

◎ 論 文

비균질 지반위에 놓여있는 보의 고유진동수

김 용 철*

(1992년 2월 7일 접수)

Natural Frequencies of a Beam on Inhomogeneous Foundation

Y. C. Kim

Key Words : Elastic Foundation(탄성지반), Intermediate Support(중간지지점), Shock Absorber(흡진기), Natural Frequency Parameter(고유진동수 인자), Translational Spring(병진 스프링), Rotational Spring(회전 스프링), Constraint Conditions(구속조건)

Abstract

The natural frequencies of a beam on elastic foundation are investigated in the present paper.

The inhomogeneous elastic foundation can be modelled as a combination of distributed translational spring, rotational spring, intermediate supports and dampers. The natural frequencies and mode shapes of the system are obtained by using the Galerkin's method, and also compared with the results in the literature. Furthermore, the natural frequencies of the beam with elastically mounted masses, which can be used as vibration absorbers, are obtained by an efficient numerical scheme suggested in the present paper.

1. 서 론

간단한 기계 구조물에서 부터 거대한 육상, 해상 구조물에 이르기 까지 보(beam)의 사용은 광범위 하며, 이러한 보요소는 흔히 탄성지반 위에 놓여 지게 된다. 탄성지반은 일반적으로 균일하게 분포 되어 있지 않으며, 또한 구조물의 동적특성에 커다란 영향을 미치게 된다. 해양 구조물의 경우, 해

저 송유관(under water pipe line)의 운동특성을 파악하기 위하여서는 반드시 지반(soil foundation)의 영향을 고려해야 하며, 또한 고속전철의 철로(railway)나 철교(railway bridge)와 같은 구조물에 있어서도 정확한 동적 해석을 통하여 효과적인 지반을 설계할 수 있게 된다. 이러한 구조물 들은 중간 지지점이 있고, 탄성지반위에 놓여 있으며 양단에 구속조건(constraint condition)이 있는 보로 간주하여 동적해석을 수행할 수 있다. 이

* 정희원, 영남대학교 공과대학 정밀기계공학과

러한 시스템의 동적해석 중 가장 중요한 것은 고유진동수를 정확히 추정하는 일이다. 탄성지반 위에 놓여있는 보에 대한 해석은 초기에 Winker¹⁾에 의해 수행 되었으며, 지반을 하나의 베드 스프링 (bed spring)으로 간주하여 지반 위에서의 반력은 각 위치에서 보의 처짐에 비례 한다는 가정을 세웠다. Föppl은 실험을 통하여 Winkler의 가정이 유효하다는 것을 증명하였고 Biot는 탄성지반 위에서 집중력을 받는 무한보에 대한 해석을 수행하여 지반에 미치는 압력 분포와 보의 변위를 구하였다.¹⁾ 최근의 연구로는 Jacquot와 Gibson이 보에 병진 및 회전스프링과 질량을 부착하여 보의 특성 방정식으로 부터 고유진동수와 모우드에 대한 선형방정식을 풀어서 해를 구하였으며,²⁾ Laura는 양 끝이 스프링 한지로 되어있고 중간지지점과 집중 질량은 갖는 보를 다항식 시도함수를 사용하여 근사해를 구하였다.³⁾ Gürgöze는 집중질량과 병진 및 회전스프링이 부착된 보의 고유진동수와 모우드를 변수분리법을 사용하여 구하였으며,⁵⁾ Ercoli와 Laura는 병진 및 회전스프링, 중간지지점, 탄성적으로 부착된 질량 또는 여러가지 경계조건의 조합으로 이루어지는 보의 고유진동수를 구하였다.⁶⁾ Kim과 Dickinson은 집중질량, 중간지지점 또는 축 방향의 힘 등이 작용하는 보를 직교다항식을 이용하여 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석하였으며,⁷⁾ Bokajian은 여러가지 경계조건의 조합으로 이루어진 보에서 축 방향의 힘이 고유진동수와 모우드에 미치는 영향을 연구하였다.⁸⁾ 그러나 일부 발표된 논문에서는 회전스프링이 보의 중간 부분에 부착되어 있는 경우에 대하여 운동방정식 중에서 집중 모멘트 항을 잘못 유도하여 사용한 경우가 있다.²⁾ ⁶⁾ 본 논문에서는 탄성지반, 다수의 병진 및 회전 스프링 그리고 중간지지점의 조합으로 구성된 보에 대한 동적해석을 하기 위하여 Galerkin 방법을 사용하여 고유진동수를 구하였으며 그 결과를 Rayleigh-Ritz 방법으로 구한 결과와 서로 비교·검토하였다. 특히 보에 탄성적으로 부착된 질량은 (elastically mounted mass) 흡진기로도 사용될 수 있는데 이 경우에 있어서 Laura⁷⁾의 결과는 복잡한 계산을 요구하고 있으나, 본 논문에서는 고유진동수와 고유진동형을 쉽게 구할수 있도록 효율적인

수치방법을 제시하였다. 또한 본 논문의 해석방법을 검증하기 위하여 구속조건 및 여러가지 경계조건에 대하여 기존문헌의 결과와 서로 비교·검토하였다.

