

# 여유자유도 로봇을 위한 특이점 회피 성능지수들의 특성화

## (Characterization of Singularity Avoidance Measures for a Redundant Robot)

崔秉旭\*\*, 元鍾華\*, 鄭明振\*

(Byoung Wook Choi, Jong Hwa Won, and Myung Jin Chung)

### 要 約

본 논문은 자세공간에서 성능지수의 최적화를 위한 필요적 제한조건을 만족하는 점들의 제적인 성능지수 제한계적을 제시한다. 그리고 제안된 성능지수 제한계적을 이용하여 특이점 회피를 위한 4개의 성능지수의 특성화를 수행하는데 이 결과는 여유자유도 로봇에 있어서 성능지수가 사용될 때 역기구학 알고리즘의 능력에 대한 거시적 안목을 제공하게 된다. 또한 특이점이 없는 가역 작업영역과, 자세공간과 조작공간의 위상적 특성을 해석하고 성능지수 제한계적의 위상적 성질에 기초하여 역기구학 알고리즘의 한계와 각 성능지수의 전체적 특성을 비교한다. 따라서 새로운 개념인 성능지수 제한계적은 거의 모든 작업영역에서 특이점이 없는 보존적 관절계적을 구하는 방법론을 제공한다.

### Abstract

This paper suggests a measure constraint locus which is the loci of points satisfying the necessary constraint for optimality of a measure in the configuration space. The characterization of four measures for singularity avoidance is worked out by using the measure constraint locus. It gives a global look at the performance of an inverse kinematic algorithm when each of measures in a kinematically redundant robot is used. The invertible workspace without singularities and the topological properties both on the configuration and operational spaces are analyzed. We discuss also some limitations, based on the topological arguments of measure constraint locus, of the inverse kinematic algorithms, and compare global properties of each of measure. Therefore, a new concept called measure constraint locus gives a methodology for obtaining a conservative joint trajectory without singularities for almost entire workspace.

### I. 개 요

일반적으로 주어진 작업을 수행하는데 필요한 최소한의 관절수보다 더 많은 자유도(degrees of freedom)를 갖고 있는 여유자유도 로봇(redundant robot)은 장애물이나 특이점 회피를 위하여 조작성이 증대되었다.<sup>[1]</sup> 그러나

작업  $x(t) \in R^m$ 에 대하여 기구학식

$$x(t) = f(\theta(t)) \quad (1)$$

을 만족하는 역기구학해  $\theta \in R^n$ 는 무한히 많이 존재하게 되어 경로계획을 하는데 주의와 능률적인 방법이 요구된다. 따라서 여유자유도 로봇에 있어서 로봇 end-effector의 위치와 방향에는 영향을 주지 않으면서 관절의 자세를 변화하여 여유자유도를 유용화하는 방법으로는 주어진 작업을 수행하면서 부작용인 성능지수를 어떻게 최

\* 正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字: 1992年 1月 21日

적화하는가에 대한 연구로 진행되었다.

국부적 경로정보(local path information)를 이용하여 여유자유도를 유용화하는 방법은 대부분이 부작업을 야코비안 행렬(Jacobina matrix)의 널공간(null space)으로 투영시키는 투영연산자(projection operator)를 이용하여 왔다.<sup>[2]</sup> 그런데 의사역행렬(pseudo-inverse)을 이용하는 방법은 일반적으로 직교좌표공간에서 반복적 작업에 대하여 자세공간에서는 반복적 해를 제공하지 못한다. 이러한 운동은 비보존적 관절운동(nonconservative joint motions)이라고 하는데 로봇의 가장 큰 응용분야인 반복적 동작에 문제점을 야기시킨다.<sup>[3]</sup>

반면에 여유자유도가 없는 것처럼 여유자유도를 유용화하는 방법도 제시되었다.<sup>[3, 4]</sup> 이러한 방법 중에 부가적인 제한식을 추가하는 방법은 보존적 관절운동을 보장하고 있으며 제한식은 직접적인 방법이나 또는 간접적인 방법으로 구할 수 있겠다. 특히 Baillieul<sup>[3]</sup>과 Chang<sup>[4]</sup>에 의하여 성능지수를 제한식으로 변환하는 방법론이 제시되었다.

그러나 이러한 국부적 최적화 방법(local optimization methods)들은 몇가지의 단점이 지적되었다. 첫번째로 국부적 경로를 이용함으로써 관절운동의 전체적 최적화가 보장되지 않는다. 예를 들면 의사역행렬에 기초한 방법은 비보존적 관절운동에 문제가 있으며, 로봇의 운동이 불안정한 영역에 도달할 경우가 발생한다<sup>[5]</sup>. 두번째로 부가적인 제한식을 이용하는 방법에 있어서는 로봇이 원하지 않는 운동을 할 수 있다. 즉 알고리즘에 의해 발생하는 특이점이 있으며, 가역 작업영역(invertible workspace)에 의하여 로봇의 역기구학해를 구하는데 제한을 가져온다<sup>[3, 6]</sup>. 이와 같은 역기구학 알고리즘의 제한점에 대하여 하나의 역기구학식을 정의하는 연구도 진행되었으나 사용된 역기구학식이 간단한 경우에만 성립되었으나 사용된 역기구학식이 단순한 경우에만 적용되는 단점을 갖고 있다<sup>[7, 8]</sup>. 따라서 목적함수인 부작업을 이용할 경우에 있어서 해의 존재성이나 그 특성을 규명할 수 있는 일반적인 방법이 필요하게 된다.

본 논문에서는 앞에서 언급된 부작업의 특성을 자세공간(configurations space)이나 조작공간(operational space)에서 해석할 수 있는 새로운 개념인 성능지수 제한계적(measure constraint locus)을 제안한다. 이 체계는 자세공간에서 부작업의 최적화 조건을 만족하는 관절값의 집합으로 정의되는데, 이전의 연구에서 어떠한 부작업을 최적화하는 조건식은  $N$ 이 야코비안 행렬의 널공간 기저벡터(basis vector)이고  $h$ 가 부작업인 목적함수  $H$ 의 경사벡터(gradient vector)인 경우

$$N^T h = 0 \tag{2}$$

으로 주어질 수 있다는 사실이 발표되었다<sup>[4]</sup>. 따라서 본 논문에서는 식 (2)를 이용하여 성능지수 제한계적을 다음과 같이 정의하도록 하겠다.

정의 : 성능지수 제한계적은 최적화 필요조건을 만족하는 관절로서

$$M = \{ \theta : N^T \nabla H = 0, \text{ for } \theta \in T^n \}$$

을 만족하는 집합을 나타낸다. 그리고  $T^n$  은 자세공간을 이루는  $n$  토러스(torus)이다.

