

여유자유도 로봇에 있어서 광역의 경로정보를 이용한 주기작업의 최적해

(Optimal Solution of a Cyclic Task Using the Global Path Information for a Redundant Robot)

崔秉旭*, 元鍾華*, 鄭明振*

(Byoung Wook Choi, Jong Hwa Won, and Myung Jin Chung)

要 約

본 논문은 여유자유도 매니퓰레이터에 대하여 전체 작업구간 동안에 여유자유도의 광역 최적화 방법을 제안한다. 적분형태의 가역함수에 대하여 변분학에 기초하여 2차 미분방정식 형태의 필요조건을 유도하며 주기작업에 대하여 보존적 관절운동을 위한 주기적 경계조건을 논한다. 2점 경계치 문제를 초기값 조절 문제로 변환하였고, 경사투영법을 이용하여 광역의 최적해를 제공하는 수치적 탐색방법을 제안한다. 초기의 관절속도를 여유자유도로 매개변수화 하여 단지 여유자유도 만큼의 탐색이 필요하게 된다. 그리고 수치적 예를 통하여 비호모토픽 극한해와 매니퓰레이터의 동역학을 고려하여 제안된 방법의 일반성을 보이도록 한다.

Abstract

This paper proposes a method for the global optimization of redundancy over the whole task period for a kinematically redundant robot. The necessary conditions based on the calculus of variations for an integral type cost criterion result in a second-order differential equation. For a cyclic task, the periodic boundary conditions due to conservativity requirements are discussed. We refine the two-point boundary value problem to an initial value adjustment problem and suggest a numerical search method for providing the conservative global optimal solution using the gradient projection method. Since the initial joint velocity is parameterized with the number of the redundancy, we only search the parameter value in the space of as many dimensions as the number of degrees of redundancy. We show through numerical examples that multiple nonhomotopic extremal solutions and the generality of the proposed method by considering the dynamics of a robot.

I. 서 론

일반적인 산업용 로봇은 주어진 작업을 수행하는

데 필요한 최소의 관절을 가지고 있다. 이러한 로봇을 기구적으로 여유자유도(redundant degree of freedom)를 갖지 않는 로봇이라고 한다. 그러나 여유자유도가 없는 로봇을 이용하여 작업을 수행할 때는 기구적 특이점(kinematic singularity)이 존재하고 작업공간에 존재하는 장애물들로 인하여 제어시에 문제점을 수반한다. 따라서 기구적 특이점이나 작업공

*正會員, 韓國科學技術院 電氣 및 電子工學科

(Dept. of Electrical Eng., KAIST)

接受日字: 1991年 6月 13日

간에서 장애물을 피하기 위하여 여유자유도 로봇 (redundant robot)에 대한 연구가 증대되고 있다.¹¹⁾ 여유자유도 로봇에서는 주어진 하나의 위치에 대하여 역기구학해는 많이 존재하여 작업을 수행하면서 부가적인 목적을 수행할 수 있다. 부목적을 수행하는 경로계획에 대한 연구는 광역의 경로정보를 이용하거나 국부적 경로정보(local path information)를 이용할 수 있다.

국부적 경로정보를 이용한 순시적 최적화 방법으로는 의사역행렬(pseudoinverse)에 기초한 방법과,¹²⁾ 부가적인 필요조건(necessary condition)을 이용하여 미지수와 조건식을 일치하여 해를 구하는 방법이 있다.¹³⁾ 그러나 이러한 방법들은 여러가지 단점들이 지적되어 왔는데, 의사역행렬에 기초한 방법은 주기작업에 대한 보존적 운동(conservative motion)에 문제가 있다. 그리고 필요조건식을 이용하는 방법에서는 역기구학해의 존재성과 알고리즘에 의해 발생하는 특이점(algorithmic singularity)에 관한 연구가 부가적으로 필요하다.

반면에 광역의 경로정보(global path information)를 이용한 자세계획으로는 여유자유도를 매개변수화하여 전 경로에서 토크의 최적화에 대한 연구와¹⁴⁾ Pontryagin의 최대정리(Pontryagin's maximum principle)를 이용하여 여유자유도 제어 문제를 최소값 탐색문제(minimum value search problem)로 바뀌어서 연구되기도 하였다.¹⁵⁾ 또한 광역의 경로정보를 이용한 주기적 로봇 운동에 대한 연구들은 많이 진행되었다. 변분학(calculus of variations)에 기초하여 감소된 차수의 역기구학 알고리즘이 제시되었고 주기작업에서 관절의 보존적인 운동을 위한 주기적 경계조건(periodic boundary condition)에 대하여 논의되었다. 그리고 운동에너지에 대한 광역 최적화 문제에서 주기작업에 대한 필요조건도 논의되었고¹⁶⁾ 국부적 극한해(local extremal solution)를 피하기 위하여 최적해의 근사적 해를 구하는 방법에 대한 연구도 발표되었다.¹⁷⁾ 그러나 광역의 경로정보를 이용하여 최적해를 구하는 지금까지의 방법들은 단지 필요조건에 의하여 주기적 경계조건을 만족하는 수치적 해라고 할 수 있다.

본 논문에서는 보존적 관절운동을 위하여 일반적인 적분형태의 가격함수를 이용한 여유자유도 로봇의 광역 최적화 방법을 제시한다. 광역 최적해를 제공하기 위한 필요조건식은 변분학을 이용하여 구해지며 관절의 수가 n 인 경우 n 변수의 2차 미분방정식이 된다. 따라서 하나의 해를 결정하기 위한 경계조건이 필요하게 되며 광역 최적해의 결정은 이와같은

경계조건 선정 문제로 바뀌게 되며 작업이 주기적인 경우에 경계조건은 주기적 경계조건으로 변환되는데 본 논문에서는 효율적인 최적해의 선정을 위하여 주기적 경계조건 문제를 초기값 조절 문제로 변환한다. 만일 초기자세가 주어지면 주기적 경계조건을 만족하는 최적해를 구하는 문제는 초기 관절속도를 구하는 문제가 된다. 그리고 효과적인 초기 관절속도의 선정을 위하여 여유자유도 만큼의 변수로 매개변수화 함으로써 최적화 문제는 매개변수의 탐색 문제가 됨으로 매개변수의 반복적 개선을 위하여 수치적 탐색방법(numerical search method)을 제안한다.