2. 운동 방정식 및 경계조건

운동 방정식을 유도하기 위하여 Fig.1과 같은 형태의 보를 생각하기로 한다. 보는 세장형이고 회전관성 및 전단변형을 무시한다고 가정한다. 일

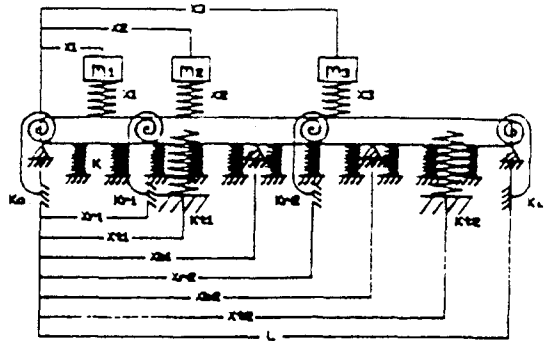


Fig. 1 A beam on elastic foundation

반적으로 탄성지반, p개의 병진스프링, q개의 회전 스프링 및 중간지지점이 있는 경우에 대한 운동 방정식은 Hamilton 원리를 이용하면 다음과 같이 유도된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L [\delta L + \delta W_{nc}] dx + \delta L_0 \right\} dt = 0 \dots\dots\dots (1)$$

여기서,

$$L = \frac{1}{2} m(x) \dot{v}^2 - \frac{1}{2} EI(x) v''^2 - \frac{1}{2} K v^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p K_{ti} \delta(x-x_{ti}) V^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q K_{rj} \delta(x-x_{rj}) v^2 \dots\dots\dots (2)$$

$$L_0 = -\frac{1}{2} K_0 v^2 \Big|_{x=0} - \frac{1}{2} K_L v^2 \Big|_{x=L} \dots\dots (3)$$

여기서 m은 단위길이당 질량, EI는 굽힘강성, v는 횡방향변위, K_t, K_r은 병진 및 회전스프링상수, K₀, K_L은 양단에서의 회전스프링상수를 나타내고,

δW_{nc} 는 단위길이당 비보존 가상일, δ 는 Dirac delta 함수이다. 또한 \cdot 는 t에 대한 미분과 '는 x에 대한 미분을 의미한다. 윗식을 전개하면 다음과 같다.

$$\int_0^L \left\{ \int_0^L [-m(x)\ddot{v} - (EI(x)v')'] - K_v v - \sum_{i=1}^q K_{ti} \delta(x-x_{ti})v + \sum_{j=1}^q K_{tj}(\delta(x-x_{tj})v)'] \right. \\ \left. \delta v dx - EI(x)v' \delta v \Big|_0^L + (EI(x)v')' \delta v \Big|_0^L - K_0 v' \delta v \Big|_{x=0} - K_L v' \delta v \Big|_{x=L} \right\} dt = 0 \dots\dots\dots (4)$$

식(4)로 부터 탄성지반위에 놓인 보의 횡진동에 관한 운동방정식 및 경계조건을 구할수 있다. 마찬가지로 방법으로 r개의 질량이 보의 중간부분에 탄성적으로 부착된 경우에 대하여서도 운동방정식과 경계조건은 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$m(x)\ddot{v} + (EI(x)v')' + K_v v + \sum_{i=1}^p K_{ti} \delta(x-x_{ti})v - \sum_{j=1}^q K_{tj}(\delta(x-x_{tj})v)' = - \sum_{s=1}^r m_s \ddot{Z}_s \delta(x-x_s) \dots\dots\dots (5)$$

$$m_s \ddot{Z}_s + K_s(Z_s - v) = 0 \text{ at } x = x_s \text{ (s=1, 2, \dots, r)} \dots\dots\dots (6)$$

$$\begin{aligned} EI v' - K_0 v & \text{ at } x = x_s \\ EI v' + K_L v & \text{ at } x = L \\ v = 0 & \text{ at } x = 0, L, x_b \dots\dots (7) \end{aligned}$$

여기서, m_s 는 부착된 집중질량, Z_s 와 X_s 는 부착된 질량의 변위와 위치를 나타낸다.