정의에서 보듯이 제한계적인 집합  $M$ 은 자세공간에서 주어진 작업에 무관하게 부작업의 최적화 조건을 만족하는 관절값이 된다. 따라서 이러한 계적을 이용하면 자세공간과 조작공간간의 위상적 특징을 비교할 수 있을 것이다<sup>[9]</sup>. 한편으로 여유자유도를 유용하게 사용하기 위하여는 부작업인  $H$ 의 선형이 중요하게 되는데, 이 중에서 특이점 회피를 위한 성능지수도 많이 제시되었다<sup>[10-13]</sup>. 비록 성능지수가 많이 제시되었지만 각 성능지수의 특성화는 단지 end-effector에 따른 각 성능지수 값들의 비교정도에 그치고 있다. 그러나 하나의 작업이 주어지면, 거기에 상응하는 역기구학해는 무한히 많이 존재하고 그 중에서도 부작업을 최적화하는 관절값은 여러개가 존재한다. 따라서 최적화 조건을 만족하는 관절들에 대한 해석이 필요하며, 부작업의 최적화 조건식을 만족하는 전체 집합인 성능지수 제한계적을 이용하면 각 성능지수의 특성을 비교할 수 있다.

이 논문의 주된 관점은 자세공간에서 특이점 회피를 위한 성능지수의 위상적 특성을 이용하여 각 성능지수를 특성화하여 비교하고자 한다. 여기서는 특이점 회피를 위한 4개의 성능지수에 대하여 연구하기로 한다. 각 성능지수에 대한 제한계적을 자세공간에서 정의하면 여유자유도를 이용한 특이점 회피에 각 성능지수가 어떠한 가역 작업영역을 갖고 있으며 특이점을 회피하면서 작업을 수행할 수 있는가에 대한 연구가 가능하다. 그리고 자세공간에서 정의된 제한계적을 기구학식을 이용하여 조작공간으로 투영하면 성능지수를 사용할 경우에 조작공간에서의 위상적 특성도 논의할 수 있다. 이러한 조작공간의 위상적 특성은 특이점뿐만 아니라 제한계적에 의해서 더욱 분리되어지는 특성이 있는데 이러한 특성도 연구하도록 하겠다.

마지막으로 지금까지 국부적 경로정보를 이용한 경우에 가역 작업영역과 알고리즘에 의해 발생하는 특이점을 회피하면서 마치 전체 경로정보를 이용하는 경우처럼 전체 작업영역에 걸쳐있는 작업을 수행할 수 있는 유일한 역기구학해가 존재하는가에 대한 의문을 연구한다<sup>[6]</sup>. 이러한 목적을 위하여서는 최적화 조건을 만족하는 계적중에 전체적 최적점(global optirra)를 이용하게 되는데 이 때의 특성도 앞으로 논의하도록 하겠다.

## II. 성능지수 제한계적의 생성

이 절에서는 성능지수 제한계적을 생성하는 효과적인 알고리즘을 제시한다. 여기서는 널공간 기저벡터를 이용하여 의사역행렬에 기초한 미분식을 유도하고, 자세공간에서 성능지수 제한계적의 특성인 최대값 제적(maxima loci(MAML))과 최소값 제적(minima loci(MINL))에 대하여 논의하도록 하겠다.

일반적으로 여유자유도 로봇에 있어서 역기구학해를 구하는 대부분의 연구는 자세공간과 조작공간간의 미분관계를 이용하여 진행되었다. 미분 기구학식은

$$\dot{x} = J\dot{\theta} \quad (3)$$

형태로 주어지며,  $J \in R^{m \times n}$ 는 식 (1)의 자코비안 행렬로 일반적으로 정방행렬이 아니다. 따라서 자코비안 행렬의 역행렬을 바로 구할 수 없기 때문에 Moore-Penrose 의사역행렬을 이용하게 된다. 의사역행렬과 자코비안의 널공간으로 투영시키는 투영연산자를 이용하여 주어진 조작공간에서의 작업을 수행하면서 부가적인 목적을 수행하기 위한 일반적 형태의 해는

$$\dot{\theta} = J^+x + k(I - J^+J)\nabla H \quad (4)$$

으로 나타나며, 여기서  $I \in R^{n \times n}$ 는 단위행렬이며,  $J^+ = J(JJ^T)^{-1}J^T$ 로  $J$ 의 의사역행렬이고,  $\nabla H$ 는 자세공간에서 최적화 되어야 할 부작업  $H$ 의 경사벡터가 된다. 그리고  $k$ 는 상수로써 부작업이 최대화일 경우는 양의 값이고 최소화일 경우는 음의 값이 된다. 식 (4)를 해석하면 오른쪽의 첫째 항은 특별해로써 주어진 작업을 수행하며, 두번째 항은 부작업인  $H$ 를 최대화 또는 최소화하기 위하여 경사벡터를 널공간으로의 투영시키는 것이다<sup>[1]</sup>. 따라서 투영연산자를 이용한 자체운동(self-motion)은 로봇의 end-effector에는 영향을 주지 않는다.

본 논문에서는 자세공간에서 정의된 성능지수 제한계적을 생성하는 효과적인 방법을 유도하기 위하여 식 (4)를 이용한다. 그런데 제안된 방법은 일반적인 여유자유도 로봇( $n-m > 1$ )에서도 적용될 수 있으나 제한계적의 이해를 돕기 위하여 여유자유도가 1일 경우만 다루도록 하겠다.

역기구학해의 일반적인 형태인 식 (4)에 널공간 기저벡터  $N$ 을 앞에서 내적하면

$$N^T\dot{\theta} = kN^T P h \quad (5)$$

으로 나타난다. 여기서  $h = \nabla H$ 이며,  $P = (I - J^+J)$

로 널공간으로의 투영연산자이다. 식 (4)에서 작업에 관련된 첫째 항은 작업에 대한 최소화 관결속도 노름(norm)에 대한 해이나,  $J^+$ 와  $N$ 은 서로 직교의 기저벡터를 갖고 있기때문에 (5)식에서는 나타나지 않게 된다. 그리고 투영연산자  $P$ 는 널공간 기저벡터  $N$ 을 이용하면

$$P = N(N^T N)^{-1}N^T \quad (6)$$

으로 표시되므로 식 (5)는 다음과 같이 간단하게 나타나게 된다.

$$N^T\dot{\theta} = kN^T h \quad (7)$$

부작업의 최적화를 위한 필요제한식인 식 (2)는 (7)에서도 얻어질 수 있으며, 제한계적도  $\theta$ 를 전구간  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 에 대하여 자세공간에서 샘플링하여 제한조건인 식 (2)를 만족하는 관절 집합을 찾으면 성능지수 제한계적이 된다. 그러나 이와 같이 자세공간을 샘플링하는 경우는 계산량이 많으며 정교한 경계를 찾기도 어렵게 된다. 따라서 제한계적은 단지 최적화 필요조건을 만족하는 자세공간에서의 관절 집합이므로 작업이 배제된 식 (7)에 의사역행렬 방법을 이용하여 성능지수 제한계적을 생성하도록 한다.

