

철근 및 프리스트레스트 콘크리트 뼈대구조의 유한요소 해석(시간의존성 포함)

Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete
Frames Including Time-Dependent Effects



강 영 진*

1. 概 要

콘크리트 뼈대구조의 유한요소 해석법을 철근 및 프리스트레스트 콘크리트 구조해석에만 발생하는 특수문제점을 중심으로 기술하였다. 일반적으로 사용하는 선형해석의 한계, 비선형 해석의 필요성, 비선형성의 근원 등을 설명하였고 비선형해석에 사용하는 해석 모형을 평면 뼈대구조, 공간 뼈대구조, 시공단계를 고려한 해석법 등을 구분하여 기술하였다. 비선형해석에 사용하는 콘크리트, 철근, PS 강재의 비선형 物性모형과 콘크리트 크리프에 대한 효과적인 수치해석 모형, PS 강재의 구조적 영향에 대한 해석모형을 제시하였다. 마지막으로 物性的 및 幾何的 비선형성을 고려한 시간의존성 비선형 수치해석 과정을 설명하였다.

2. 線型解析과 非線型解析

콘크리트 교량, 암거, 옹벽, 건물 등 대표적인 토목, 건축 구조물의 구조해석에 사용하는 해석모형은 대부분 평면 뼈대구조이며 그 해석법은 주로 선형해석법이다. 대부분의 콘크리트 구조물에는 사용하중 하에서도 균열이 발생하여 剛性이 상당히 저하되고 비선형 기동을 나타내는데도 선형해석법의 사용이 정당화되는 것은 응력분포가 뼈대부재의 상대 강성(모멘트 분배법에서의 剛比)에 비례하므로 균열분포가 균열하다면 비균열 단면을 균기로 한 해석결과와 관사하기 때문이다. 단지 변위값은 절대 강성의 크기에 의존하므로 균열에 의해 저하된 강성을 사용하여 계산하여야 할 것이다.

그러나 콘크리트 구조물의 정확한 해석을 위해 여러가지 원인에 의한 비선형성과 시간의존성을 고려하여야 한다는 것은 주지의 사실이다. 예를 들어 소성 파괴하중에 접근했을 때의 극한거동,

* 정회원, 서울대학교 토폭공학과 교수, 공박

좌굴에 의한 불안정 거동, 크리프, 건조수축 등에 의한 시간의존성 거동 등은 선형 해석법으로서는 그 해석이 불가능하다. 비선형성은 物性的 비선형성과 縱何的 비선형성으로 나눌 수 있는데 물성적 비선형성은 구성재료(콘크리트, 철근, PS 강재)의 비균질성과 균열, 항복, 파괴 등의 비선형 응력-변형률 관계, 균열후의 인장강화 효과, 철근파괴재가 전단거동에 미치는 영향, 하중변복 및 이력거동 등에 의한 것이며 기하적 비선형성은 대변형 고려시 발생하는 비선형 변형률-변위 관계, 변형된 상태에서의 평형방정식 수립(P-△ 효과 등)에 의한 것이다. 静的荷重에 의한 시간의 존성은 콘크리트의 老化, 크리프, 건조수축과 PS 강재의 응력이완 등에 의해 발생한다.

이러한 비선형성과 시간의존성으로 인해 강성 등 구조적 특성은 변위의 함수가 되어 계속 변하게 되며 중첩의 원리가 적용되지 않기 때문에 Newton-Raphson 법과 같은 반복법을 사용하여 해를 구해야 하는데 이것은 상당한 노력과 계산시간이 소요되는 번거로운 작업이며 일상 설계업무에 적용하는 것은 현재로서는 불가능한 일이다. 그럼에도 불구하고 콘크리트 구조물의 비선형해석이 필요한 것은 첫째 사용하중 및 극한 하중에 대한 정확한 해석에 의한 체계적 연구로 일상 설계업무의 지침이 되는 법규 및 시방서 규정의 이론적 근거를 제공하며 둘째 원자력 발전소와 같은 복잡한 구조물의 해석에 직접 사용하는데 있다.