3. 시도 함수를 구하는 법

Galerkin 방법을 사용하기 위하여 시도함수를 구하여야 하는데, Kim⁷⁾, Bhat¹⁰⁾ 등이 발표한 문헌에서 사용한 시도함수는 기하학적 경계조건은 만족하나 동적경계조건을 만족하지 않으므로 사용하기에 부적절하다. 따라서 본 논문에서는 중간지지점이 있는 보에 대하여 기하학적 경계조건 및 동적 경계조건을 만족하는 최저차 시도함수 $\Phi_1(x)$ 를

구한 후, 고차 시도함수는 경계조건과 직교조건을 이용하여 구하였다.

양단이 스프링 힌지로 되어있는 균일한 보에 대한 시도함수를 구하기 위하여 다음과 같이 가정한다.

$$\begin{aligned} \Phi_1(x^*) &= A_5 x^{*5} + A_4 x^{*4} + A_3 x^{*3} + A_2 x^{*2} + A_1 x^{*1} \\ \Phi_1(0) &= \Phi_1(x^*b) = \Phi_1(1) = 0 \\ \Phi_1'(0) &= S_0 \Phi_1'(0) \\ \Phi_1'(1) &= -S_L \Phi_1'(1) \end{aligned}$$

여기서, $x^* = x/L$, $S_0 = K_0L/EI$ 그리고 $S_L = K_L L/EI$ 로 무차원 변수이다. 위의 경계조건을 대입하면 아래와 같은 연립방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Phi_1(x^*b) &= A_5 x^{*5} + A_4 x^{*4} + A_3 x^{*3} + A_2 x^{*2} + A_1 x^{*1} = 0 \\ \Phi_1(1) &= A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = 0 \\ \Phi_1'(0) &= 2 A_2 = S_0 A_1 = S_0 \Phi_1'(0) \\ \Phi_1'(1) &= 20 A_5 + 12 A_4 + 6 A_3 + 2 A_2 = -S_L (5 A_5 + 4 A_4 + 3 A_3 + 2 A_2 + A_1) = -S_L \Phi_1'(1) \end{aligned}$$

위 식으로 부터 $\Phi_1(x^*)$ 를 구할수 있으며, 고차 시도함수 $\Phi_i(x^*)$ 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_n(x^*) = A_{n, n+4} x^{*n+4} + A_{n, n+3} x^{*n+3} + \dots + A_{n, 1} x^*$$

각 계수는 경계조건 외에 다음과 같은 직교조건을 부가하여 구할 수 있다.

$$\int_0^1 m(x^*) \Phi_i(x^*) \Phi_j(x^*) dx^* = C_i \delta_{ij} \text{ (i,j=1, 2, \dots, n)} \dots\dots\dots (8)$$

여기서, $\Phi_1(x^*)$, $\Phi_2(x^*)$, ..., $\Phi_n(x^*)$ 을 다음과 같이 정규화하여 $\phi_1(x^*)$, $\phi_2(x^*)$, ..., $\phi_n(x^*)$ 을 구한다.

$$\phi_i(x^*) = \left\{ \int_0^1 m(x^*) \Phi_i^2(x^*) dx^* \right\}^{-1/2} \Phi_i(x^*) \text{ (i=1,2,\dots,n)}$$

위의 방법은 기하학적 경계조건 외에 동적 경계조건을 만족한다. 단순지지보는 위의 과정에서 $S_0 = 0$, $S_L = 0$ 로 두어서 구하고, 양단고정보(Clamped

Beam)는 동적 경계조건을 $\Phi_1'(0) = \Phi_1'(1) = 0$ 의 기하학적 경계조건으로 대치하여 시도함수를 구할 수 있다. 양단고정보인 경우는 기하학적 경계조건만으로 이루어져 있으므로 위의 방법과 Gram-Schmidt 직교화 과정을 이용해서 구한 시도함수는 서로 일치한다.

4. 해석방법

고유진동수와 고유진동형을 구하기 위하여 운동방정식을 무차원화 시키면 다음과 같다.