또한 수치적 예를 통하여 동일한 초기자세에서 극한해와 최적해를 $(\theta_3 - \theta_2)$ 영역에서 작업에 대한 일반해(homogeneous solution) 집합과 함께 해석하도록 한다. 그리고 초기 관절속도에 따른 극한해의 특성을 논의한다. 또한 제안된 방법의 일반성을 보기 위하여 가격함수의 적분인자는 운동에너지와 관절속도 노름(norm)에 적용하도록 하겠다.

광역의 경로정보를 이용하여 적분형태의 가격함수를 최적화하는 필요조건과 경계조건을 II장에서 기술하며 주어진 초기자세에서 주기적 작업을 수행하는 효과적인 역기구학 알고리즘을 III장에서 제시한다. 그리고 IV장에서는 제안된 방법을 3축 평면 여유자유도 로봇(3-link planar redundant robot)에 적용한 수치적 예를 보이고 V장에서 결론을 맺도록 한다.

II. 여유자유도의 광역 최적화

1. 최적화 필요조건

광역의 경로정보를 이용한 여유자유도 로봇의 경로계획 문제는 다음과 같이 기구학식을 구속식으로 하는 적분형태의 가격함수(cost function)를 최소화하는 관절 궤적을 구하는 문제로 형식화할 수 있다.

$$\min r = \int_{t_0}^{t_1} p(\theta, \dot{\theta}, t) dt \quad (1)$$

$$\text{subject to } x(t) = f(\theta(t)) \quad (2)$$

여기서 $x=f(\theta)$ 는 로봇 기구학식이며 $\theta(t) \in R^n$ 는 관절벡터이고 $x(t) \in R^m$ 는 로봇 팔의 위치와 방향을 나타낸다. 그리고 t_0 와 t_1 는 경로의 초기와 최종시간을 의미한다. 최적화 필요조건을 유도하기 위하여 Lagrange 곱수 $\lambda \in R^m$ 을 도입하여 Lagrange 함수를 정의하는데 일반적으로 Lagrange 함수를 이용하면 등호의 제한된 문제를 제한 없는 문제로 변형시킬

수 있다. 따라서 적분형태의 가격함수를 최소화하는 필요조건은 Lagrange 함수를 이용하여 정의된 새로운 가격함수의 1차 변분을 영으로 하는 조건식에서 유도된다.

새로운 가격함수는

$$r^* = \int_{t_0}^{t_1} L(\theta, \dot{\theta}, \lambda, t) dt \quad (3)$$

로 주어지며, 여기서 Lagrange 함수는 $L(\theta, \dot{\theta}, \lambda, t) = p(\theta, \dot{\theta}, t) + \lambda^T(x - f(\theta))$ 로 표현된다. 특정된 최종시간에 대하여 수식(3)의 1차 변분은 다음과 같다.

$$\delta r^* = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right]^T \delta \theta dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(t_1) \right]^T \delta \dot{\theta}(t_1) - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(t_0) \right]^T \delta \dot{\theta}(t_0) = 0 \quad (4)$$

따라서 식(4)에서 임의의 $\delta \theta$ 에 대하여 광역 최적화를 위한 필요조건은 아래의 Euler-Lagrange 방정식으로 주어진다.⁹⁻¹¹⁾

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (5)$$

본 논문에서는 적당한 목적함수 $p(\theta, \dot{\theta}, t)$ 로써 운동에너지와 관절값 함수의 합인 형태를 이용 하도록 한다.

$$p(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\dot{\theta}) \dot{\theta} + \rho g(\theta) \quad (6)$$

여기서 ρ 는 스칼라 값이고, $g(\theta)$ 는 자세 즉 관절의 함수로써 조작성능지수나 장애물 근처에서 큰 값을 갖는 벌점함수(penalty function) 등이 될 수 있다.⁹⁾ 만일 $M \in R^{n \times n}$ 이 자세에 무관한 대각행렬(diagonal matrix)이면 관절속도에 가중치로써 쓰일 수 있고 운동 에너지를 최소화하고자 할 때는 $M(\theta)$ 는 로봇의 동역학식에서의 관성행렬(inertial matrix)이 되어야 하며 이때는 전체 경로에서 운동에너지를 최소화함에 따라 로봇의 동적 특성을 향상시킬 수 있다.^{10,11)}

목적함수 (6)에 대한 필요조건식(5)는 다음과 같다.

$$M\ddot{\theta} + \dot{M}\dot{\theta} - \rho g_{\theta} - J^T \lambda - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^T M \dot{\theta} \right) = 0 \quad (7)$$

여기서 $J \in R^{m \times n}$ 은 기구학식(2)의 자코비안 행렬(Jacobian matrix)이며 g_{θ} 는 $g(\theta)$ 의 경사벡터(gradient vector)이다. 식(7)은 관절가속도의 함수이므로 $x = J\theta$ 를 일차 미분하면 가속도로 표현된 구속함수는

$$\ddot{x} - \ddot{J}\theta - J\ddot{\theta} = 0 \quad (8)$$

와 같다. 식(7)과 (8)을 이용하여 M 이 θ 의 함수일 때 Euler-Lagrange 식을 만족하는 관절 제적은 Lagrange 곱수를 제거하면¹⁰⁾

$$\ddot{\theta} = J_{\dot{\theta}}^T (\ddot{x} - \ddot{J}\dot{\theta}) - (I - J_{\dot{\theta}}^T J) M^{-1} (M\dot{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^T M \dot{\theta} \right) - \rho g_{\theta}) \quad (9)$$

로 주어진다. 즉(7)을 (8)과 연립하여 λ 에 대하여 정리한 후 (7)에 대입하여 (9)를 얻는다. 여기서 $I \in R^{n \times n}$ 는 단위 행렬이고, $J_{\dot{\theta}} = M^{-1} J^T (J M^{-1} J^T)^{-1} \in R^{m \times n}$ 는 M 으로 가중된 자코비안 행렬의 의사역행렬이다.