3. 解析模型

구조해석을 위해 철근 및 프리스트레스트 콘크리트 뼈대구조는 절점에서 서로 연결된 콘크리트, 철근 및 PS 강재로 구성된 뼈대요소의 집합체라고 정의할 수 있다. 구조해석의 목적은 구조물의 기하적, 물성적 특성과 경계조건, 하중, 프리스트레싱, 온도 등 환경의 변화가 주어졌을 때 사용하중과 극한하중에 이르기까지의 절점 변위와

반력, 부재의 단면력을 구하는 것이다.

콘크리트 뼈대 구조물의 비선형 해석에 鋼構造物의 비선형 해석에 많이 사용하는 塑性崩壊機構를 기본으로 하는 방법을 사용하는 데에는 어려움이 있다. 그것은 콘크리트 뼈대 구조물에서는 강구조물에서와 같이 명확한 소성한지 형성 기준을 정의할 수 없기 때문이다. 이러한 어려운 점을 극복하기 위해 현재 사용하고 있는 해석모형은 크게 두가지로 나눌 수 있는데 그것은 集中塑性模型(Concentrated Plasticity Model)과 層分割模型(Layered Model)이다. 점중소성 모형에서는 塑性(物性的 비선형성)을 절점에 국한시켜 비선형 회전스프링을 부착하여 이를 모형하고 절점과 절점 사이의 뼈대요소는 선형 탄성 요소로 모형하는데 상대적으로 해석 수행시간을 단축할 수 있기 때문에 耐震解析 등 콘크리트 뼈대 구조물의 動的解析에 많이 사용된다. 그러나 비선형성을 절점에만 국한시켜서는 정확한 해석을 기할 수 없으므로 충분할 모형에서는 단면을 유한개의 층으로 분할하여 뼈대요소 내에서의 비선형성의 파급을 주제하는 방법을 사용한다. 이 방법은 상대적으로 긴 해석 수행시간을 소요하지만 보다 정확한 해석을 기할 수 있으므로 콘크리트 뼈대 구조물의 静的解析에 많이 사용된다. 本稿에서는 필자의 연구를 중심으로 충분할 모형에 의한 콘크리트 뼈대 구조물의 비선형해석법을 기술한다.

3.1 平面 뼈대構造

그림 1에 보이는 것은 평면 프리스트레스트 콘크리트 뼈대 구조물의 형상모형이다. 그림 1(a)에는 절점에서 연결된 선형 뼈대요소로 구성된 평면 뼈대구조와 3개의 절점 자유도, 구조좌표계 X, Y, 요소 좌표계 x, y 등이 표시되어 있다. 그림 1(c)는 요소 좌표계에서는 뼈대요소를 보인다. x축은 양단의 절점 i, j에 의해 정의되며 대칭축이 있는 단면은 요소내에서 일정하다고 가정한다. 요소의 y축은 단면의 대칭축과 일치하며 y

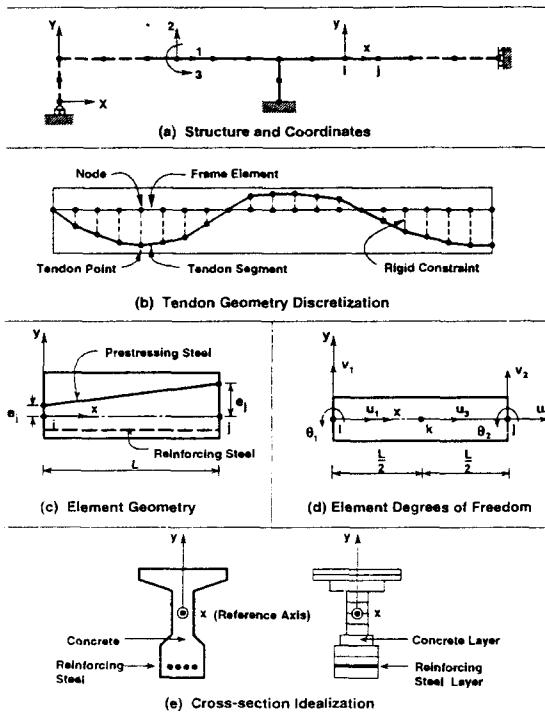


그림 1. 평면 프리스트레스트 콘크리트 뼈대구조의 형상모형

축의 원점은 단면의 도심과 일치할 필요는 없다. 그림 1(c)에는 뼈대요소내의 PS 강선과 철근이 표시되어 있다. PS 강재는 선형 트러스요소로 모형하며 양단의 절점 i , j 에 강체로 연결되어 있다고 가정한다.