$$\frac{L^4 m}{EI} \ddot{v} + v^{*iv} + \frac{L^4 K}{EI} v^* + \sum_{i=1}^p \frac{L^3 K_{ti}}{EI} \delta^*(x - x_{ti}^*) v^* - \sum_{j=1}^q \frac{L^3 K_{rj}}{EI} (\delta^*(x^* - x_{rj}^*) v^*) = - \frac{L^4 m}{EI} \sum_{s=1}^r m_{rs} \ddot{Z}_s^* \delta^*(x^* - x_s^*) \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{L^4 m}{EI} m_{rs} \ddot{Z}_s^* + \frac{L^3 K_s}{EI} (Z_s^* - v^*) = 0$$

at $x^* = x_s^*$ ($s = 1, 2, \dots, r$) $\dots\dots\dots (10)$

여기서, $v_0 = m_1 g L^3 / EI$, $v^* = v / v_0$, $\delta^* = \delta \times L$, $m_{rs} = m_r / mL$ 이며, $\phi_k^*(x) = \phi_k(x) / L$ 로 놓는다. 그리고 $v^*(x, t) = \phi^*(x) e^{i\omega t}$, $Z_s(t) = Z_s e^{i\omega t}$ 로 가정하여 식(9), (10)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다. (이하 무차원을 의미하는 기호 *는 생략)

$$-\Omega^2 \phi + \phi^{iv} + S\phi + \sum_{i=1}^p S_{ti} \delta(x - x_{ti}) \phi - \sum_{j=1}^q S_{rj} (\delta(x - x_{rj}) \phi) = \Omega^2 \sum_{s=1}^r m_{rs} \delta(x - x_s) \dots\dots\dots (11)$$

$$(\delta(x - x_{rj}) \phi) = \Omega^2 \sum_{s=1}^r m_{rs} \delta(x - x_s) \dots\dots\dots (11)$$

$$-\Omega^2 m_{rs} z_s + S_s (Z_s - \phi) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

($s = 1, 2, \dots, r$)

여기서, $\Omega^2 = \frac{L^4 m}{EI} \omega^2$, $S = \frac{L^4 K}{EI}$, $S_{ti} = \frac{L^3 K_{ti}}{EI}$

$S_{rj} = \frac{L K_{rj}}{EI}$, $S_s = \frac{L^3 K_s}{EI}$ 이다.

해서 앞서 구한 시도함수를 이용하여 전개하면,

$$\phi = \sum_{k=1}^n D_k \phi_k(x) \dots\dots\dots (13)$$

로 나타낼수 있고, 식 (13)를 식 (12)에 대입하면 다음과 같다.

$$-\Omega^2 m_{rs} Z_s + S_s (Z_s - \sum_{k=1}^n D_k \phi_k) = 0 \dots\dots\dots (14)$$

($s = 1, 2, \dots, r$)

식 (13)을 식 (11)에 대입하면, 오차함수는 다음과 같다.

$$R(\phi^n, x) = -\Omega^2 \phi^n + (\phi^n)^{iv} + S \phi^n + \sum_{i=1}^p S_{ti} \delta(x - x_{ti}) \phi^n - \sum_{j=1}^q S_{rj} (\delta(x - x_{rj}) \phi^n) - \Omega^2 \sum_{s=1}^r m_{rs} Z_s \delta(x - x_s)$$

Galerkin 방법을 이용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$(\phi_m, R) = \int_0^1 \phi_m R dx = -D_m \Omega^2 + D_m S + \sum_{k=1}^n D_k \{ -\phi_k' \phi_m' \Big|_0^1 + \int_0^1 \phi_k \phi_m dx + \sum_{i=1}^p S_{ti} \phi_k \phi_m \Big|_{x=x_{ti}} + \sum_{j=1}^q S_{rj} \phi_k \phi_m \Big|_{x=x_{rj}} \} - \Omega^2 \sum_{s=1}^r m_{rs} Z_s \phi_m \Big|_{x=x_s} = 0$$

윗 식을 정리하면 다음과 같다.

$$(D_m + \sum_{s=1}^r m_{rs} Z_s \phi_m \Big|_{x=x_{ti}}) \Omega^2 = D_m S + \sum_{k=1}^n D_k \{ -\phi_k \phi_m' \Big|_0^1 + \int_0^1 \phi_k \phi_m dx \dots\dots\dots (15)$$

($m = 1, 2, \dots, n$)

식 (14), (15)를 행렬식으로 표현하면 다음과 같은 고유치 문제를 얻을 수 있다.

$$\Omega^2 \begin{bmatrix} [I] & [M]_1 \\ [0] & [M]_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D] \\ [Z] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [K]_1 & [K]_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D] \\ [Z] \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

여기서 각 행렬의 요소는 다음과 같이 정의된다.