여기서 자세공간에서 표현된 로봇의 동역학식을 고려하면

$$T = M(\theta) \ddot{\theta} + V_{cc}(\theta, \dot{\theta}) + V_r(\theta, \dot{\theta}) + G(\theta) \quad (10)$$

과 같다. 여기서 $T \in R^n$ 는 구동기의 토크나 힘 벡터이고, $M(\theta)$ 는 로봇의 관성행렬이다. 그리고 V_{cc}, V_r 와 $G \in R^n$ 는 각각이 코리올리스와 원심 가속도(Coriolis and centrifugal acceleration)와 마찰력(friction), 그리고 중력(gravity)에 의한 항이 된다. 로봇의 동역학을 나타내는 식(10)에서 시스템의 동적 운동은 일반화된 좌표계를 이용하여 시스템에 저장된 일과 에너지로써 표현되는데 $\dot{M}\dot{\theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^T M \dot{\theta} \right)$ 는 동역학식에서의 V_{cc} 와 같게 된다.¹²⁾ 따라서, 식(9)에서 $M(\theta)$ 가 동역학식의 관성행렬이면 식(9)는

$$\ddot{\theta} = J_{\dot{\theta}}^T (\ddot{x} - \ddot{J}\dot{\theta}) - (I - J_{\dot{\theta}}^T J) M^{-1} (V_{cc} - \rho g_{\theta}) \quad (11)$$

으로 표현된다. 자코비안 행렬 $J \in R^{m \times n}$ 이 특이행렬이 아니면 M 으로 가중된 의사역행렬 $J_{\dot{\theta}}$ 이 존재하며, J 가 특이행렬이면 이 자세에서는 특이점이 된다.

2. 경계조건

최적화 필요조건식은 n 변수로 이루어진 2차 미분 방정식으로 주어졌다. 따라서 유일한 최적해를 선정하기 위해서는 $2n$ 개의 경계조건이 필요하게 되나 기구학식은 작업을 수행하기 위하여 만족하여야 함으로 자체적으로 명백한 경계조건은 아래와 같다.

$$x(t_0) = f(\theta(t_0)), \quad t_0 = t_0, t_1 \quad (12)$$

이러한 명백한 경계조건 외에 중요한 경계조건으로는 자연적 경계조건(natural boundary condition)과 주기적 경계조건이 있다.¹¹⁾ 자연적 경계조건은 기구학적 제한을 제외하면 초기나 최종시간에서 관절자세에 대한 아무런 조건도 따르지 않는다. 그러므로 변분식(4)에서 $\delta \theta(t_0)$ 는 제거되지 않으며 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}(t_b)} \right]^* \delta \theta(t_b) = 0 \quad (13)$$

식(13)으로부터 $\delta \theta(t_b)$ 는 자코비안 행렬의 선형조합에 직교하여야 함을 알 수 있다. 따라서 자연적 경계조건은 자코비안 식의 관절속도 최소값과 같으며

$$\dot{\theta}(t_b) = J_N^* \dot{x}(t_b) \quad (14)$$

으로 표현된다. 식(14)의 중요성은 다른 어떠한 경계조건이 주어진 경우보다 최소의 가격함수를 준다는 점에 있다. 그러나 만일 작업이 $x(t_1) = x(t_0)$ 과 같이 주기적일 경우 경계조건(14)에 의하여 구한 해는 $\theta(t_1) = \theta(t_0)$ 의 주기적 조건을 만족하지 못한다. 이러한 비 보존적인 관절운동은 여유자유도 로봇 제어시의 문제점으로 많은 문헌에서 지적되어 왔다.^{[8]-[12]}

따라서 주기작업에 대한 관절운동의 보존성을 위하여 $\theta(t_1) = \theta(t_0)$ 의 경계조건을 부과하면 임의의 관절값에 대하여 양끝점 t_0 와 t_1 에서 식(4)의 1차 변분은 동일하여야 한다. 이 조건에서 널공간 투영연산자를 이용하면 $\theta(t_1) = \theta(t_0)$ 형태의 경계조건이 필요하게 된다. 그러므로 식(11)에 주기적 경계조건 $\theta(t_1) = \theta(t_0)$ 와 $\theta(t_1) = \theta(t_0)$ 을 만족하는 해를 구하면 주기작업에 대하여 보존적 관절운동을 하는 최적해를 구할 수 있다.^{[11]-[12]} 일반적으로 2n개의 경계조건에 대한 최적화 문제가 형성될 수 있으나 Wang^[11]이 지적했듯이 보존적 관절운동을 위하여 주기적 경계조건을 만족하는 최적해의 선정은 상당한 어려움이 따른다. 따라서 본 논문에서는 2점 경계치 문제를 주어진 초기 자세에 대하여 경계조건 하나인 초기 관절속도 $\dot{\theta}(t_0)$ 를 찾는 문제로 바꾸도록 한다. 그러면 주기적 경계조건을 만족하기 위하여 양끝점에서 관절값은 제한되며 가격함수 (1)을 최소로 하면서 경계조건을 만족하는 관절속도를 선정하여야 한다. 다음 장에서는 이와 같은 조건에서 최적해를 선정하기 위한 수치적 탐색방법에 대하여 논한다.

III. 수치적 탐색방법

로봇 팔의 속도와 관절속도의 관계는 자코비안식 $\dot{x} = J\dot{\theta}$ 에 의하여 투영되며 만일 J가 정방행렬이고 특이행렬이 아니면, 원하는 팔의 운동을 수행하기 위한 관절속도는 쉽게 구해진다. 그러나 여유자유도가 있는 로봇($n > m$)에 대하여 자코비안식의 일반적인 해의 형태는 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x} - \alpha (I - J^+ J) \nabla H \quad (15)$$

여기서 α 는 스칼라 값이며, $\nabla H \in \mathbb{R}^n$ 는 로봇이 수행

하여야 할 부작업 H의 경사벡터이다. 관절속도인 식(15)에서 첫번째 항은 작업에 대응하는 특이해(particular solution)이며, 두번째 항은 가격함수에 대응하는 일반해(homogeneous solution)이다. 우리는 주기적 경계조건을 만족하는 $\dot{\theta}(t_0)$ 를 선정하여야 하는데, 주어진 작업의 수행에 따른 특이해는 유일하게 결정된다. 따라서 여유자유도 만큼의 일반해를 구하면 되겠다.