그림 1(d)에는 요소 자유도가 표시되어 있다. 휨 변형에 대한 형상함수는 3차함수로, 축방향 변형에 대한 형상함수는 2차함수로 가정함으로써 요소내 축방향 변형률이 휨 변형과 축방향 변형에 대해 동일한 선형으로 변화하도록 하였다. 이에 필요한 요소내 자유도 u_3 는 요소강도행렬 계산 후 소거하여 구조물 전체 강도행렬에는 포함되지 않는다. 이렇게 함으로써 균열발생 후 단면 도심 위치의 변화를 고려한 정확한 비선형 해석이 가능하다. 단면내 깊이에 따른 재료 성질의 변화를 추적하기 위해 단면은 그림 1(e)에 보이는 바와 같이 유한개의 콘크리트와 철근층으로 분할한다.

각 층은 1축 응력 상태에 있다고 가정하며 비선형 해석 과정 중 현재의 응력과 변형률의 상태에 따라 변화하는 단성계수와 단면적, 요소 y 좌표로 정의된다.

그림 1(b)에 보이는 바와 같이 임의 형상의 PS 강선은 절점에서 강체로 연결된 선형트러스 요소의 집합으로 모형한다. 프리텐션 공법과 포스트텐션 공법을 구분하여 모형할 수 있으며 강선의 형상과 위치는 모든 강선 선분의 단부 절점 위치를 직접 입력하거나 주요 절점위치만 입력하고 매개변수에 의한 형상 생성법에 의해 나머지 절점 위치 자료를 생성할 수 있다.

3.2 空間 뼈대構造

평면 뼈대 구조의 충분한 모형을 확장하여 공간 뼈대 구조의 비선형 해석에 적용한 모형이 그림 2에 표시되어 있다. 공간 뼈대 구조는 절점당 6개의 자유도를 갖는 선형 공간 뼈대 요소로 모형한다. 그림 2(a)에는 요소 좌표계 x , y , z 와 12개의 절점 자유도가 표시되어 있다. 공간 뼈대 구조에서는 단면의 두 주축에 대한 휨과 비틀림을 고려하여야 하므로 그림 2(b)에 나타낸 바와 같이 단면을 격자 형태로 분할하고 뼈대 요소는 콘크리트와 철근 線分要素(filament)로 구성된다고 가정한다. 평면 뼈대 구조에서와 같이 각각의 선분요소는 1축응력 상태에 있다고 가정하며 그림 3의 응력-변형률 관계를 적용한다. PS 강선은 선형 트러스 요소로 모형하며 양단은 요소절점에서 강체로 연결되었다고 가정한다.

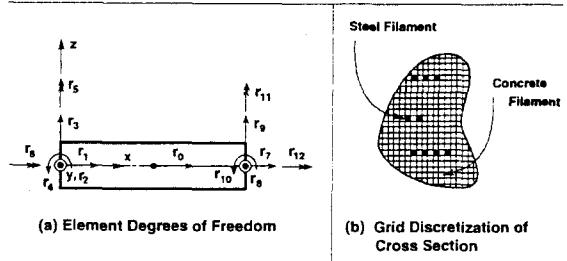


그림 2. 공간 프리스트레스트 콘크리트 뼈대구조의 형상모형

3.3 施工段階을考慮한 解析

최근 캔틸레버 공법(free cantilever method),連續押出工法(incremental launching method), 경간별 공법(span by span method) 등 세그멘탈 공법(segmental construction method)에 의해 건설되는 프리스트레스트 콘크리트 교량이 증가하고 있는데 이러한 교량은 시공중 하중, 경계조건의 변화와 콘크리트 크리프, 건조수축, PS 강재의 응력이완 등의 시간의존성 영향을 크게 받으므로 시공단계를 고려한 해석이 필요하다.