$$[M_{km}]_1 = m_{rm} \phi_k \Big|_{x=x_m} \quad (k = 1, 2, \dots, n, m = 1, 2, \dots, r)$$

$$[M_{km}]_2 = \delta_{km} m_{rk} \quad (k, m = 1, 2, \dots, r)$$

$$[K_{km}] = \delta_{km} S - \phi'_k \phi'_m \Big|_0^1 + \int_0^1 \phi'_k \phi'_m dx + \sum_{j=1}^p$$

$$S_{ij} \phi'_k \phi'_m \Big|_{x=x_{ti}} + \sum_{j=1}^q S_{ij} \phi'_k \phi'_m \Big|_{x=x_{rj}}$$

$$(k, m = 1, 2, \dots, r)$$

$$[K_{km}]_1 = -S_k \phi_m \Big|_{x=x_k} \quad (k = 1, 2, \dots, r, m = 1, 2, \dots, n)$$

$$[K_{km}]_2 = \delta_{km} S_k \quad (k, m = 1, 2, \dots, r)$$

$$\{D\}^T = [D_1, D_2, \dots, D_n], \{Z\}^T = [Z_1, Z_2, \dots, Z_r]$$

식(16)로 부터 고유진동수 및 고유진동형을 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 본 논문에서 제시한 방법은 부착된 질량이 여러개 있는 경우에도 고유진동수 및 진동형을 동시에 계산할 수 있는 장점이 있다.

5. 수치 해석 결과 및 고찰

(1) 우선 시도함수의 영향을 살펴기 위하여 다음과 같은 해석을 수행 하였다.

Fig. 2는 단순지지보에서 중간지지점의 위치 $x_b = 0.3$ 일 경우에 기하학적 경계 조건만을 만족하는 고차 시도함수(Gram-Schmidt 직교화 과정을 이용)와 본 논문에서 제시한 방법으로 구한 두번째 모드와 세번째 모드를 나타낸다. 두 모드는 보의 후반부에서 차이가 나는 것을 알수 있다. Fig. 3은 단순지지보에서 중간지지점의 위치 x_b 에 대한 고유진동수 인자 λ 값을 나타낸다. 실선은 본 논문에서 구한 시도함수를 이용하여 Galerkin 방법으로 구한 결과이고 점선은 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 계산하였다. $x_b = 0$ 또는 $x_b = 1$ 인 경우에는 완전(Exact)해가 존재하기 때문에 정확히 비교할 수 있으며, Galerkin 방법을 사용한 결과가 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 결과보다 더 정확하다는 것을 알수 있으며 고차 모우드로 갈수록 그 차이가 커짐을 알수 있다. Fig. 4는 스프링힌지-단순지지보에서, $S_0 = 0.2$ 인 경우 중간지지점의 위치 x_b 의 변화에 대한 λ 값을 나타낸다. 보의 양단 부근에서 중간지지점이 조금이라도 떨어져 있는 경우에는

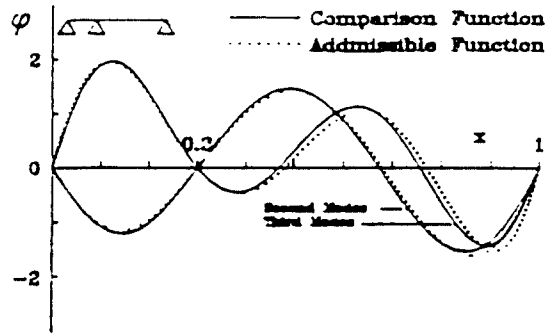


Fig. 2 The higher order trial functions

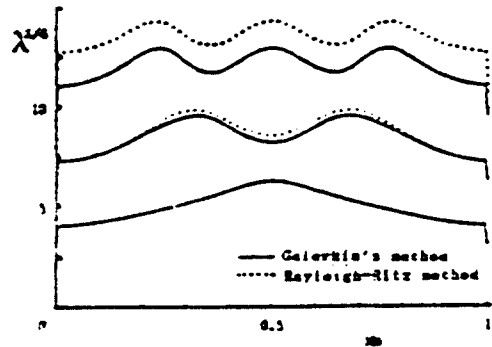


Fig. 3 The natural frequency parameters of a simply supported beam with an intermediate support