제한계적을 얻기 위하여 식 (7)을 널공간 기저벡터  $N^T$ 에 대하여 의사역행렬을 취하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\theta} = k(N^T)^+N^T h + (I - (N^T)^+N^T)v \quad (8)$$

여기서  $(N^T)^+ = (N^T N)^{-1}N^T$ 이며  $v \in R^n$ 는 임의의 벡터로서 제적이 생성되는 구간의 크기나 자세공간에서의 방향을 선정하게 된다. 식 (8)에서 보듯이 제적은 부작업의 경사벡터를 따라 생성된다. 따라서 일반적인 경사투영법(gradient projection method)에 기초하고 있으며, 연속적인 제적을 생성하기 위하여 작은 값의 임의의 벡터인  $v$ 를 이용하게 된다. 여기서 유의할 사항은 상수  $k$ 의 부호에 따라 제적은 부작업의 최대값을 따라가거나 최소값을 따르는 제적을 생성하게 된다. 이러한 최대값 제적과 최소값 제적이 역기구학 알고리즘에 미치는 영향을 다음 절에서 각각의 성능지수를 이용하여 논하도록 하겠다.

## III. 특이점 회피를 위한 성능지수 제한계적

앞에서는 일반적인 부작업  $H$ 의 경사함수를 이용하여 일반적인 형태로 제한계적을 정의하였으나, 이 절에서는 특이점 회피를 위하여 제안된 성능지수 중에 4개에 대한

여 제한계적을 정의하고 그 특성을 해석하고자 한다. 또한 성능지수의 특성을 비교하는데 성능지수 제한계적을 이용하기 위하여 계적을 분리하는 작업을 수행한다.

먼저 그림 1과 같은 3축 평면 로봇(3-link planar robot)을 고려해 보자. 작업은 직교좌표공간에서 로봇 end-effector의 위치로  $x \in R^2$  이고 관절값은  $\theta \in R^3$  이므로 특이점이 아닌 위치에서는 여유자유도가 1이 된다. 그리고 로봇이 각 관절 길이는  $l_1=3, l_2=2.5$ 이고  $l_3=2$  단위로 한다.

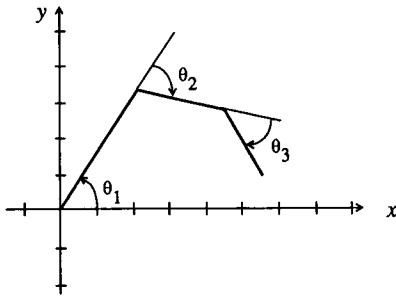


그림 1. 3축 평면 로봇의 구조  
Fig. 1. Geometry of a 3-link planar robot.

특이값 회피를 위하여 제시된 성능지수는 여러가지가 있으나, 본 논문에서는 다음과 같은 4개를 고려하는데, 일반적으로 많이 사용되는 성능지수들이다.

$$\max H_1 = \sqrt{\det(JJ^T)} \tag{9}$$

$$\max H_2 = \lambda_{\min}(JJ^T) \tag{10}$$

$$\max H_3 = \text{tr}(JJ^T)^{-1} \tag{11}$$

$$\max H_4 = \left| \prod_{i=1}^p \Delta_i \right|^{1/p} \tag{12}$$

여기서  $\lambda_{\min}(JJ^T)$ 는 행렬  $(JJ^T)$ 의 최소 고유치(minimum eigenvalue)가 되고,  $i = 1, \dots, p$ 에서  $\Delta_i$ 는 야코비안 행렬에서 랭크(rank)가  $m$ 인 소행렬식(minor)을 나타내며  $p = nC_m$  으로 소행렬식의 갯수를 의미하게 된다.

식 (9)로 표현된 조작성능지수(manipulability measure)는 특이점 회피를 위하여 지금까지 가장 많이 사용된 부작업이다 [11]. 그리고 식 (10)은 Klein과 Blaho [10] 논문에서 제시되었고 식 (11)은 Baillieul 논문에서 사용되었다 [6]. 또한 식 (12)는 Chang이 제시하였으며 이 논문에서는 식 (9)와 (10) 형태의 성능지수와의 비교도 이루어져 있는데 단지 로봇 end-effector의 방향성에 따른 특성을 논하였다 [12]. 그런데 식 (12)는 랭크가  $m$ 인 소행

렬식의 수와 그 크기가 동시에 고려되며, 식 (10)은 단지 최소 고유치만을 고려하였다. 따라서 식 (12)가 유용한 성능지수라는 것은 예측할 수 있으나 어떠한 성능지수를 이용하여 특이점 회피를 하던간에 하나의 작업에 대하여 그 특성을 비교한다는 것은 의미가 별로 없다. 왜냐하면 각각의 특성은 서로 다르다.

1.  $H_1$ 에 대한 성능지수 제한계적

특이점 회피를 위하여 가장 많이 사용된 조작성능지수인  $H_1$ 에 대하여 제한계적을 자세공간에서 다음과 같이 정의한다.

$$M_1 = \{ \theta : N^T \nabla H_1 = 0, \text{ for } \theta \in T^n \} \tag{13}$$

여기서  $\nabla H_1$ 은 부작업인  $H_1$ 의 경사함수이다.

조작성능지수에 대한 최적화 조건식을 만족하는 관절 집합인  $M_1$ 은 앞에서 제안된 미분방정식인 식 (8)을 이용하면 그림 2와 같은 계적을 얻을 수 있다. 그림 2에서 기호 (x)는 로봇의 베이스에 대응하는 관절값으로써 자세공간에서의 이해를 돕기 위하여 표시하였다. 그림 2는  $(\theta_2 - \theta_3)$ 에서의 제한계적을 나타내는데 이러한 이유는 조작성능지수  $H_1$ 과 널공간 기저벡터인  $N$ 이  $\theta_1$ 에 무관하기 때문이다. 즉 평면 로봇에서 관절 1의 운동은 특이점과는 무관하게 된다. 따라서 3축 평면 로봇의 자세공간인  $T^3$  토러스 대신에 그림 2와 같은 공간을 3축 평면 로봇에 대한 자세공간으로 이용하도록 하겠다. 그리고 그림 2의 중요성은 식 (1)과 (13)에서의 제한식을 이용하여 부작업인  $H_1$ 을 최적화하는 관절계적을 얻으면 이러한 계적은 항상 그림 2의 계적에 겹쳐져야 한다는 점에 있다 [4]. 또한 확장된 야코비안 방법(extended Jacobian method [3])을 이용할 경우에도 초기값이 식 (1)과 (13)을 만족하고 경로 중간에 기구학적 특이점이나 알고리즘적 특이점에 빠지지 않으면 역기구학해는 항상 그림 2의 계적 위에 존재하게 된다.

