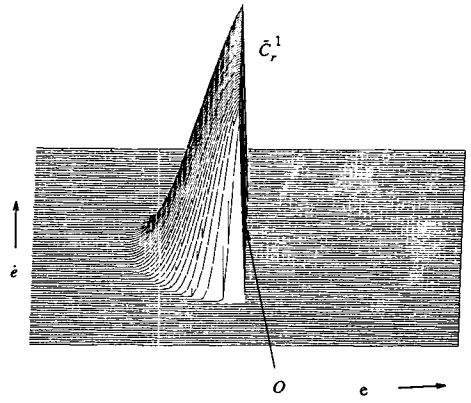


그림14. D^1에서 계산된 퍼지집합 C_v^1
Fig. 14. Resultant fuzzy set C_v^1 on D^1.

Ⅳ. 검 토

2,3절에서 다룬 퍼지제어기는 1개의 제어입력인경우였지만 그 결과는 일반적으로 N개의 제어입력을 갖는 경우에도 그대로 적용된다. 다음의 제어 규칙을

갖는 제어기의 경우를 생각해 보자.

$$If\ error\ is\ \widetilde{A},\ then\ u_1\ is\ \widetilde{B}_1,\ u_2\ is\ \widetilde{B}_2,\ \cdots,\ and\ u_N\ is\ \widetilde{B}_N \tag{45}$$

이 규칙들은 등가적으로 다음의 N개의 규칙으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &If\ error\ is\ \widetilde{A},\ then\ u_1\ is\ \widetilde{B}_1\\ &If\ error\ is\ \widetilde{A},\ then\ u_2\ is\ \widetilde{B}_2\\ &\qquad\vdots\\ &If\ error\ is\ \widetilde{A},\ then\ u_N\ is\ \widetilde{B}_N \end{aligned} \tag{46}$$

(46)각각은 제어입력이 하나씩이므로 2,3절에서의 해석 방법이 적용될 수 있고 그 결과 (46)의 다중 출력 제어기 형태에도 적용될 수 있겠다.

기하학적인 표시는 어렵지만 입력이 여러 개인 경우에도 본 논문에서의 해석 방법이 확장 적용 될 수 있다. 제어기의 입력으로 측정되는 state의 갯수가 n인 경우를 생각해보자. 이 경우는 h: X→R¹, X⊂Rⁿ꼴의 함수에 해당하고 정의영역이 n차원의 단조영역이라고 가정하자(앞에서와 마찬가지로 단조영역에서의 결과는 항상 전 정의역으로 확장될 수 있음을 부언한다). n개의 변수의 순서조정에 의해 이 단조영역은 두 개의 hyperplane으로 싸여있음을 알 수 있고 이들을 각각

$$x_n = R(x_1, \cdots, x_{n-1}) \tag{47}$$

$$x_n = V(x_1, \cdots, x_{n-1}) \tag{48}$$

로 표시하기로 한다. 그러면 다음 식(Mamdani의 직접 추론방식과 C. O. G defuzzification방법)으로 출력을 계산하는 퍼지제어기는

$$u(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\mu_{\tilde{x}_r}(x_1, \cdots, x_n)\, h(x_1, \cdots, x_{n-1}, R(x_1, \cdots, x_{n-1})) + \mu_{\tilde{x}_v}(x_1, \cdots, x_n) h(x_1, \cdots, x_{n-1}, V(x_1, \cdots, x_{n-1}))}{\mu_{\tilde{x}_r}(x_1, \cdots, x_n) + \mu_{\tilde{x}_v}(x_1, \cdots x_n)} \tag{49}$$

다음의 퍼지 집합에 의해 X에서 h를 오차없이 구현한다.

$$\mu_{\tilde{x}_r}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{h(x_1, \cdots, x_n) - h(x_1, \cdots, x_{n-1}, V(x_1, \cdots, x_{n-1}))}{h(x_1, \cdots, x_{n-1}, R(x_1, \cdots, x_{n-1})) - h(x_1, \cdots, x_{n-1}, V(x_1, \cdots, x_{n-1}))} \tag{50}$$

$$\mu_{\tilde{x}_v}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{h(x_1, \cdots, x_{n-1}, R(x_1, \cdots x_{n+})) - h(x_1, \cdots, x_n)}{h(x_1, \cdots, x_{n-1}x, R(x_1, \cdots, x_{n-1})) - h(x_1, \cdots, x_{n-1}, V(x_1, \cdots, x_{n-1}))} \tag{51}$$

그러나 차원이 커져 갈수록 퍼지관계(fuzzy relation) 꼴의 제어 규칙을 전문가로 부터 얻어내는 일은 점점 더 복잡해질 수 있다는 점을 강조한다.