그림 1(a)에는 시공중에 있는 교량의 모형이 그려져 있다. 실선으로 표시한 부분은 시공완료한 부분이고 점선으로 표시한 부분은 앞으로 시공할 부분이다. 이 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 시공단계를 고려한 해석을 하려면 해석 과정중 어느 때나 구조 형태와 하중조건의 변화를 고려할 수 있어야 한다. 이러한 시공중의 변화에는 빠대 요소의 설치와 제거, 지점의 설치와 제거, PS 강선의 긴장작업, 재긴장작업, 제거, 가설장비의 이동, 하중의 재하 및 제거가 포함된다.

4. 材料性質의 模型

비선형 해석에 사용되는 프리스트레스트 콘크리트 빠대 구조를 구성하는 재료, 즉 콘크리트, 철근, PS 강재의 응력-변형률 관계가 그림 3(a), 3(b), 3(c)에 각각 그려져 있다. 이 그림에서 점으로 표시한 부분의 수치는 사용자가 입력하게 되어 있다. ϵ^m 은 기계적 순간 변형률이며 ϵ^{nm} 은 콘크리트의 크리프, 건조수축, 老化와 온도변화에 의해 발생하는 비기계적 변형률이다. 콘크리트의 응력-변형률 관계 중 압축부분은 철근에 의한 콘크리트의 구속효과(Confined Concrete) 모형을 가능하게 하며 인장부분은 균열후의 철근에 의한 인장강화 효과(Tension Stiffening Effect)를 3차곡선으로 모형한 것이다. 철근과 PS 강재의 응력-변형률 관계는 二重선형 및 多重선형으로 각각 모형하였

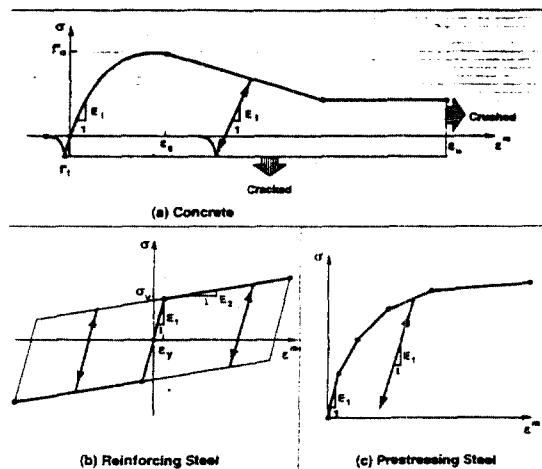


그림 3. 구성재료의 응력-변형률 관계

다. 이러한 모형에 의해 하중변복의 영향을 해석 할 수 있다.

5. 콘크리트 크리프의 解析模型

시간의존성 비선형해석을 위한 임의시간 t 에서의 콘크리트의 총변형률 $\epsilon(t)$ 는 기계적 변형률 $\epsilon^m(t)$ 와 비기계적 변형률 $\epsilon^{nm}(t)$ 의 중첩으로 표현 할 수 있다고 가정한다.

$$\epsilon(t) = \epsilon^m(t) + \epsilon^{nm}(t) \quad (1)$$

$$\epsilon^{nm}(t) = \epsilon^c(t) + \epsilon^s(t) + \epsilon^a(t) + \epsilon^l(t) \quad (2)$$

식(2)에서 $\epsilon^c(t)$, $\epsilon^s(t)$, $\epsilon^a(t)$, $\epsilon^l(t)$ 는 각각 시간 t 에서의 콘크리트의 크리프, 건조수축, 노화, 온도 변화에 의한 변형률이다.