주어진 초기 자세에서 식(15)를 이용하여 최적해를 얻기 위한 초기 관절속도 $\dot{\theta}(t_0)$ 를 찾는 문제는 초기 자세가 주어져 있으므로 주기적 경계조건을 만족하는 초기 관절속도를 구하여야 한다. 실제로 n개의 초기값을 모두 조정하면 측정과 조정을 반복하여야 하며, 많은 계산을 요하게 되므로^[8] 널공간 기저벡터(basis vector)를 이용하여 초기 관절속도를 매개변수화 한다. 식(15)에서 사용된 투영연산자(projection operator)를 P라고 하면 P는 널공간 기저행렬 $N \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$ 으로 표현된다.

$$P = N(N^*N)^{-1}N^* \quad (16)$$

식(16)을 이용하여 식(15)를 표현하면 다음과 같다.

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x} - \alpha N(N^*N)^{-1}N^* \nabla H \quad (17)$$

식(16)에서 $n-m=1$, 즉 여유자유도가 1일 경우에 오른쪽의 두번째 항은 랭크가 1이므로 스칼라값 μ 에 의하여 다음과 같이 매개변수화될 수 있다.

$$\alpha N(N^*N)^{-1}N^* \nabla H = \mu N \quad (18)$$

여기서 $\mu = \alpha (N^*N)^{-1}N^* \nabla H$ 이다. 식(18)을 이용하면, 식(17)은

$$\dot{\theta} = J^+ \dot{x} - \mu N \quad (19)$$

로 표현되고 N는 앞에서와 같이 자코비안의 널공간 기저벡터이며 특이값 분리(singular value decomposition(SVD)) 방법을 이용하여 구한다.^[14]

따라서 주기적 경계조건을 만족하면서 가격함수를 최소화 하는 초기 관절속도의 선정문제를 매개변수 μ 를 구하는 문제로 바뀌었다. 만일 매개변수를 구하면 n변수로 된 2차의 미분방정식을 위한 2n개의 초기조건을 찾을 수 있겠다. 따라서 주어진 초기 자세 $\theta(t_0)$ 에서 전 경로를 통하여 가격함수를 최소화 하는 최적해를 구할 수 있는데 $\theta(t_0) = \theta(t_1)$ 이 만족된다면 θ 이 2차 연속인 미분방정식(11)에 의해서 얻어지므로 $\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}(t_1)$ 은 유지되어 진다.

주기적 경계조건을 만족하는 매개변수를 구하기 위하여 의사역행렬에 기초한 식(19)를 초기시간에서

반복적으로 이용한다. 경계조건을 만족하기 위하여 최소화 되어야 할 초기자세 제한식으로 H 를 다음과 같이 잡는다.

$$H = \frac{1}{2} \|\theta(t_1) - \theta(t_0)\|^2 \quad (20)$$

여기서 $\theta(t_1)$ 은 시간 $t=t_0$ 에서 $t=t_1$ 까지 초기자세와 임의의 초기 관절속도를 초기 조건으로 하여 식(11)을 수치적으로 적분한 후에 $t=t_1$ 에서 얻은 관절값이다. 따라서 이 식은 초기시간과 최종시간에서 관절 오차의 노음을 나타내게 된다. 이와 같은 식 변형을 통하여, 최적해의 선정 문제는 주어진 초기 로봇의 자세 $\theta(t_0)$ 에서 식(20)을 최소화 하는 초기 관절속도 $\dot{\theta}(t_0)$ 를 구하는 문제가 되며, 이는 매개변수의 선정문제와 같다. 이러한 부작업을 전체 경로를 통하여 반복적으로 최소화 하면, 얻어진 초기의 관절속도와 초기 관절자세를 이용하여 식(11)에 의한 주기적 경계조건을 만족하는 관절 궤적을 얻을 수 있다.

초기 관절속도는 식(19)와 같이 매개변수 μ 로 나타내었다. 주기적 경계조건을 만족하는 수치적 탐색방법의 제시를 위하여 최종시간에서의 관절값과 초기시간에서의 관절값의 차를 오차 e 로 정의하도록 한다.

$$e = \theta(t_1) - \theta(t_0) \quad (21)$$

그러면 e 는 전체 경로에서 마지막 관절값에 대한 H 의 경사벡터가 된다. 수치적 탐색방법은 자세제한식 H 가 정해진 범위내에 들어오기까지 매개변수 μ 를 반복적으로 개선하는 것이다. 반복식에서 매번 초기 관절속도는 관절 오차에 의하여 개선되어 진다. 초기 상태에서의 관절속도를 $\dot{\theta}(t_0) = J^+ \dot{x}(t_0) - \mu_0 N$ 로 나타내며, μ_0 는 μ 의 초기값이 된다. 따라서 식(20)을 최소화하는 반복적 일고리듬을 k 번째에서 관절속도로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{\theta}_k(t_0) = J^+ \dot{x}(t_0) - \mu_k N \quad (22)$$

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \sigma N^t e_k, \text{ for } k=0, 1, \dots \quad (23)$$

여기서 $\sigma(0 < \sigma < 1)$ 는 양의 값이며 e_k 는 k 번째 최적화 과정에서 (21)로 정의된 관절 오차이다.

식(22), (23)으로 표현된 최적화 과정은 반복적인 과정으로 두개의 부과정으로 구성된다. 하나는 탐색방향의 결정이며 나머지는 탐색크기(step length)의 계산이다. 최적화식은 일반해의 반복적 개선이므로 기구적 제한식인 $\dot{x}(t_0) = J\dot{\theta}(t_0)$ 를 항상 만족한다. 한번 $\dot{\theta}_k(t_0)$ 이 얻어지면 $H(\theta_k) \leq H(\theta_{k-1})$ 임을 검증하여 $\dot{\theta}_k(t_0)$ 에 실질적 개선을 취한다. 만일 초기 관절제

한식 H 의 값이 감소되지 않으면 σ 는 감소되며, 새로운 $\dot{\theta}_k(t_0)$ 를 찾아야 한다. 이때 탐색크기인 $\Delta\mu_{k+1} = \mu_{k+1} - \mu_k = \sigma N^t e_k$ 는 1보다 작은 σ 에 의하여 조절된다.