그림 2에서 보면 계적을 최대값 계적(MAXL)과 최소값 계적(MINL)으로 분리하였는데 각각은 식 (8)에서 상수  $k$ 의 부호에 따라 생성된 계적을 의미한다. 다시 말해서 MAXL은 식 (8)에서 상수의 부호가 양일 경우에 얻은 계적이고 MINL은 음일 경우에 얻은 계적을 나타낸다. 그림 2에서 그림 1의 로봇의 경우에 발생하는 특이점을 쉽게 구할 수 있는데, 3축이 일직선을 이룰 때 특이점을 의미하게 된다. 예를 들면  $\theta_2 = \pm\pi$ 이고  $\theta_3 = 0$ 일 경우도 특이점이 된다. 따라서 그림 2에서 특이점은  $\theta_2$ 와  $\theta_3$ 가 일직선이 되는 조합이므로 각 꼭지점과  $\theta_2$ 와  $\theta_3$ 가 영인 점 그리고 원점이 된다. 그런데 원점은 로봇의 작업영역의 경계에 해당하여 자세공간에도 회피

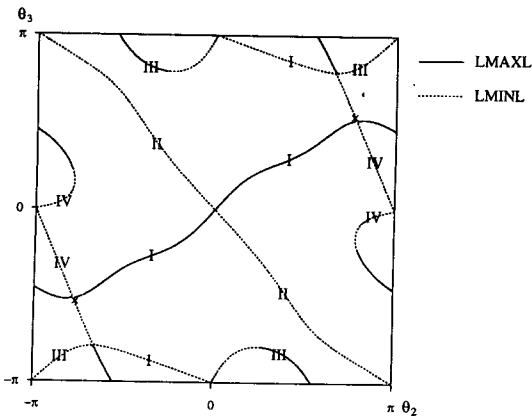


그림 2.  $H_1$ 에 대한 성능지수 제한계적  
Fig. 2. Measure constraint locus for  $H_1$ .

할 수 없는 자세가 된다. 그러나 그 밖의 특이점은 자세공간에서는 회피가 가능하며, 이러한 회피 가능한 특이점을 중심으로 궤적을 분류하면 그림과 같이 4개로 나눌 수 있겠다. 따라서 각 그룹은 MAXL과 MINL을 포함할 수 있으며 이러한 분류는 앞으로 가역 작업영역을 구분짓는데 사용되어질 것이다<sup>[14]</sup>.

지금까지 연구된 최적화식에 기초한 방법은 하나의 작업에 대한 일반해 집합에서 최대값과 최소값을 구분할 수 없다. 이러한 이유는 조건식인 식 (2)나 (13)은 단지 필요조건을 나타내기 때문이다. 그러나 본 논문에서 사용된 식 (8)은 경사투영법에 기초하고 있기 때문에 상수  $k$ 에 따라 최대값이나 최소값으로 관절값이 수렴하게 된다. 따라서  $H_1$ 과 같이 부작용의 최대화가 목적인 경우에는 실선으로 표시된 MAXL을 따라 작업을 수행하여야 한다. 만일 MINL을 따라 작업을 수행할 경우는 그림 2에서도 보듯이 중간에 특이점에 도달함으로써 더이상 작업을 수행할 수 없게 된다. 그리고 그림 2에서도 MAXL이 다다를 수 있는 궤적이 제한되고 있다. 이러한 영향은 최대화 조건이 로봇의 동작에 제한을 가한 결과로써 알고리즘 특이점의 하나이고, 가역 작업영역의 제한이라고도 말할 수 있겠다.

그런데 그룹 I의 MAXL을 보면 로봇의 베이스인 ( $x$ )에서 작업영역의 경계인 그림 2의 원점에 도달하고 있다. 이러한 의미는 만일 그룹 I의 MAXL 궤적을 따르면 거의 모든 작업영역에 걸쳐있는 작업을 특이점도 회피하면서 알고리즘적 특이점도 만나지 않는 궤적을 생성할 수 있음을 나타낸다. 이러한 결과는 국부적 경로정보를 이용함에도 불구하고 마치 전체적 경로정보를 이용한 경우의 최적해와 같은 특성을 가짐을 의미하므로 매우 놀라운 결과라 하겠다.

그림 2와 같은 자세공간에서의 해석이 보다 많은 주의를 요하게 됨으로 그림 2를 조작공간으로 투영하여 가역 작업영역을 살펴보기로 하겠다. 그런데 그림 2의 궤적은  $\theta_1$ 에 독립적인 특성이 있음을 언급하였다. 따라서 기구학식을 이용하여 제한궤적을 자세공간에서 조작공간으로 투영하기 위해서 임의로  $\theta_1=0$ 을 이용하도록 하겠다. 이는 단지 조작공간으로의 투영을 위하여 사용된 것이며 작업이 주어지면 거기에 따라  $\theta_1$ 의 값이 결정되어질 것이다.

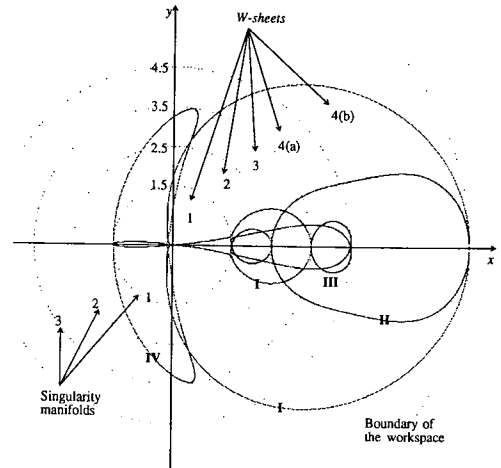


그림 3. 조작공간에서  $H_1$ 에 대한 성능지수 제한계적  
Fig. 3. Measure constraint locus for  $H_1$  on the operational space.

그림 3에서는 궤적을 MAXL과 MINL로 분리하지 않았는데 그림 2에서 보듯이 각 그룹에서 이 두 궤적은 작업영역에 대하여 대칭이므로 특별히 구분하지 않아도 될 것이다. 그리고 그림 3에 특이점으로 구성된 특이값 매니폴드(singularity manifolds)들을 나타내었다<sup>[15]</sup>. 일반적으로 평면 로봇의 경우에 자세공간에서 회피 가능한 특이값 매니폴드는  $\theta_1$ 에 무관하기 때문에 그림의 점선과 같이 원으로 나타난다. 그림 1과 같이 관절의 길이가 모두 다른 경우는 그림 3과 같이 3개가 존재하고 로봇의 작업영역 경계를 나타내는 매니폴드가 형성된다. 그리고 작업영역 경계에 대하여서는 자세공간에도 특이점을 회피할 수 없음은 앞에서 지적한 바와 같다.