크리프 변형률 $\epsilon^c(t)$ 는 다음과 같은 중첩적분으로 표시한다.

$$\epsilon^c(t) = \int_0^t C(\tau, t - \tau, T) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

식(3)에서 $C(\tau, t - \tau, T)$ 는 단위 크리프 함수로서 載荷齡 τ 와 온도변화 T 의 함수이며 $\sigma(\tau)$ 는 시간 τ 에 가해지는 응력이다. 응력과 온도의 변화는 시간구간 $t_n; n=1, 2, \dots, N$ (그림 4a, b)에서만 발생

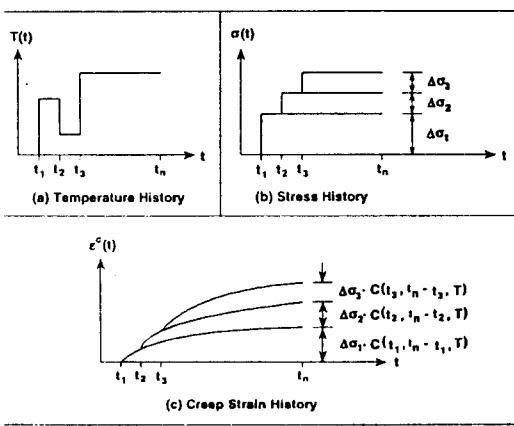


그림 4. 크리프 변형률의 중첩

하며 특정 시간구간에서의 크리프 변형률 중분을 계산하기 위해 그 시간구간동안 응력과 온도는 일정하다고 가정한다.

다음과 같은 특수한 지수함수를 단위 크리프 함수로 사용하면 실험적 또는 경험적 크리프 자료를 정확히 나타내면서 모든 응력변화의 이력을 저장할 필요가 없다.

$$C(\tau, t-\tau, T) = \sum_{i=1}^m a_i(\tau) [1 - e^{-\lambda_i \Phi(T)(t-\tau)}] \quad (4)$$

여기서 m , $a_i(\tau)$, λ_i , $\Phi(T)$ 등은 실험적 또는 경험적 크리프 자료로부터 오차가 최소로 되도록 최소자승법에 의해 결정한다.

다음 식과 같이 시간구간, 응력 및 크리프 변형률에 대한 중분량을 정의하여 효과적인 크리프 변형률 계산법을 유도할 수 있다.

$$\Delta t_n = t_n - t_{n-1} \quad (5)$$

$$\Delta \sigma_n = \sigma_n - \sigma_{n-1} \equiv \sigma(t_n) - \sigma(t_{n-1}) \quad (6)$$

$$\Delta \epsilon_n^c = \epsilon_n^c - \epsilon_{n-1}^c \equiv \epsilon^c(t_n) - \epsilon^c(t_{n-1}) \quad (7)$$

식(3)에서 (7)까지를 결합하여 다음과 같이 연속적으로 시간구간 t_n 에서의 크리프 변형률의 중분 $\Delta \epsilon_n^c$ 을 계산할 수 있는 식을 유도할 수 있다.

$$\Delta \epsilon_n^c = \sum_{i=1}^m A_{i,n} [1 - e^{-\lambda_i \Phi(T_{n-1}) \Delta t_n}] \quad (8)$$

$$A_{i,n} = A_{i,n-1} [e^{-\lambda_i \Phi(T_{n-1}) \Delta t_{n-1}}] + \Delta \sigma_{n-1} a_i(t_{n-1}) \quad (9)$$

$$A_{i,2} = \Delta \sigma_2 a_i(t_1) \quad (10)$$

상기한 계산과정의 중요한 이점은 다음 단계의 크리프 변형률 중분을 계산하는데 과거의 모든 응력 이력을 필요로 하지 않고 바로 전단계에서의 응력만 필요로 한다는 점이다.