식(22), (23)으로 표현된 최적화 방법에서 $N^t e_k$ 는 널공간으로 투영된 H 의 경사이다. 이와 같은 방법은 감소된 경사투영법(reduced-gradient projection method)이라고 불리운다. 따라서 최적화 방법은 경사투영법에 기초한 반복적 개선이므로 다음의 조건이 만족되어 진다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N^t e_k = 0 \quad (24)$$

따라서 반복적 과정에서 e_k 가 미리 정한 수렴조건내에 들어오면 반복 과정을 중지하고, 그때의 관절 궤적은 주기적 경계조건을 만족하면서, 전체 경로를 통하여 가역함수를 최소화하는 최적해가 된다. 식(24)에서 마지막으로 얻어진 관절속도는 매개변수 μ_r 로 표현되어 $\dot{\theta}_r(t_0) = J^+ \dot{x}(t_0) - \mu_r N$ 과 같이 나타낸다. 여기서 지적하여야 할 사항은 식(24)에 대한 것으로, 식(24)는 두가지의 해를 갖는다. 즉 하나는 반복적 경계조건을 만족하는 것으로 $e=0$ 인 경우이고, 또 하나는 식(24)는 만족하나 $e \neq 0$ 인 경우로써, 이때는 국부적인 극한해가 되고 N 과 e_k 가 직교(orthogonal)하는 상황이다. 따라서 μ_k 가 갱신되지 않게 되어 초기 관절속도도 일정한 값에 머물게 된다. 이때는 주기적 경계조건을 만족할 수 없는데 초기값 μ_0 의 적절한 선정으로 배제될 수 있고 작은 작업의 경우는 최적의 매개변수인 μ_r 로의 수렴이 쉽게 이루어 진다. 이러한 문제는 다음장에서 논의하도록 한다.

IV. 시뮬레이션 결과

본 절에서는 지금까지 언급된 최적해를 위한 수치적 탐색방법을 3축 평면 로봇에 대하여 적용하도록 한다. 3축 평면 로봇의 구조는 그림1과 같으며, 그림1과 같은 경우에 로봇의 작업은 $x \in R^2$ 이고 관절벡터는 $\theta \in R^3$ 이므로 여유자유도는 1이 된다. 만일 $s_1 = \sin(\theta_1)$, $c_1 = \cos(\theta_1)$, $s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$ 등으로 표시하면 3축 평면 로봇의 기구학식은 다음과 같다.

$$x = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_2 c_{12} + l_3 c_{123} \\ l_1 s_1 + l_2 s_{12} + l_3 s_{123} \end{bmatrix} \quad (25)$$

여기서 로봇의 관절의 길이는 $l_1=3, l_2=2.5, l_3=2$ 단위로 한다. 그리고 자코비안식은 식(25)를 각 관절로 편미분하여 얻어진다.

본 논문에서는 수치적인 예로써 주기작업을 다음과 같이 기술하도록 하겠다.

$$x = \begin{bmatrix} -R \cos(2\pi t) + C \\ -R \sin(2\pi t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

여기서 R은 수행하여야 할 원의 반지름이며 C는 원의 x축 값이 된다. 즉, 원점이 (C, 0)이고 반지름이 R인 원을 단위시간 동안 반시계 방향으로 수행하는 것이다. 따라서 초기 위치는 (C-R, 0)이고, 초기시간은 $t_0=0$ 이며 최종시간은 $t_1=1$ 이 된다. 그림1에서 작업 1(Task 1)은 원점이 6이고 반지름이 1인 경우이다.

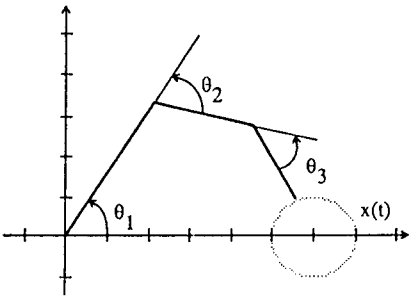


그림 1. 로봇의 구조와 작업1; C=6.0, R=1.0.
Fig. 1. Geometry of a robot and Task 1; C=6.0, R=1.0.

먼저 다른 연구^{[9]-[12]}와의 비교를 위하여 지금까지 가장 많이 사용된 관절속도 노름 최소화 문제를 고려한다. 그러면 식(6)에서 $M(\theta)=I$ 이고 $g(\theta)=0$ 의 경우로 $p(\theta, \dot{\theta}, t) = 1/2 \dot{\theta}^T \dot{\theta}$ 이며 가격함수 (1)은

$$r = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\theta}^T \dot{\theta} dt \quad (27)$$

로 나타난다. 이때의 필요조건식은 식(11)에서 쉽게 얻어지며 다음과 같다.

$$\ddot{\theta} = J^+ (\ddot{x} - \dot{J}\dot{\theta}) \quad (28)$$

따라서 $\ddot{\theta}$ 는 작업경로를 통하여 관절속도 노름을 최소화하는 관절가속도 제적이 된다.

1. 비호모토픽 극한해 (Nonhomotopic Extremal Solutions)

직교좌표계에서 R=1이고 C=6인 작업1을 고려해 보자. 이와 같은 작업에 대하여 로봇의 초기 자세를 $\theta(t_0) = (0.7854, -0.8488, -1.3143)^T$ [radian]으로 잡는다. 이같은 초기자세에 널공간 기저벡터 N은

SVD에서 $N = (0.317, -0.644, 0.696)^T$ 로 얻어진다. 먼저 초기값 조절문제의 이해를 위하여 주어진 초기 자세에서 임의의 관절속도에 대하여 식(28)을 적분하여 H로 정의된 관절오차 노름을 고려해 보자. 임의의 관절속도의 선정은 매개변수 μ 의 변화와 같은데 범위의 축소를 위하여 조작성능지수 (manipulability measure) $w = \sqrt{\det(JJ^T)}$ 를 고려한다.^[4] 이 지수는 로봇의 조작성능을 나타내므로 μ 의 범위를 w로 제한하도록 한다. 앞서 주어진 초기자세에서 $w=15.24$ 이다.