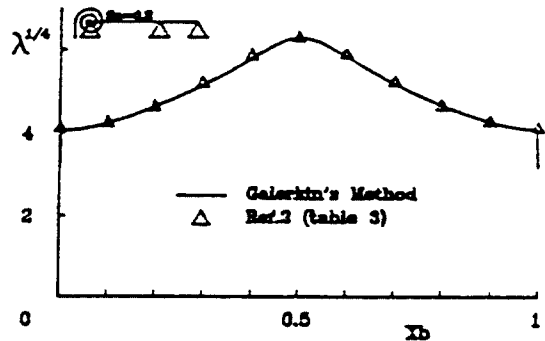


Fig. 4 The effect of rotational spring at $x=0$

고정(Clamped)된 효과를 나타내므로 λ 값에 점프가 일어나는 것을 알수 있다. Fig. 5는 단순지지보

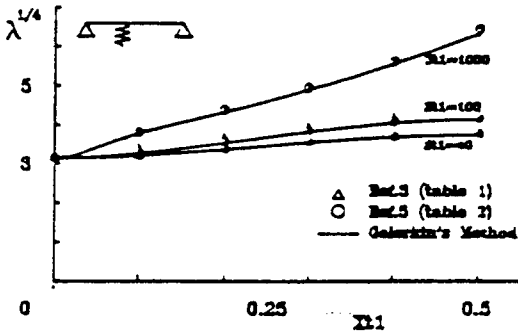


Fig. 5 The effect of the translational spring

에서 병진스프링 상수 $S_{ii}=50,100,100$ 에 대하여 위치 x_{ii} 의 변화에 대한 λ 값을 나타내며, 스프링의 위치가 중앙부로 올라올수록 λ 가 커지는 것을 알수 있다. 또한 스프링의 강성계수가 커질수록 고차모우드를 포함 하여야 정확한 결과를 얻을수 있으며, 이 경우에도 기존의 문헌결과와 잘 일치하는 것을 알수 있다. Fig. 6은 단순지지보에서 스프링의

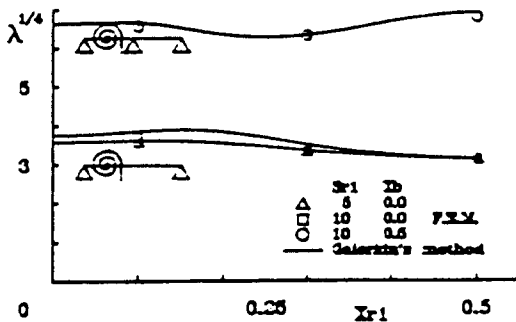


Fig. 6 The effect of the rotational spring at the mid point

위치 x_{r1} 과 스프링상수 S_{r1} 그리고 $x_b=0.5$ 에서 중간지지점의 유무에 대한 λ 값을 나타낸다. 계산의 정확도를 비교하기 위하여 유한요소법을 이용하여 λ 값을 직접계산 하였다. 여기서 유한요소법으로 구한결과(표시 : Δ , \square , \circ)와 본논문에서 계산한

결과가 거의 일치하고 있으며 이것은 본 논문에서 유도한 회전 스프링에 대한 항이 정확하다는 것을 보여 준다.

(2) 집중질량이 보에 부착된 경우를 해석하기 위하여 기존의 문헌에 발표된 결과와 비교하였다. 양단고정보에서 중간지지점의위치 $x_b=0.5$, 탄성적으로 부착된 질량의 위치 $x_1=0.25$ 인 경우이다. 유한요소법으로 계산한 값과 참고문헌⁽⁵⁾의 Approximate Modal Shape 방법으로 계산한 값을 Table 1에 수록 하였으며, 그 결과는 본논문의 계산결과가 좀더 정확한 것을 보여주고 있다.

Table 1. Natural frequency parameters of a clamped beam with a elastically mounted mass

m_{r1}	S_1	Present Method	Ref. (5)	F.E.M
0.5	1000	$\lambda_1=5.622$	5.640	5.542
		$\lambda_1=8.666$	8.723	8.477
1	1000	$\lambda_1=4.800$	4.813	4.728
		$\lambda_1=8.584$	8.646	8.426
0.5	100	$\lambda_1=3.687$	3.689	3.673
		$\lambda_1=7.962$	8.038	7.956
1	100	$\lambda_1=3.102$	3.103	3.094
		$\lambda_1=7.959$	8.036	7.954

Fig. 7은 양단 고정보에서 중간지지점의 위치 $x_b=0.5$, 부착된 질량 보 전체의 질량에 대한 비 $m_{r1}=1$, 강성비 $S_1=10000$ 일 경우 탄성적으로 부착된

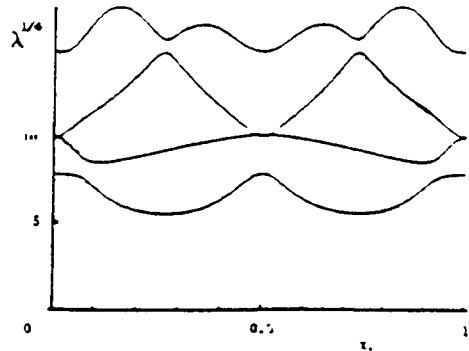


Fig. 7 The effect of the position of an elastically mounted mass

질량의 위치 x_1 이 변화할때의 λ 값을 보여준다. 실선은 맨 아래의 첫번째 모드부터 순서대로 고차모우드를 나타낸다. $x_1=0, 0.5, 1$ 인 경우는 질량이 절점(Nodal Point)에 부착되어 있으므로 부착된 질량의 고유진동수는 독립적으로 구해지며, $x_1=0.5$ 근처에서는 중근이 존재하는 경우도 있다. Fig. 8은 양단고정보에서 $x_1=0.5$, 질량비 $m_{r1}=1$, S_1