6. 프리스트레스의 影響

프리스트레스 콘크리트 구조물에서 유효 프리스트레스의 양은 하중 저항능력에 큰 영향을 미치는데 시간이 지남에 따라 마찰, 정착기구의 변위, 탄성수축, 콘크리트의 크리프, 전조수축, PS 강재의 응력이완 등의 영향으로 긴장작업시의 프리스트레스 양에 비해 수십 퍼센트까지의 손실이 발생하므로 단계별로 유효 프리스트레스의 양을 정확히 계산하는 것은 진요한 일이다. 포스트텐션 방식에서 큰 초기손실의 원인이 되는 긴장작업시 마찰의 영향은 다음식으로 계산한다.

$$P_2 = P_1 e^{(\mu \theta + KL)} \quad (11)$$

여기서 P_1 과 P_2 는 1점과 2점의 프리스트레스 힘, L 은 1점과 2점 사이의 길이, θ 는 1점과 2점 사이의 각도변화(라디안으로), μ 는 꼭지를 마찰계수, K 는 파상 마찰계수이다.

그림 1(b), (c)에 보이는 바와 같이 PS 강선을 요소 단부 절점에서 강체로 연결된 선형트러스 요소의 집합으로 모형하면 프리스트레스의 변화와 이에 의한 등가 절점하중을 간단하게 구할 수 있다. 요소내에서 PS 강선은 일정한 축력을 가지고 있다고 가정하므로 콘크리트와 PS 강선의 상호작용은 단부 절점에서만 발생하며 단부 절점은 요소 절점과 강결되어 있으므로 힘과 변위의 변환을 쉽게 할 수 있다. 비선형 해석의 반복과정 중 PS 강선 선분의 프리스트레스 계산방법을 요약하면 다음과 같다.

(1) 변형률의 중분 $\Delta \epsilon = (L_c - L_p)/L_0$ 를 계산한

- 다. 여기서 L_c 는 PS 강선 선분의 현재 길이, L_p 는 전단계 길이, L_0 는 원래 길이이다.
- (2) $\Delta\varepsilon$ 을 전합계에 더해 지금까지의 총변형률 ε 을 구한다.
 - (3) ε 에 대응하는 응력 σ 를 그림 3(c)의 비선형 응력-변형률 관계로부터 구한다.
 - (4) 주어진 경험식에 의해 응력이 완량을 뺀 현재의 프리스트레스 σ 를 구한다.

7. 非線型 解析過程

시간의 존성 비선형해석을 위해서는 시간을 유한 개의 시간구간으로 나누어 前進積分을 수행한다. 변위와 변형률 등은 시간구간을 따라 전진하면서 계속적으로 더하여 그 해를 구하게 된다. 각 시간구간에서 변위법을 기본으로 한 직접 강도법에 의해 구조해석을 수행하는데 평형방정식은 현재의 재료 성질과 변위 상태를 반영하는 비선형 평형방정식이다. 기하적 비선형성은 수정 라그란지 법 (Updated Lagrangian Formulation)에 의거하여 고려하는데 현재의 변형 상태를 고려한 평형방정식을 수립한다.

비선형 평형방정식은 다음과 같이 전체형 또는 접선형으로 나타낼 수 있다.

$$[K]\{r\} = \{R\} \quad (12a)$$

$$[K_t]\{dr\} = \{dR\} \quad (12b)$$

여기서 $\{r\}$ 은 절점 변위 벡터, $\{R\}$ 은 절점 하중 벡터, $[K]$ 는 강도행렬이며 $\{dr\}$, $\{dR\}$ 은 절점변위와 하중의 미소 증분, $[K_t]$ 는 접선 강도행렬이다. 강도행렬 $[K]$ 또는 $[K_t]$ 는 변위 $\{r\}$ 과 현재 재료 상태의 함수이다. 식(12a) 또는 (12b)는 하중증분법과 각 하중증분에 대한 반복법에 의해 전산기로 푼다.