그림2는 제한된 범위 $-w \leq \mu \leq w$ 에 대하여 H를 실선으로 나타낸 것이며, 점선은 0.02로 축소된 가격함수 r의 값을 나타낸다. 그림2에서 보듯이 주기적 경계조건을 만족하기 위하여 H는 영이 되어야 하며 μ 가 0, 5, 10.5, -5과 -10.5의 근처에서 여러개의 극한해를 찾을 수 있는데, 단지 하나만이 최적해이다. 다시말해서 경계조건을 만족하면서 가격함수 r이 최소화 되어야 우리가 원하는 최적해라고 할 수 있을 것이다. 그러므로 그림2에서 $\mu=0$ 근처에서 경계조건을 만족하는 최적해가 존재함을 알 수 있다. 그런데 $\mu=0$ 인 관절속도는 식(19)에서 보듯이 최소의 관절속도 노름을 갖는 특이해의 경우가 되며 또한 식(14)로 표현된 자연적 경계조건과 같다. 따라서 본 논문에서의 최적화 방법은 주기적 경계조건을 만족하기 위하여 자연적 경계조건에 약간의 변형을 가한 것으로 생각할 수 있으며 자연적 경계조건에서도 지적했듯이 이때 최소의 가격함수 값을 갖는다.

관찰에 기초하여 $\mu_0=0$ 이고 $\sigma=0.5$ 을 초기값으로 하여 식(22)와 식(23)을 수행하면 최적점 $\mu_r = -0.0345$ 을 얻을 수 있다. 최적점은 주어진 $\theta(t_0)$ 에 대하여 최적화 조건을 만족하는 초기 관절속도 $\dot{\theta}(t_0)$ 를 매

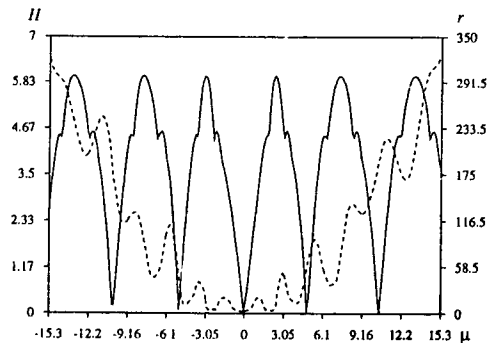


그림 2. $-w \leq \mu \leq w$ 에 대한 H와 가격함수 값 r
Fig. 2. H and the value of cost function r
 $-w \leq \mu \leq w$.

개변수화 하는 값이 되므로 만일 $\theta(t_0)$ 과 $\dot{\theta}(t_0)$ 를 이용하여 식(28)을 적분할 때, 가격함수 값인 r 이 다른 모든 국부적 최적해 보다 낮은 값을 갖으면, 이 관절 궤적은 전체적 경로에서 관절속도 노음을 최소화하는 최적해가 되며, 그 이유는 앞서 설명한 바와 같다. 또한 같은 초기자세에 대하여 관절속도를 $\mu_0=5$ 근처에서 $\sigma=0.5$ 로 하여 구하면 $\mu_f=4.88272$ 을 얻으며 이때는 다른 국부적 극한해를 얻는다. 따라서 주어진 초기자세에서 최적화 필요조건인 Euler-Lagrange 방정식을 만족하면서 주기적 경계조건을 만족하는 두개의 극한해를 얻었다. 그림3은 같은 초기자세에서 얻은 두개의 관절 궤적으로 하나는 $\mu_f = -0.0345$ 에서 얻은 것으로 해 A(Solution A)로 하고, 또 하나는 $\mu_f=4.8827$ 에서 얻은 것으로 해 B(Solution B)로 나타내었다.

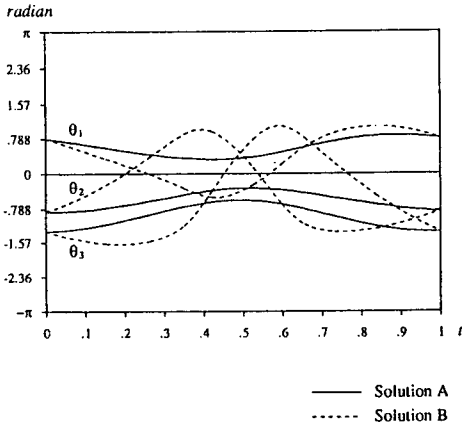


그림 3. 작업1에 대한 두개의 관절 궤적
Fig. 3. Two joint trajectories for Task 1.

그림3에 보인 관절 궤적을 효과적으로 비교하기 위하여 $(\theta_3-\theta_2)$ 영역으로 투영하여 자세공간에서의 운동을 보기로 한다. 그림4에서 작업1에 대한 초기 위치와 중간점인 $t=1/2$ 에서의 일반해 집합은 하나의 폐곡선으로 나타난다.^[15] 가운데 있는 폐곡선이 중간점에 대한 일반해 집합이며, 바깥쪽의 폐곡선이 초기위치에 대한 일반해 집합을 나타낸다. 그런데 주기적 작업을 수행할 때는 초기위치인 바깥쪽 폐곡선의 한 점에서 시작하여, 중간위치에 대응하는 가운데 폐곡선을 거쳐 초기위치로 되돌아와야 한다.

그림4에서 해 A는 Martin^[9]이 제시한 예제 2의 해와 같다. 이 논문에서는 초기자세가 다른 두개의 관절 궤적에 대하여 비호모토피(nonhomotopy)을 지적

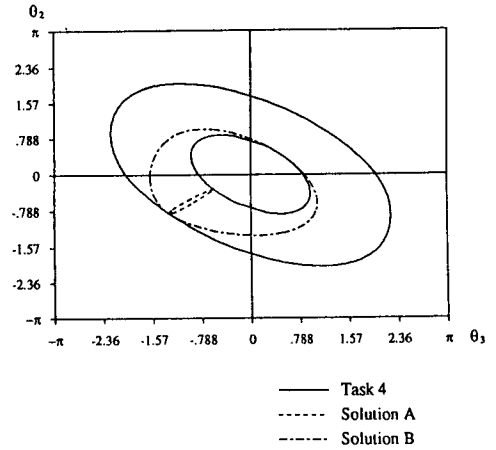


그림 4. 작업1에 대한 $(\theta_3-\theta_2)$ 에서의 관절 궤적
Fig. 4. Joint trajectories on $(\theta_3-\theta_2)$ plane for Task 1.