그런데 조작공간은 제한궤적에 의하여 발생하는 가역 작업영역에 따라서 반지름 4.5로 이루어진 경계가 하나 더 생긴다. 따라서 그림 3과 같이 특이값 매니폴드로 경계 지워진 조작공간을 W-sheet로 나타내면 W-sheet 4

는 두개로 분리되어 진다. 그리고 그림 2나 그림 3에서 보듯이 로봇의 베이스에 가까운 작은 영역(반지름 0.15)에서 조작공간의 위상적 특성이 변화된다. 이러한 이유는 그룹 I과 IV가 로봇의 베이스에서 일치하지 않기 때문이나, 작은 영역이므로 위상적 특성을 따로 고려하지는 않았다.

그림 3을 통하여 각 그룹의 가역 작업영역을 구할 수 있는데 예를 들어 설명하면, 그룹 III의 경우는 반지름이 1.5에서 반지름 4.5 내에 존재하는 작업은 특이점을 회피하면서 수행할 수 있겠다. 다시 말해서 작업이 W-sheet 2에서 W-sheet 4(a)에 걸쳐있을 때는 그룹 II의 MAXL에서 초기값을 선정하면 식 (1)과 (13)의 조건식을 이용하거나 확장된 자코비안 방법을 이용하여 작업도 수행하면서 부작용인  $H_1$ 을 최소화하는 역기구학해를 결정할 수 있겠다. 이러한 결과는 식 (1)과 (2)에 기초한 방법에서의 국부적 주기성(locally cyclic)을 설명하는 결과라 할 수 있다 [3, 4].

그리고 그룹의 변화는 그림에서 보듯이 특이점을 만나게 된다. 즉 그림 3에서 특이점 매니폴드와 x축의 교점이 특이점이 되는데 이 점들은 각 그룹을 경계지우고 있음을 알 수 있다. 왜냐하면 그림 3은  $\theta_1=0$ 일 경우이므로 x축에서 3개의 관절이 일직선을 이루게 되어 특이점이 되는 것이다. 이러한 이유로 그룹의 이동은 불가능하게 되며 단지 그룹 I만이 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계까지를 수행할 수 있겠다. 따라서 조작성능지수인  $H_1$ 를 최대화하면서 거의 모든 작업영역에 걸쳐 있는 작업을 수행할 수 있는 역기구학 제적은  $\theta_2, \theta_3$ 가 대칭인 2개를 얻을 수 있다.

2.  $H_2$ 에 대한 성능지수 제한제적

특이점 회피를 위하여 제시된 식 (10)은 자코비안 행렬의 최소 고유치를 고려하는 것으로 만일 식 (10)의 값이 영에 가까와지면 특이값을 나타내게 된다. 그리고 식 (10)과 유사한 조건수(condition number) [10] 도 사용될 수 있으나 거의 같은 결과를 주게되고, 특이값 근처에서는 다른 고유치보다 최소 고유치의 변화가 크기 때문에 식 (10)이 특이점과의 거리를 나타낼 수 있는 것이다. 따라서  $H_2$ 에 대하여 성능지수 제한제적을 집합  $M_2$ 로 나타낼 수 있게 된다.

$$M_2 = \{ \theta : N^T \nabla H_2 = 0, \text{ for } \theta \in T^n \} \quad (14)$$

앞의 예에서와 같이 식 (8)을 이용하여 제한제적을 생성하면 그림 4와 같은 결과를 얻게 된다. 그림 4에서도 성능지수  $H_2$ 와  $N$ 이  $\theta_1$ 에 독립적이기 때문에  $(\theta_2 - \theta_3)$ 를  $T^3$ 에 대한 자세공간으로 이용할 수 있다.

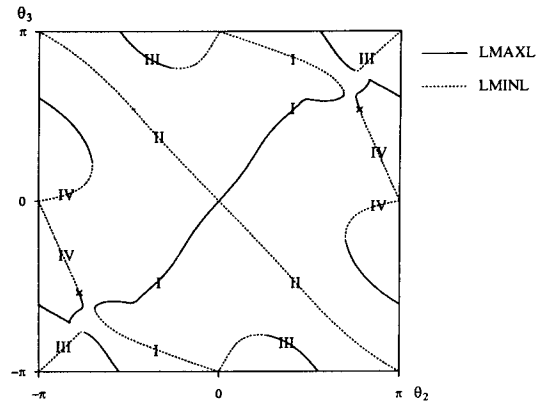


그림 4.  $H_2$ 에 대한 성능지수 제한제적  
Fig. 4. Measure constraint locus for  $H_2$ .

그림 4는 앞에서 얻은 그림 2와 유사한 제적을 보이나 조작공간의 위상적 특성은 많이 변화되었음을 알 수 있다. 이러한 위상적 특성과 가역 작업영역의 관찰을 위하여 그림 4에 제적을 MAXL과 MINL로 분리하였고 그룹도 나누었다. 그런데 그림 4를 보면 그림 1과는 달리 로봇의 베이스가 그룹 I에 존재하지 아니하고 그룹 IV에 위치하고 있음을 알 수 있다. 그리고 특이점 회피를 위한 성능지수라면 특이점의 특성을 명확하게 구분하여야 하는데 그림 4는 그림 2에 비하여 부정확한 특성을 갖는다. 이러한 특성은 특이점 매니폴드에 대하여 특이점을 회피하는 일반해 집합을 그림 4에 같이 도시하면 명확하나 이러한 특성은 조작공간에서 극명하게 나타나기 때문에 여기서는 나타내지 않았다. 그리고 가역 작업영역도 제한제적에 의하여 여러개로 분리되어진다.

실제로 성능지수  $H_1$ 은 다음과 같이 표현되는데

$$H_1 = \prod_i^m \sqrt{\lambda_i(JJ^T)} \quad (15)$$

이는 조작성 타원(manipulability ellipsoid)의 체적을 나타내고 있다 [11]. 그런데  $H_2$ 는 식 (15)에서 단지 최소 고유치만을 고려한 것으로  $H_2$ 의 최대값은  $H_1$ 의 최대값보다는 물리적 의미가 적게 된다. 그러나 한편으로는 식 (10)으로 표현된 성능지수는 관절속도의 상한값을

$$\| \dot{\theta} \| \leq \frac{1}{\lambda_{min}(J)} \| \dot{x} \| \quad (16)$$

와 같이 설정하게 되는데 식 (16)에서  $\lambda_{min}(J) = \sqrt{\lambda_{min}(JJ^T)}$ 를 의미하고 있다. 따라서 특이점을 회피하기만 하면 된다는 의미에서는  $H_2$ 도 의미가 있는 것이다.