본 논문에서는 퍼지제어기의 함수구현 능력에 대해 충분조건으로 밝혀진 제어 규칙은 조건부가 퍼지관계(fuzzy relation)로 되어 있다. 이런 제어 규칙의 예로는

$$If\ x_1\ is\ much\ greater\ then\ x_2,\ then\cdots \tag{52}$$

을 들 수 있고 이는

$$If(x_1, x_2)\ is\ \widetilde{R},\cdots \tag{53}$$

$$\widetilde{R} = much\ greater\ then \tag{54}$$

이라고 등가적으로 표시될 수 있으며 (54)식의 꼴이 본 논문에서 밝혀진 충분조건의 모양이다. 이런 표시가

$$If\ x_1\ is\ \widetilde{A}\ and\ x_2\ is\ \widetilde{B},\ then\cdots \tag{55}$$

형태를 포함하는 일반적인 표시라고 할 수 있으나 전문가로부터 자료 수집을 할 때에 경우에 따라 표현이 용이하지 않을 수도 있으리라는 예상도 가능하다. 여기서 일반적으로 많이 이용되고 있는 (55)식 꼴의 표현이 왜 충분조건으로 바로 이용될 수 없었는가에 대해 살펴보자. 이 경우는 $X_1, \cdots, X_n$의 퍼지집합 $A_1, \cdots, A_n$이 카르테시안 프로덕트 공간(cartesian pqoduct space) $X_1 \times \cdots X_n$에서 다음으로 정의된다.[1]

$$\widetilde{A}_1 \times \cdots \times \widetilde{A}_n = \int_{X1 \times \cdots \times Xn} min\ \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\} / (x_1, \cdots, x_n) \tag{56}$$

(56)식에 대한 등가 2차원 퍼지집합을 두 경우의 예로 그림 17~18에 보인다. 이 그림들을 그림 13~16의것들과 비교하면 min이란 조작(operation)에 의해 입력중 큰쪽의 변화는 다음과정으로 전달되지 않기 때문에, 즉 n차원 정보(그림 17~18의 경우는 n=2)가 1차원정보로 변환되기 때문에 정보의 일부가 처리과정에서 유실됨을 알 수 있으며(즉 (56)식에 의하면 유한개의 규칙의 조합으로는 임의의 기하학적인 구조의 퍼지관계를 만들어 낼 수가 없다) (56)식에 의한(55)의 퍼지규칙이 (53)꼴의 규칙의 특수한 형태임을 알수 있다. 그러나 (55)꼴의 제어규칙은 전문가로부터 지식을 수집하기가 용이하며 (56)식도 정보의 확신도에 따라 비중을 달리하는 훌륭한 물리적의미가 숨어있음을 강조한다. 단지 입력변수들이 복잡한 꼴로 연관되어 있을때 이런 경우를 표현하는데 (55)~(56)은 한계가

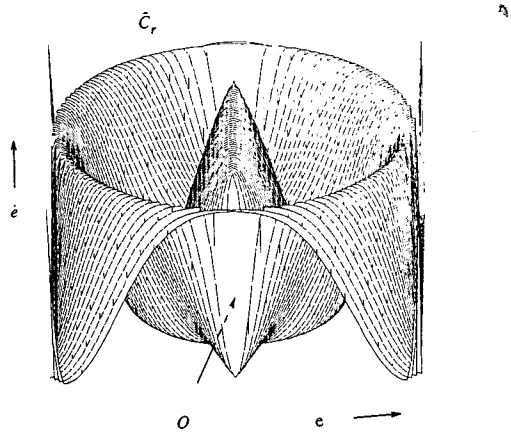


그림15. 그림11의 예제 함수에 대해 계산된 퍼지집합 C_v^1

Fig. 15. Resultant fuzzy sets C_v^1 for the example function of Fig. 11.

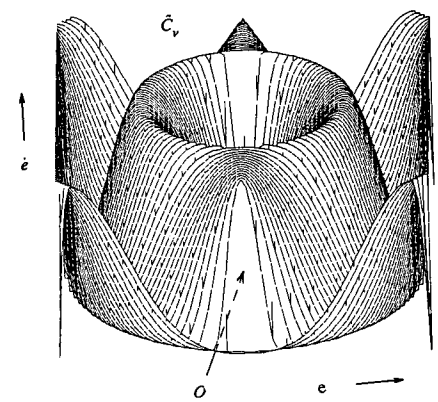


그림16. 그림11의 예제 함수에 대해 계산된 퍼지집합 C_r^1

Fig. 16. Resultant fuzzy sets, C_r^1 for the example function of Fig. 11.