하였다. 즉 하나의 궤적이 다른 궤적으로의 연속적인 변형이 불가능하게 된다. 그러나 경로에 있어서 경로 호모토피(path homotopy)는 초기 위치와 마지막 위치가 같을 경우에 두개의 경로가 연속적으로 변형될 수 있는 경우를 말한다^[16] 따라서 그림4의 행 A와 B는 중간에 존재하는 토러스(torus)에 의하여 연속적으로 변화할 수 없고, 따라서 이러한 두개의 궤적은 경로 호모토피하지 않는다. 또한 주기작업을 수행하는데 해 A는 자세공간에서 국부적 극한해인 해 B보다 더 작은 경로를 진행한다. 그리고 해 A는 3상한에 존재함에 따라 작업을 수행할 때, 로봇의 팔 자세(arm posture)에 변화가 없다. 그러나 해 B는 모든 상한을 이동하며 가운데에 존재하는 토러스를 감싸며 이동함으로써 과도한 최적화 과정을 거쳤으며 자체운동을 과도하게 수행하였다.

작업1을 수행하기 위하여 다른 초기자세 $\theta(t_0) = (-0.47124, 1.7875, -1.8734)^T$ [radian]를 고려해 보자. 이 자세에 대하여 $N = (0.4843, -0.5366, -0.6910)^T$ 이고 조작성능지수 $w=9.85$ 이다. 그림 2와 같이 이러한 초기자세에 대하여 주기적 경계조건을 만족하는 해를 구하여야 한다. 그러나 지적인 바와 같이 자연적 경계조건, $\mu_0=0$, 근처에서 가격함수를 최소화 하면서 주기적 경계조건을 만족하는 해가 존재하므로 최적점에서의 수렴성을 보기 위하여 그림3에서의 해 A를 구할 때 사용한 μ_0 와 σ 를 이용한다. 그러면 식(22)와 (23)에 의하여 최적점인 $\mu_f = -0.00434$ 를 얻는데 이 값에 대한 관절 궤적을 그림5에서 해 C로 나타내었다. 그리고 그림6에 그림5에서의 관절

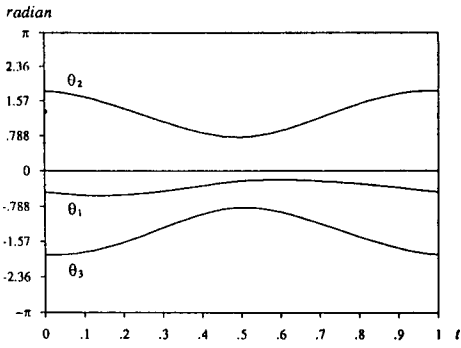


그림 5. 다른 초기자세에서 작업 1에 대한 해 C
 Fig. 5. Solution C for another initial configuration in Task 1.

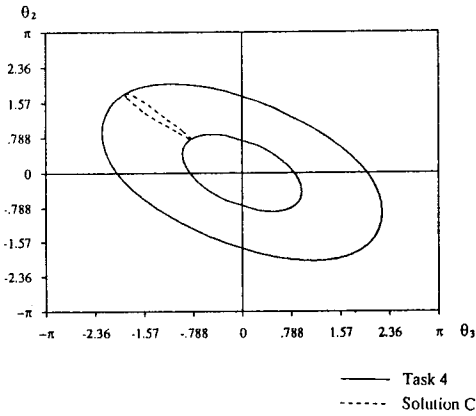


그림 6. $(\theta_3 - \theta_2)$ 에서의 해 C
 Fig. 6. Solution C on $(\theta_3 - \theta_2)$ plane.

케적을 $(\theta_3 - \theta_2)$ 의 자세공간에서 나타내었다. 마찬가지로 초기값 μ_0 를 크게하여 최적화를 수행하면 Martin이 얻은 예제 3에서의 해를 얻을 수 있는데 이해는 극한해이다. 그러나 본 논문에서는 주어진 초기자세에서의 최적해를 구할 수 있으며 초기값에 최적점이 가까이 있으므로 단지 몇번의 반복에 의하여 최적해를 구할 수 있다.

2. 로봇의 동역학을 고려한 경우의 최적해

지금까지는 로봇의 기구학만을 고려한 경우에 전체 경로정보를 이용하여 여유자유도 로봇에 대한 최적해에 대하여 논하였다. 그러나 로봇의 동역학적 특성의 고려가 요구되면, 목적함수 p 는 θ 만의 함수가 아니며, 이때는 감소된 필요조건식은 유도되지 않

는다. 운동에너지 최소화 문제를 고려하면, $p(\theta, \dot{\theta}, t) = 1/2 \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}$ 이고 $M(\theta)$ 는 식(10)에서의 관성행렬이다. 따라서 이와 같은 P에 대해서 필요조건은 식(11)에서 $\rho=0$ 인 경우로 나타난다. 그리고 관성행렬 $M(\theta)$ 는 각 관절끝에서의 점 질량으로 모델되었다.

일반적인 방법은 목적함수가 변화함에 따라 최적화 방법이 변화되어야 하나 본 논문의 수치적 탐색 방법은 적분된 관절값의 함수이므로, 필요조건이 바뀌어도 같은 식이 사용되어질 수 있다. 즉 탐색 방법이 변화하지 않게 된다. 비교를 위하여, 작업 1과 그림3의 초기자세를 이용하도록 한다. 앞에서와 마찬가지로 최적해는 $\mu_0=0$ 에서 시작하여 식(22), (23)에서 얻은 $\mu_r=0.0097$ 를 이용하여 구한다. 이러한 경우에 가격함수 값을 운동에너지의 경우에 대하여 비교하면 작업1에 대하여 관절속도 노음을 최소화 하는 해는 36.824이며, 운동에너지를 최소화한 최적해의 경우는 35.088이다. 그러므로 전체 경로를 통하여 관절속도 노음을 최소화하는 것이 근사적으로 운동에너지의 최소화를 수행하는 것이 되나 운동에너지를 최소화하는 경우보다는 큰값을 갖는다.