가역 작업영역을 보다 잘 관찰하기 위하여 앞에서와 같

이 제한계적을 조작공간으로 투영해 보자. 그러면 그림 5와 같은 결과를 얻을 수 있으며, 이 때도  $\theta_1=0$ 을 이용하였다. 그림 5를 보면  $H_2$ 에 대한 제한계적은 변화가 급격하게 이루어짐을 알 수 있다. 이러한 결과는 성능지수  $H_2$ 를 최적화하기 위하여서는 관절자세의 변화가 많이 필요한 특성을 나타내고 있는데 이 때는 큰 관절속도를 필요로 하므로 좋은 특성은 아니라 할 수 있다.

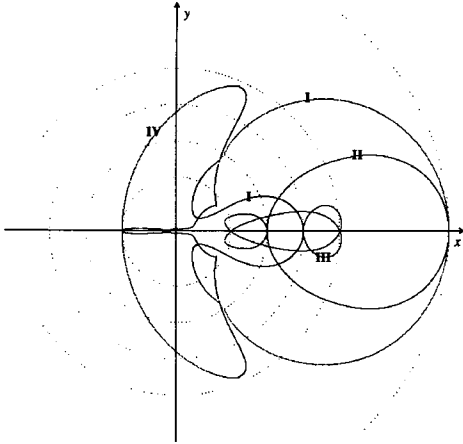


그림 5. 조작공간에서  $H_2$ 에 대한 성능지수 제한계적  
Fig 5. Measure constraint locus for  $H_2$  on the operational space.

그림 5에서는 그림 2에서의 그룹 I과 같이 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계에 도착하는 궤적이 존재하지 않는다. 따라서 로봇의 베이스에 가까운 영역(반지름 65)에서는 그룹 IV만이 작업을 수행할 수 있으나 그룹 IV의 가역 작업영역은 W-sheet 4(a)를 벗어나지 못한다. 그리고 가역 작업영역이 그림 5에서 보듯이 특이값 메니폴드와 일치하지 않는다. 이와 같은 결과는 단지 최소 고유치만을 고려한 결과라 할 수 있으며 부작업  $H_2$ 를 최대화하면서 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계지점 근처까지 다양한 작업을 수행할 수 있는 관절계적은 존재하지 않고 단지 반지름 0.65 밖의 영역에서는 그룹 I의 MAXL을 이용하여 자세가 대칭인 2개의 역기구학해를 구할 수 있겠다.

3.  $H_3$ 에 대한 성능지수 제한계적

성능지수  $H_3$ 는 단지  $(JJ^t)^{-1}$ 의 대각항(diagonal element)만을 고려하는 것으로  $H_1$ 에 비해 단지 의사적 산술평균을 나타내고 있다. 따라서 앞에서 고려된 성능지수 보다는 특성이 나쁠 것이라는 예상을 할 수 있는데 본 논문에서 제안된 성능지수 제한계적을 이용하여 위상적 특

성을 관찰해 보기로 한다. 식 (11)로 표현된  $H_3$ 에 대한 성능지수 제한계적은 집합  $M_3$ 로 정의될 수 있겠다.

$$M_3 = \{ \theta : N' \Delta H_3 = 0, \text{ for } \theta \in T^n \} \quad (17)$$

제한계적 생성을 위한 식 (8)을 이용하여  $H_3$ 에 대하여 계적을 구하면 그림 6과 같이 나타나게 되는데  $H_3$ 의 경우는 특이점 회피를 위하여서는 최소화하여야 하므로 그림 6에서 MINL이 실질적으로 특이점 회피를 위한 계적으로 사용될 수 있다. 따라서  $H_3$ 의 경우에는 MAXL이 특이점에 도달하게 되고 로봇의 베이스가 그룹 IV에 존재한다. 따라서 앞의 예인  $H_2$ 의 경우와 마찬가지로 로봇의 베이스부터 작업영역의 경계점까지를 도달하는 궤적이 존재하지 않는다. 그리고 로봇의 작업영역의 경계에 다다른 궤적인 그룹 I은 로봇의 베이스에는 도달하지 못하고 단지 반지름 0.3 밖의 작업에 대해서만 특이점을 회피하는 관절계적을 2개 구할 수 있다.

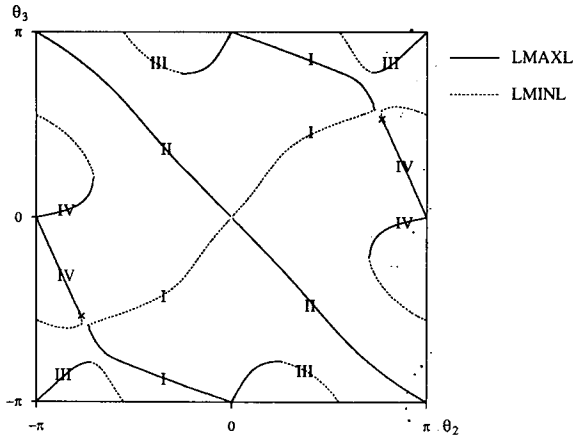


그림 6.  $H_3$ 에 대한 성능지수 제한계적  
Fig. 6. Measure constraint locus for  $H_3$ .

그리고 조작공간으로 제한계적을 투영하면 그림 7과 같은 계적을 얻을 수 있는데 여기서 관찰할 수 있는 것은  $H_3$ 에 대한 제한계적은 특이점과는 약간의 차이를 갖는다는 것이다. 다시 말하면 각 그룹의 가역 작업영역이 특이점 메니폴드와는 약간의 차이가 있다. 이러한 결과는 단지 대각항만을 고려한 결과이며 로봇의 베이스에서부터 작업영역의 경계점까지 도달하는 궤적은 존재하지 않게 된다. 그러나 앞에서와 같이 각 그룹은  $x$ 축에서 특이점을 나타내고 있으므로 작은 작업의 경우에는 특이점을 회피할 수 있는 성능지수로 쓰일 수도 있겠다.

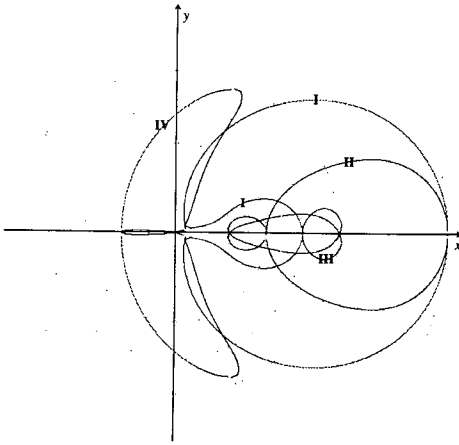


그림 7. 조작성공장에서 H<sub>3</sub>에 대한 성능지수 제한계적  
Fig. 7. Measure constraint locus for H<sub>3</sub> on the operational space.