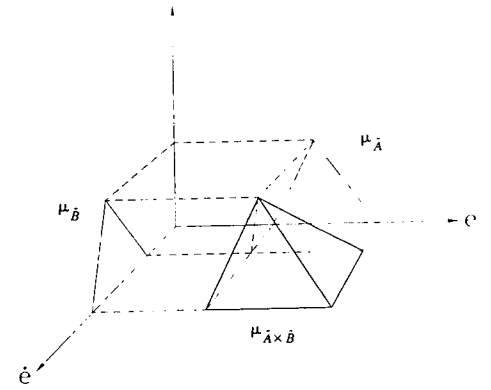


그림17. 두 퍼지 집합의 카르타시안 프로덕트에 대한 첫번째 예제

Fig. 17. First example for the Cartesian product of two fuzzy sets.

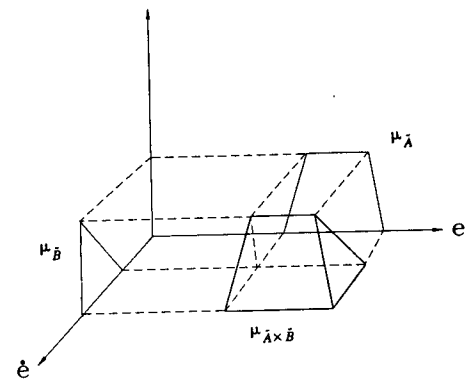


그림18. 두 퍼지 집합의 퍼르타시안 프로덕트에 대한 두번째 예제

Fig. 18. Second example for the Cartesian product of two fuzzy sets.

있다는 점을 지적한다. 이런 점은 조건부를 입력변수들의 함수로 표시하고 확장원리(extension prtnciple)을 사용하는 경우에도 동일하게 발생한다. 즉, 다음의 예로 표시된 제어규칙을 생각해보자.

$$If\ x_1+x_2\ is\ small,\ then\ \cdots \tag{57}$$

이런 경우에 확장원리가 이미 연구되어 있는데[1] f를 $X_1\times\cdots\times X_n$에서 Y로 대응시키는 함수라 하자. 즉, $y=f(x_1,\cdots,x_n)$. 이 경우 f를 통한 Y에서의 퍼지집합B는

$$\mu_B(y)=\begin{cases}\sup\limits_{(x^1,\cdots,x^n)\in f^{-1}(y)} & min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1),\ \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)) \\ 0 & f^{-1}(y)=\emptyset\end{cases} \tag{58}$$

로 정의되는데 이 경우에도 min 조작때문에 바로 함수구현 능력의 충분조건을 유도하는데 어려움이 있다. 그러나 이상의 카르테시안 프로덕트나 확장원리 등에 의한 방법은 정보수집이나 처리가 용이하기 때문에 널리 사용되고 있으며, 또한 이는 퍼지제어기의 도입동기가 고정밀도의 제어보다는 전문가의 지식을 기계적인 정보로 쉽게 변환하여 어느정도 만족할만한 성과를 얻기 위함이라는 점을 상기시키고 있다. 어쨌든 (55)~(57)의 구조로는 MIMO 시스템인 경우 함수 구현 능력에 한계가 있으리라는 예상은 할 수 있겠다.

V. 결 론

퍼지제어기에 관한 일반적인 관심이 여러 설계요소를 조합하여 성능 좋은 제어기를 구성하는 것인 반면, 본 논문에서는 퍼지제어기를 함수와 같은 입력-출력 대응기로 보고 이러한 대응의 구현능력에 대해 분석하고 그 구현 능력이 완벽하기 위한 충분조건을 구하였다. 주된 분석은 $f : R^1 \rightarrow R^1$과 $g : R^2 \rightarrow R^1$의 경우에 대해 수행하였으며 그결과가 다중 차원(multi-dimansional)의 경우에도 확장가능함을 보였다 결론적으로 Mamdani의 직접추론법과 C. O. G. defuzzification 방법을 채택하는 퍼지제어기에서 조건부를 퍼지관계로 표시하면 어떤 주어진 함수관계도 구현할 수 있음을 증명하였다.

해석의 과정에서 주어진 함수의 특성에 의해, 단조영역(monotonic region)이라 불리는 영역으로 주어진 함수의 정의역을 분할하고 이 각각의 단조영역 에서 퍼지 제어기가 주어진 함수를 오차없이 구현함을 보이고 이 결과를 전 정의역으로 확장함으로써 앞서언급한 퍼지제어기의 함수 구현 능력이 완벽함을 보였다.

MIMO 시스템인 경우 조건부의 표시 방법, 퍼지관계, 카르테시안 프로덕트, 퍼지함수등의 경우 차이점과 특성의 차이에 대해서도 언급하였다.