이와 같은 동적 운동을 보이기 위하여 그림 7(a)에 그림3의 해 A와 동역학을 고려하여 얻은 결과를 그

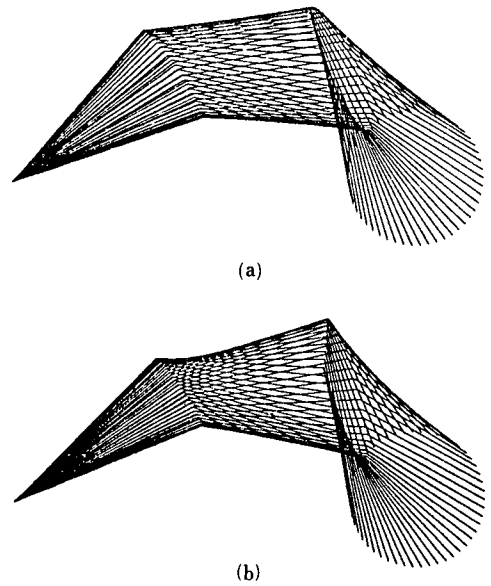


그림 7. (a) 기구학만을 고려한 경우의 해 A의 운동
 (b) 동역학을 고려한 경우의 로봇의 운동
 Fig. 7. (a) Motions of solution A when the kinematics is considered only,
 (b) motions of solution A when the dynamics is taken into account.

림7(b)에 나타내었다. 그림에서 보듯이 그림 7(b)에서 관절1의 움직임이 그림7(a)에서의 해 A에 있어서의 관절1의 움직임 보다 작음을 알 수 있다. 따라서 그림7(b)에 나타낸 관절 궤적의 경우가 운동에너지를 적게 쓴 경우가 된다.

V. 결 론

본 논문은 여유자유도 로봇의 경로계획에 있어서 일반적인 적분형태의 가격함수를 이용하여 보존적 관절운동을 제공하는 최적화 방법에 대하여 논하였다. 변분학을 이용하여 필요조건식을 2차 미분방정식의 형태로 얻었고 주기작업에 대하여 주기적 경계조건에 대하여 연구하였으며, 2점 경계치 문제를 초기값 조절 문제로 변환하였다.

그리고 주기적 경계조건을 만족하는 최적해의 선정을 위하여 수치적 탐색방법을 제시하였다. 효율적인 탐색을 위하여 관절속도를 매개변수화 하여 최적해의 해석과 탐색을 쉽게 얻을 수 있었다. 또한 자연적 경계조건과 본 논문에서의 매개변수와의 관계를 고려하여 작업에 대하여 효과적으로 최적해를 선정하는 방법을 주었다.

수치적 예를 통하여 같은 초기자세에 대하여 관절속도의 변화에 따른 경로 비호모토픽한 해를 보였다. 그리고 제시된 방법을 로봇의 동역학을 고려한 운동에너지 최소화 문제에 적용하여 일반성을 보였다. 따라서 본 논문은 여유자유도 로봇의 경로계획을 위하여 광역의 경로정보를 이용할 경우의 초기치가 제한된 문제로 바꾸어서 여유자유도 만큼의 매개변수를 탐색하는 최적화 방법으로 최적해를 쉽게 구할 수 있었다.

參 考 文 獻

[1] J.M. Hollerbach, "Optimum kinematic design for a seven degree of freedom manipulator," *Robotics Research: The 2nd Intern. Symp.*, ed. Hideo Hanfusa and Hirochika Inoue, pp. 215-222, 1985.

[2] D.E. Whitney, "Resolved motion rate control of manipulators and human prostheses," *IEEE Trans. on Man Machine Systems*, vol. 10, no. 2, pp. 47-53, 1969.

[3] C.A. Klein and C.H. Huang, "Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators," *IEEE Trans. Sys., Man, and Cyber.*, vol. 13, No. 2,

pp. 245-250, 1983.

- [4] T. Yoshikawa, "Analysis and control of robotic manipulators with redundancy," in *Robotics Research: The 1st Intern. Symp.*, ed. M. Brady and R. Paul, pp. 735-748, 1984.
- [5] J. Baillieul, "Kinematic programming alternatives for redundant manipulators," in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 722-728, 1985.
- [6] P.H. Chang, "A closed form solution for the control of manipulators with kinematically redundancy," in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, pp. 9-14, 1986.
- [7] K.C. Suh and J.M. Hollerbach, "Local versus global torque optimization of redundant manipulators," in *Proc. IEEE Intern. Conf. on Robotics and Automation*, pp.619-624, 1987.
- [8] Y. Nakamura and H. Hanafusa, "Optimal redundancy control of robot manipulators," *The Intern. J. of Robotics Research*, vol. 6, no. 1, pp. 32-42, 1987.
- [9] D.P. Martin, J. Baillieul, and J.M. Hollerbach "Resolution of kinematic redundancy using optimization techniques," *IEEE Trans. Robotics and Automation*, vol. 5, no. 4, pp. 529-533, 1989.
- [10] K. Kazerounian and Z. Wang, "Global versus local optimization in redundancy resolution of robotic manipulators," *The Intern. J. of Robotics Research*, vol. 7, no. 5, pp. 3-12, 1988.
- [11] Z. Wang and K. Kazerounian, "An efficient algorithm for global optimization in redundant manipulators," *ASME, J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, vol. 111, pp. 488-493, 1989.
- [12] J.H. Won, B.W. Choi, and M.J. Chung, "A numerical method of predetermined optimal resolution of a kinematically redundant manipulator," in *Proc. of the 1990 KACC (Intern. session)*, pp. 1150-1155, 1990.
- [13] H. Asada and J.J.E. Slotine, *Robot Analysis and Control*, Wiley-Interscience Publication, 1987.
- [14] G. Forsythe and C.B. Moler, *Computer Solution of Linear Algebraic Systems*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1967.
- [15] B.W. Choi, J.H. Won and M.J. Chung, "A

study on the optimum redundancy resolution for a redundant manipulator," in *Proc. of the 1990 KACC (Intern. session)*,

pp. 1145-1149, 1990.

[16] J.R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, 1975.

著 者 紹 介

崔 秉 旭 (正會員) 第28卷 B編 第10號 參照
현재 한국과학기술원 전기
및 전자공학과 박사과정

鄭 明 振 (正會員) 第26卷 第7號 參照
현재 한국과학기술원 전기
및 전자공학과 부교수



元 鍾 華 (正會員) 第28卷 B編 第10號 參照
현재 한국과학기술원 전기
및 전자공학과 박사과정