4. H<sub>4</sub>에 대한 성능지수 제한계적

자코비안 행렬에서 랭크가 m인 소행렬식의 수와 그 크기를 모두 고려함으로써 특이점 회피를 하는 성능지수로 H<sub>4</sub>가 제안 되었다. 그러면 성능지수 H<sub>4</sub>의 특성을 관찰하기 위하여 성능지수 제한계적을

$$M_4 = \{ \theta : N^i \Delta H_4 = 0, \text{ for } \theta \in T^n \} \quad (18)$$

로 정의하도록 한다.

식 (18)로 표현된 관절 집합인 제한계적은 식 (8)을 이용하면 구할 수 있는데 그 결과를 그림 8에 나타내었다. 여기서도 앞의 예와 같이 제한계적의 분리가 가능한데 그림 8에는 MINL 계적이 보이지 않게 된다. 앞에서 설명했듯이 MINL 계적은 최소값 계적으로 제한식인  $N^i \nabla H_4 = 0$ 을 만족하는 관절값 중에서 최소값을 이루는 계적이 된다. 그러나 H<sub>4</sub>의 경우는 주어진 작업에 대하여 최소값에서 미분이 불가능한 점이 된다. 따라서 경사투영법과 같이 경사함수를 이용할 경우에는 최소값을 구할 수 없게 되어 그림 8에 나타낼 수 없게 된다. 그러므로 이 경우는 그림 8에 있는 모든 계적이 H<sub>4</sub>를 최대화하는 계적이 된다.

식 (12)로 표현된 성능지수 H<sub>4</sub>는 랭크가 m인 모든 소행렬식을 고려함으로써 특이점을 정확하게 묘사하게 되는 데 이러한 특성은 그림 8에서 보듯이 각 그룹이 정확하게 특이점에서 끝나고 있음을 봐도 알 수 있다. 그리고 로봇의 베이스는 그룹 I, III과 IV의 교점에 위치한다. 또한 관절의 제한각을 무시한다면 그룹 I과 IV는 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계점에 도달하게 되어 대칭인 자세를 고려하면 4개의 계적이 존재한다.

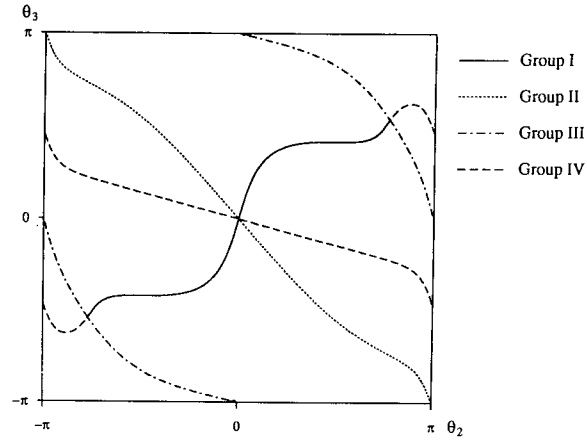


그림 8. H<sub>4</sub>에 대한 성능지수 제한계적  
Fig. 8. Measure constraint locus for H<sub>4</sub>.

그리고 자세공간에서 각 그룹이 정확하게 특이점에서 분리되기 때문에 위상적 특성을 단지 특이값에 대한 역기 구함으로 분리되어지고 제한계적에 의하여 더이상 제한되지 아니한다. 이러한 특성은 특이점 회피를 위한 성능지수인 경우 특이값과 상관 없는 위상적 특성을 분리하는 것은 단지 부작업의 최적화를 위하여 알고리즘에 의하여 발생하는 것이므로 그림 8과 같이 특이값과 성능지수 제한계적의 위상적 특성이 동일하게 나타나는 성능지수가 가장 이상적이라 하겠다.

특이값과의 관계나 가역 작업영역의 효과, 그리고 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계점에 도달하는 계적의 존재성 등을 자세하게 관찰하기 위하여 그림 8의 계적을 조작성공장으로 투영해 보자. 그러면 그림 9와 같은 계적을 얻을 수 있겠다. 그림 9에서 계적의 특성을 관찰하면 각 그룹의 제한계적은 단지 특이값 메니폴드에 의하여 제한되며 최적화를 위한 알고리즘적 제한에 의하여 더 이상 분리되지는 않고 있다. 그리고 그룹 I과 IV의 경우가 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계점까지 H<sub>4</sub>를 최적화하는 계적을 생성하고 있다. 이러한 결과는 참고 문헌<sup>[6]</sup>에서의 실험 결과를 명백하게 설명해줄 수 있다.

따라서 지금까지의 결과를 비교하면 성능지수 H<sub>1</sub>과 H<sub>4</sub>가 비교적 특이점 회피를 위한 성능지수로 우수하며 성능지수 H<sub>1</sub>의 경우는 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계점에 도달하는 계적이 2개가 존재하나 H<sub>4</sub>의 경우는 4개가 존재한다. 지금까지 연구된 성능지수 제한계적을 이용한 각 성능지수의 특성화는 기존의 연구 결과를 이상적으로 설명해 주고 있다. 이것은 알고리즘에 의하여 발생하는 최적화 계적을 모든 자세공간에서 고려함으로써 가능할 수 있었다.

결론적으로 지금까지 고려된 계적의 특성을 정리하면



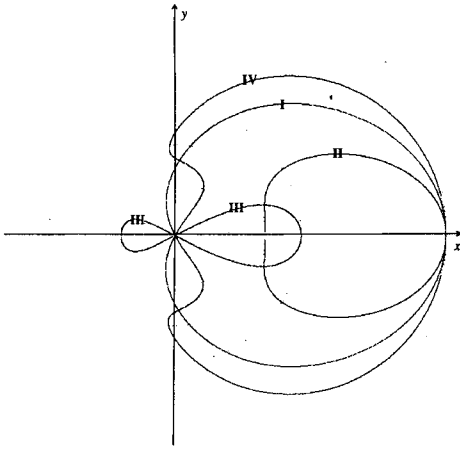


그림 9. 조작공간에서  $H_4$ 에 대한 성능지수 제한계적  
Fig. 9. Measure constraint locus for  $H_4$  on the operational space.

성능지수를 최적화하는 계적중에서 로봇의 베이스에서 작업영역의 경계에 이르는 계적이 가역 작업영역의 제한을 피하면서 매우 큰 작업을 수행하는 특성을 갖는다. 그런데 이러한 계적은 사용되는 성능지수에 따라서 2개나 4개가 존재하며 어떠한 성능지수에서는 로봇의 베이스 근처에서는 존재하지 않는다. 본 논문에서 연구된 성능지수 중에는  $H_1$ 과  $H_4$ 의 경우에는 이와 같은 계적을 찾는 일반적인 방법이 있다면 식 (1)과 (2)를 수치적으로 풀거나 확장된 야코비안 방법을 이용하여 미분 방정식으로 역기구학해를 구하는 방법이 비록 국부적 경로정보를 이용하지만 전체적 경로정보를 이용한 결과와 같이 작업의 경로 중간에 기구학적 특이점이나 알고리즘적 특이점을 회피할 수 있겠다. 성능지수 제한계적을 이용하여 주기작업을 수행할 경우에 발생하는 역기구학 알고리즘의 제한점은 다른 논문에서 충분히 논의되었다 [16, 17].