시간구간 t_n 에서의 하중증분 $\{\Delta R_n\}$ 은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\Delta R_n\} = \{\Delta R_n^j\} + \{\Delta R_n^{nm}\} + \{R_{n-1}^u\} \quad (13)$$

여기서 $\{\Delta R_n^j\}$ 은 현 시간구간 t_n 에서의 절점 하중의 증분, $\{R_{n-1}^u\}$ 은 전 시간구간 t_{n-1} 에서 남은 불평형 하중이며 $\{\Delta R_n^{nm}\}$ 은 전 시간구간 t_{n-1} 에서 현 시간구간 t_n 사이에 발생하는 비기계적 변형률의 증분에 대한 등가 절점하중이며 여기에는 콘크리트의 크리프, 진조수축, PS 강재의 응력이 완온도변화가 포함된다. 등가 절점하중의 계산은 단면내에서는 層積分(Layer Integration)에 의해, 요소의 길이 방향으로는 3점 가우스 求積法(3 Point Gauss Quadrature)에 의해 수행한다. $\{\Delta R_n\}$ 을 다시 분할하여 각 하중증분 $\{\Delta R\}$ 에 대하여 다음과 같은 과정으로 불평형 하중에 대한 반복법을 사용하여 하중증분 해석을 수행한다.

- (1) 현재의 변위와 재료 상태에 의거한 각 요소의 접선 강도행렬을 요소 좌표계에서 구한다. 현재 유효한 각 요소의 변위 변환 행렬을 사용하여 구조 접선 강도행렬을 구조좌표계에서 취합한다.
- (2) 식(12b)를 풀어 변위증분 $\{\Delta r\}$ 을 구하고 이를 요소 좌표계로 변환하여 비선형 변형률-변위 관계에 의해 변형률의 증분 $\Delta\varepsilon$ 을 구한다. $\Delta\varepsilon$ 를 전 단계까지의 합계에 더하여 콘크리트, 철근, PS 강재의 총 변형률 ε 을 구한다.
- (3) 절점 변위증분 $\{\Delta r\}$ 을 전 단계까지의 합계에 더하여 현재의 총 절점 변위 $\{r\}$ 을 구한다. 요소 단부 절점의 좌표를 수정하고 요소의 길이, 변위 변환행렬을 수정한다.
- (4) 현재의 총 변형률 ε 으로부터 총 비기계적 변형률 ε^{nm} 을 빼어 총 기계적 변형률 ε^m 을 구하고 그림 3의 비선형 응력-변형률 관계에 의해 콘크리트, 철근, PS 강재의 응력 σ 를 구한다.
- (5) 각 요소에서 현재의 총 응력을 적분하여 요소 단부에서의 단면력을 계산하고 수정한 변위 변환행렬에 의해 구조좌표계로 변환하여 내부 절점 저항력 $\{R^i\}$ 를 취합한다.
- (6) 현재의 총 절점하중 $\{R\}$ 에서 내부 절점

저항력 $\{R^i\}$ 를 빼어 불평형하중 $\{R^u\}$ 를 구한다.

$$\{R^u\} = \{R\} - \{R^i\} \quad (14)$$

(7) $\{\Delta R\} = \{R^u\}$ 로 놓고 단계(1)로 돌아간다.

(1)에서 (7)까지의 단계는 불평형하중 $\{R^u\}$ 가 허용치 내에 들 때까지 계속된다. 허용치 내에 들면 불평형하중 $\{R^u\}$ 를 다음 하중증분 $\{\Delta R\}$ 에 더하고 (1)에서 (7)까지의 반복 계산 과정을 다시 수행한다.

현 시간구간 t_n 에서의 마지막 하중단계가 종료되었을 때 다음 시간구간 t_{n+1} 으로 진행하여 마지막 시간구간까지의 해석이 종료되거나 구조물이 파괴될 때까지 같은 과정을 반복한다.

8. 참고문헌

지금까지 기술한 비선형 해석과정에 의해 프리스트레스트 콘크리트 뼈대 구조물의 시공중, 사용하중 및 극한하중에 대한 해석을 할 수 있는 전산프로그램이 개발되었으며 이에 대한 자세한 해설

이 다음 참고자료에 수록되어 있다.

1. Kang, Y.J., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Frames," Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No.77-1, January 1977.
2. Mari, A., "Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames," Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UC-SESM Report No. 84-10, June 1984.
3. Kang, Y.J., "SPCFRAME-Computer Program for Nonlinear Segmental Analysis of Planar Prestressed Concrete Frames," Division of Structural Engineering, Mechanics and Materials, University of California, Berkeley, Report No.UCB/SEMM-89/07, February 1989.