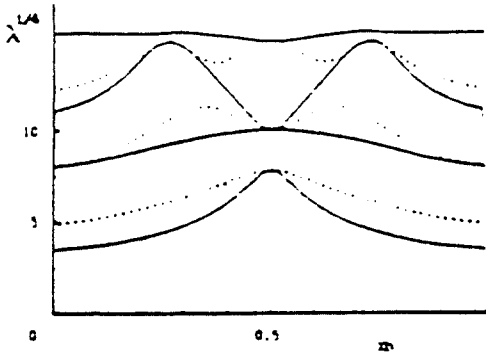


Fig. 8 The effect of the position of an intermediate support

$=10000$ 일 경우 중간지지점의 위치 x_b 를 변화시킬때의 λ 값을 보여준다. 탄성적으로 부착된 질량이 없는 경우(접선)보다 질량이 부착된 경우(실선)의 고유진동수는 낮아지며, 중간지지점이 양단으로 갈수록 최저차 고유진동수의 변화가 크다. Fig. 9는 양단 고정보에서 $x_1=0.5$, $S_1=1000$ 일 경우 $m_{r1}=0.1, 0.2, 0.3$ 에 대하여 x_b 를 변화시킬때의 λ

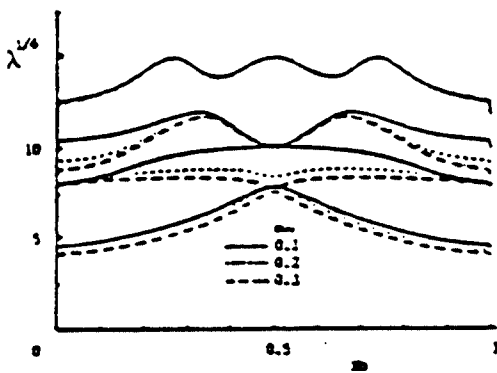


Fig. 9 The effect of the mounted mass ratio

값을 나타낸다. 질량비가 클수록 낮아지는 폭이 증가 한다. Fig. 10은 양단고정보에서 $x_1=0.5$, $m_{r1}=0.2$ 일 경우 $S_1=100, 500, 1500$ 에 대하여 x_b 를 변화시킬때의 λ 값을 나타낸다. 스프링의 강성계수가

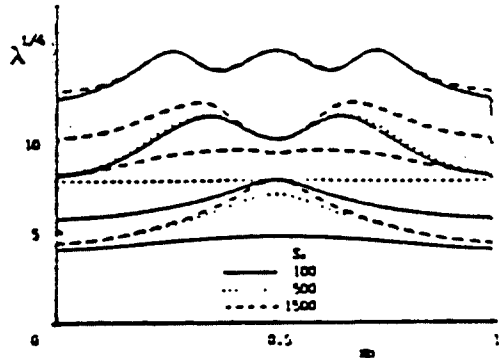


Fig. 10 The effect of the mounted spring stiffness

클수록 낮아지는 폭이 감소한다. Fig. 11은 양단고정보에서 $x_1=0.5$ 에 탄성적으로 부착된 질량과 스프링의 비를 일정하게 변화시킬때 즉, $m_{r1}=0.1, S_1=100, m_{r1}=1, S_1=1000, m_{r1}=2, S_1=2000$ 에 대하여 x_b 를 변화시킬 때의 λ 값을 보여준다. 이 경우 중간지지점의 위치에 무관하게 저차 고유진동수는 작아지고 고차진동수는 높아지는 경우가 있다.

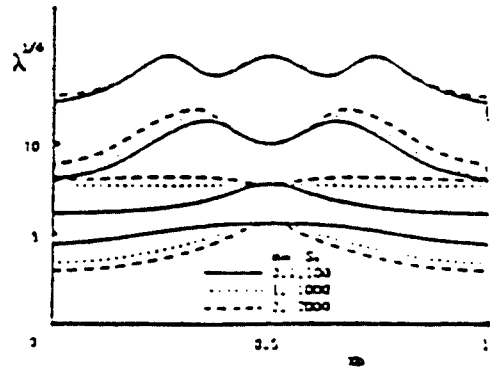


Fig. 11 The effect of the variation of mass-spring ratio

Fig. 12는 양단 고정에서 질량 3개가 탄성적으로 부착되어 있을 때 x_0 를 변화시킨 경우에 대한 계산 결과이다. ($x_1=0.25, S_1=100, m_{r1}=1, x_2=0.5, S_2=1000, m_{r2}=1, x_3=0.75, S_3=10000, m_{r3}=1$), 이와 같이 질량 여러개가 부착되어 있는 경우에도 고유진동수를 간단히 구할 수 있다.