우리는 주어진 작업에 대한 일반해 집합 중에서 성능지수는 여러개의 최대값이나 최소값을 갖고 있음을 알고 있다. 따라서 제한계적은 이러한 평형점을 표시하는데  $H_1$ 과  $H_4$ 에서 중요하게 언급된 그룹 I의 MAXL은 이러한 평형점 중에서 전체적 최대점이 된다. 따라서 우리는 주어진 작업에 대한 일반해 집합 중에서 전체적 최대값을 식 (1)과 (2)의 초기값으로 이용하면 거의 모든 작업영역에 걸쳐있는 작업에 대하여 특이점을 회피하는 계적을 생성할 수 있다. 이러한 결과는 성능지수에 대한 최적화 조건을 전체 자세공간에서 해석함으로써 가능하게 되었으며 지금까지 연구된 여유자유도 로봇의 경로계획에 대한 결과와 비교하면 매우 놀라운 결과라 하겠다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 지금까지 제시된 특이점 회피를 위한 성능지수를 특성화하기 위하여 새로운 개념인 성능지수 제한계적을 제시하였으며, 이러한 제한계적을 이용하여 4개의 성능지수에 대하여 자세공간과 조작공간에서 최적화 조건을 만족하는 계적의 위상적 특성을 연구하였다. 그리고 각각의 성능지수에 대한 가역 작업영역과 특이값과의 관계를 연구함으로써 실질적 의미에서 각 성능지수의 특성을 비교하였다.

그리고 비록 국부적 경로정보를 이용하지만 마치 전체적 경로정보를 이용하는 경우와 같이 최적해를 얻을 수 있는 일반적인 방법론에 대하여 설명하였다. 또한 이와 같은 최적해를 주는 계적의 특성을 각 성능지수에 대하여 비교 연구함으로써 여유자유도 로봇의 경로계획에서 발생하는 여러가지 문제점들에 대한 해답을 제시하였다. 다만 본 논문에서의 결과는 링크 길이가 서로 다른 경우에 대하여 수행하였으며 만일 링크 길이의 조합이 달라 진다면 특이값 메니폴드의 수가 변화하게 되어 성능지수 제한계적이 모습도 변화할 것이다. 그러나 본 논문의 연구 결과를 토대로 변화를 충분히 예상할 수 있을 것이다.

#### 參 考 文 獻

- [1] C.A. Klein, "Use of Redundancy in the Design of Robotic System," in *Robotics Research: The 2nd Intern. Symp.*, ed. H. Hanafusa and H. Inoue, pp. 207-214, 1985.
- [2] C.A. Klein and C.H. Huang, "Review of Pseudoinverse control for Use with Kinematically Redundant Manipulators," *IEEE Trans. Sys., Man, and Cyber.*, vol. 13, no. 2, pp. 245-250, 1983.
- [3] J. Baillieul, "Kinematic Programming alternatives for Redundant Manipulators," in *Proc. IEEE Intern. Conf. on robotics and Automation*, pp. 722-728, 1985.
- [4] P.H. Chang, "A closed-form solution for the control of manipulators with kinematically redundancy," in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 9-14, 1986.
- [5] A.A. Maciejewski, "Kinetic limitations of the Use of redundancy in robotic manipulators," in *Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 113-118, 1989.
- [6] J. Baillieul, "A constrained oriented approach to inverse problems for kinematically redundant mainpulators," in *Proc. IEEE Int. Conf.*

on *Robotics and Automation*, pp. 1827-1833, 1987.

[7] D.R. Baker and C.W. Wampler II, "On the inverse kinematics of redundant manipulators," *Int. J. Robotics Research*, vol. 7, no. 2, pp. 2-21, 1988.

[8] D.N. Nenchev, "Redundancy resolution through local optimization: a review," *Int. J. Robotic Systems*, vol. 6, no. 6, pp. 769-798, 1989.

[9] D.H. Gottlieb, "Robots and topology," in *Proc. IEEE Int. conf. on Robotics and Automation*, pp. 1689-1691, 1986.

[10] C.A. Klein and B.E. Blaho, "Dexterity measures for the design and control of kinematically redundant manipulator," *Int. J. Robotics Research*, vol. 6, no. 2, pp. 72-83, 1987.

[11] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robotic manipulators with redundancy," in *Robotics Research: The 1st Intern. Symp.*, ed. M. Brady and R. Paul, pp. 735-748, 1984.

[12] P.H. Chang, "A dexterity measure for kinematic control of redundant manipulators," in *Proc. American Control Conf.*, pp. 496-502, 1989.

[13] W.J. Chung, W.K. Chung, and Y. Youm, "Inverse kinematics of planar redundant manipulators using virtual link and displacement distribution schemes," in *Proc. IEEE Int. Conf. on robotics and Automation*, pp. 926-932, 1991.

[14] C.W. Wampler II, "Winding number analysis of invertible workspaces for redundant manipulators," *Int. J. Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 22-31, 1988.

[15] J.W. Burdick, "On the inverse kinematics of redundant manipulators: Characterization of the self-motion manifolds," in *Proc. IEEE Int. Conf. on robotics and automation*, pp. 264-270, 1989.

[16] 최병욱, 원종화, 정명진, "여유자유도 로봇에 있어서 성능지수 제한체적을 이용한 부작업의 성능에 관한 연구," 전자공학회논문지, 제28-B권, 10호, pp. 761-770, 1991.

[17] B.W. Choi, J.H. Won, and M.J. Chung, "Manipulability constraint locus for a redundant manipulator," in *Proc. IEEE/RSJ Int. Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS'91)*, Japan, pp. 167-172, 1991.

著 者 紹 介



**崔 秉 旭 (正會員)**  
 1986년 한국항공대학교, 전자공학과 졸업. 1988년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사졸업. 1992년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사졸업. 현재 금성산전(주) 연구소 연구단 선임연구원. 주관심 분야는 로봇틱스, 공장자동화 및 Elevator시스템등임.

**元 鍾 華 (正會員)** 第28卷 B編 第10號 參照  
 현재 한국과학기술원 전기및 전자공학과 박사과정

●

**鄭 明 振 (正會員)** 第26卷 第7號 參照  
 현재 한국과학기술원 전기및 전자공학과 교수