그러나 일반적인 퍼지제어기는 퍼지집합의 모양, 추론 규칙의 갯수, defuzzifibation 방법등으 많은 설계요소를 갖고 있다. 그리고 퍼지 제어기의 함수구현능력은 이러한 설계요소들에 크던 작던 영향을 받을것이다. 그러므로 이러한 설계요소들과 함수구현능력과의 연관 관계에 대해서 추가적인 연구가 필요하다고 하겠다. 또한 초기 설계단계에서 여러 입력 변수들의 퍼지관계로 정의된 제어규칙을 수집하지 못한 경우에도 일단 각 입력변수를 독립적으로 다루어 카르테시안 프로덕트에 의한 추론에 의한 등가퍼지 관계를 구한후 학습을 통해 점차 복잡한 퍼지관계로 학습시키며 제어기의 성능을 개선시켜 나아가는 방법의 연구도 가치가 있다고 생각된다.

參 考 文 獻

[1] L.A. Zadeh, "Fuzzy sets,", *Imformt. Control,* vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[2] S.S.L. Chang and L.A. Zadeh, "On Fuzzy Mapping and Control," *IEEE Trans. syst. Man Cybern.,* vol. 15, no. 1, pp. 175-189, 1985.

[3] C.C. Lee, "Fuzzy Logic in Control Systems: Fuzzy Logic Controller-Part I, II," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.,* vol. 20, no. 2, pp. 404-435, 1990.

[4] R.M. Tong, "A Control Engineering Review of Fuzzy Systems," *Automatic,* vol. 13, pp. 559-569, 1977.

[5] R.M. Tong, "Some Properties of Fuzzy Feedback Systems," *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.,* vol. SMC-10, no. 6, pp. 327-330, 1980.

[6] E.H. Mamdani and S. Assilian, "An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller," *Int. J. Man-Machine studies,* vol. 7, no. 12, pp. 1-13, 1975.

[7] M. Sugeno and K. Murakami, "Fuzzy parking control of model car," *proc. 23rd IEEE Conf. on Decision and Control,* Las Vegas, NV, 1984.

[8] M. Stinchcombe and H. White, "Approximating and learning unknown mappings using multilayer feedforward networks," *Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks,* vol. III, pp. 7-16, 1990.

[9] R.H.-Nielsen, ""Theory of the backpropagation neural network," *Proc. Int. Joint Conf.* on Neural Networks, vol I, pp. 593-605, 1989.

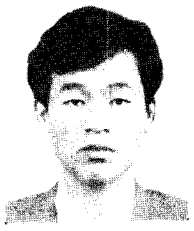
[10] D.G. Luenberger, *Optimization by Vector Space Methods.,* John Wiley & sons, 1969. pp. 11-45.

著 者 紹 介

李 志 弘 (正會員)

1983年 서울대학교 전자공학과졸업(학사). 1985年 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1985~1988年 현대 중공업 로보트 사업부 근무. 1991年 한국과학기술원 전기 및 전자 공학과 졸업(박사). 1991年 3月~1991年 6月 한국과학기술원 전기 및 전자 공학과 연수 연구원. 1991年 7月~현재금오공과대학 전자제어공학과 조교수 주관심분야는 지능제어, 로보틱스, 뉴로 퍼지 시스템 등임.

●



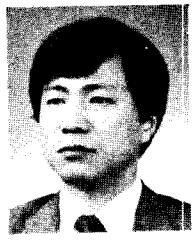
鄭 秉 炫 (準會員)

1964年 12月 5日生. 1987年 금오공과대학 전자제어공학과(학사). 1987年~1988年 군복무, 방공포, 통신장비정비. 1990年~1992年 금오공과대학 전자공학과(석사). 1992年~현재 한국전자통신 연구소/ 관제기술연구실 근무중. 주관심분야는 인공위성 궤도내시험 및 전문가 시스템 등임.

蔡 錫 (正會員)

1978年 서울대학교 전기공학과졸업(학사). 1980年 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1980年 3月~1983年 2月 현대 자동차 근무. 1989年 한국과학기술원 전기 및 전자 공학과 졸업(박사). 1983年 3月~현재 금오공과대학 전자제어공학과 부교수. 주관심분야는 퍼지제어, 공장 자동화, 대규모 시스템 제어 등임.

●



吳 英 碩 (正會員)

1982年 서울대학교 전자공학과졸업(학사). 1984年 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(석사). 1991年 한국과학기술원 전기 및 전자 공학과 졸업(박사). 1989 年 3月~현재 금오공과대학 전자제어공학과 조교수. 주관심분야는 로보틱스, 컴퓨터 비젼, 마이크로 프로세서 응용 등임.