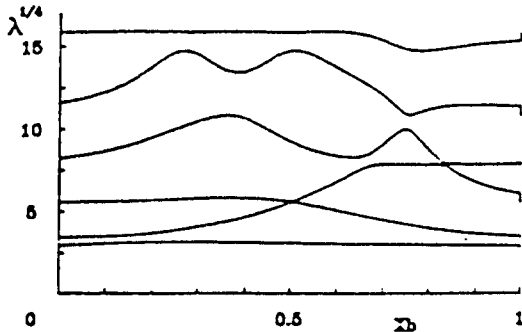


Fig. 12 The natural frequency parameters of a beam with three mounted masses

6. 결 론

이상과 같은 해석 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

비균일 지반위에 놓여있는 보의 고유진동수 및 고유진동형을 추정하는데 있어서 시도함수의 선택이 중요하며, 특히 보에 부착되어 있는 회전스프링 및 병진스프링 상수의 값이 큰 경우에는 반드시 고차모우드까지 사용하여야 해를 정확히 추정할 수 있다. 따라서 본 논문에서 제시한 방법을 사용하면 기하학적 경계조건 뿐만 아니라 동적 경계조건도 만족하는 고차 시도함수를 구할 수 있기 때문에 해의 정확도를 높일 수 있다. 더우기 보에 집중질량들이 탄성적으로 여러개 부착되어 있는 경우에도 본 논문에서 제시한 방법을 사용하여 고유진동수 및 진동형을 효율적으로 구할 수 있다.

후기 : 이 논문은 1990년도 교육부 지원 한국학술진흥재단의 지방대 육성 연구비에 의하여 연구되었음.

참 고 문 헌

- 1) M.Hetényi, "Beam on Elastic Foundation," University of Michigan Studies, Vol XVI, 1974.
- 2) R.G.Jacquot and J.D.Gibson, "The Effect of Discrete Masses and Elastic Support on Continuous Beam Natural Frequencies," Journal of Sound and Vibration, Vo. 123, pp. 237-244, 1972.
- 3) P.A.Laura, P.verniere De Irassar and G.M.Ficcadenti, "A Note on Transverse Vibrations of Continuous Beams Subject to an Axial Force and Carrying Concentrated Masses" Journal of Sound and Vibration, Vol. 86, pp. 279-284, 1983.
- 4) P.L.Verniere De Irassar, G.M.Ficcadenti and P.A.A.Laura, "Dynamic Analysis of a Beam with an Intermediate Elastic Support," Journal of Sound and Vibration, Vol. 96, pp. 381-389, 1984.
- 5) M.Gürgöze, "A Note on the Vibrations of Restrained Beams and Rods with Point Masses," Journal of Sound and Vibration, Vol. 96, pp. 461-468, 1984.
- 6) L.Ercoll and P.A.Laura, "Analytical and Experimental Investigation on Continuous Beams Carrying Elastically Mounted Masses," Journal of sound and Vibration, Vol. 114, pp. 519-533, 1987.
- 7) C.S.Kim and S.M.Dickinson, "On the Analsis of Laterally Vibrating Slender Beams Subject to various Complicating Effects," Journal of Sound and Vibration, Vol. 122, pp. 441-455, 1988.
- 8) A.Bokaian, "Natrual Frequencies of Beams under Compressive Axial Loads," Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, pp. 49-65, 1988.

- 9) M.Sasaki and S.Chonan, "Parametric Instability of Elastically Supported Multi-Span Beams," Journal of Sound and Vibration, Vol. 109, pp. 181-191, 1986.
- 10) R.B.Bhat, "Transvers Vibrations of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as predicted by using beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 105, pp. 199-210, 1986.
- 11) R.B.Blevins, "Formulas for Natural Frequency and Mode Shape," New York : Van Nostrand Reinhold Co, 1979.
- 12) L., Meirovich, "Computational Methods in Structural Dynamics," Sijthoff & Noordhoff International Publishers, The Netherlands. 1980.
- 13) L., Meirovitch, "Method of Analytical Dynamics," McGraw-Hill Book Co, New York, 1970.