

有限 要素法の 기본 개념과 방법

Basic Finite Element Concepts and Methods



이 병 해*

1. 有限 要素法の 歴史와 發展

유한 요소 해석법에 대하여 먼저 그 역사를 알아보자. 오늘날, 構造 力學, 熱傳達, 電磁氣學, 流體 力學 및 기타 분야에서 어려운 기술적 문제의 해결에 있어서의 유한요소법의 가시적인 성공에도 불구하고, 유한 요소 해석의 출현은 그다지 오래되지 않았다. 우선, 일반적으로 ‘有限 要素法’ 때로는 FEM 혹은 FEA라고 불리는 방법의 역사와 생겨나게 된 동기에 초점을 맞추어 보고자 한다.

‘무엇’에 추가하여 ‘누가’, ‘언제’, ‘왜’라는 것도 이야기하여 보자. 먼저 특히 ‘누가’에 대해서 살펴볼 터인데 이는 그들이 有限 要素法을 낳게 했고, 이 방법을 실용화할 수 있도록 초기 단계에서 주 역할을 하였기 때문이다.

1.1 ‘누가’, ‘언제’

오늘날 有限 要素法에 관한 교재들은 주위에 널

려 있고, 대부분의 공과대학에서는 그 교과 과정을 개설하고 있지만 30년 전 초기에는 형편이 달랐다. 또한 오늘날 공학적 문제를 해결하기 위한 有限 要素法을 지원하기 위해서 많은 상용(商用) 컴퓨터 소프트웨어들이 존재하고 있지만 有限 要素法이라고 불리는 방법과 유사한 방법으로 구조 해석 문제를 풀기 위한 컴퓨터 프로그램들이 1950년대 말과 1960년대 초에 항공기 산업분야에서 국한되어 이용되었으며, 그것들은 개선된 해석법을 이해하도록 하는데 많은 공헌을 하였다.

실제로 그 방법을 입증한 것으로 많은 사람들이 인정하는 참고문헌은 1956년에 출간된 Turner, Clough, Martin, Topp의 논문들이다. Turner가 보잉 항공사(Boeing Aircraft)를 위해 일했다는 데서 항공기 산업의 영향을 찾아볼 수 있으며, Martin은 Seattle에 있는 Washington 대학의 항공 공학부에 있었다. California-Berkeley 대학의 土木工學科 교수인 Ray Clough는 항공 분야에는 있지 않았지만, 有限 要素法을 개발한 사람들 중의 핵심 인물이다. 그는 1960년의 논문에서 “유한 요소법(finite element method)”이라는 新造語를 만들어 냈다. 당시에는 누구도 이 표현이 존속하

* 한양대학교 건축공학과 교수, 공박.

게 되리라고 확신하지 않았지만, 이 표현은 지금 까지도 사용되어 Clough의 업적을 훨씬 더 기억 되게 만든다.

다른 사람들로서는 Argyris와 독일 Stuttgart 대학 출신의 동료들이다. Kelsey와 함께 쓴 그의 저서는 1960년에 출간되었지만, 1954년과 1955년에 '항공기 공학 저널(Aircraft Engineering Journal)'에 게재된 연구에 기초를 두고 있다. 이 연구는, 참고문헌[1]과 분명히 동시대이므로, 비록 유한 요소라는 이름이 다른 곳에서 생성되기는 했지만 많은 인정을 받을 만한 것이다. 참고문헌 [2]는 초기의 이들 선구자들이 얼마나 가까이 밀착되어 있었는지를, 그리고 다시 항공기 산업의 영향이 얼마나 강하게 발휘되었는지를 보여준다. 이 참고문헌은 구조물의 數值 解析에 관하여 개최된 공군 회의(Air Force Conference)에서 발표된 논문이었다. 여러 나라로부터 200명의 과학자들이 참석하였고, Turner, Clough, Argyris가 참석하고 있었다. 이 무렵 컴퓨터에서의 有限 要素法 사용을 지원하기 위해서 많은 개발이 이루어지기 시작하고 있었는데, 여기에는 NASTRAN(NASA STRuctural ANALysis, NASA에 歸屬)을 낳게한 NASA의 프로젝트도 포함된다.

商用 소프트웨어 ASKA(動的解析 자동 시스템 : Automatic System for Kinematic Analysis)는 Argyris의 연구 결과이며 오늘날에도 여전히 인정 받으며 사용되고 있다. SAP(Structural Analysis Program)이라 불리며 널리 알려진 프로그램은 Clough의 학생인 California-Berkeley 대학의 Ed Wilson의 연구 결과이다.

Wisconsin 대학의 R. D. Cook 교수는 有限 要素法이 잘 정립된 이후인 1974년에 대학에서의 유한 요소 강의를 위한 교재를 저술하였다. 이는 유한 요소에 대한 훌륭한 안내서이다. 그의 역사적 고찰은, 그 개념이 수학자 R. Courant의 1943년도 논문 [4]까지 거슬러 올라간다고 시사하고 있다. Courant는 連續體(continuum) 문제를 삼각형 영역으로 쪼개고 그 界(field)를 삼각형내의 近似值

조각으로 대체할 것을 제안하였다.

요약하자면, FEM 기술이나 방법의 발달은 적어도 30-40년이 되며, 이는 몇몇 선구자들에 의해서 거의 독자적으로 정립되었다. 어쩌면 1950년대까지만 해도 충분히 크고 빠른 컴퓨터를 사용할 수 없었고, 단지 큰 항공기 회사에서만 사용할 수 있었기 때문에 Courant의 생각으로부터 10년 동안이나 아무것도 이루어지지 않았는지도 모르겠다. 이는 '누가', '언제'에 관한 몇가지 해답을 제공해 준다. 이제 '무엇을', '왜'로 옮겨가자.

1.2 '무엇을'

유한 요소가 무엇인가는 Courant의 생각에서 암시되었다. 과거, 固體力學, 流體力學에 관련된 공학적 문제들은 物理學이나 工學 원리에 나타나 는 推論 방법을 사용하고, 관심을 갖는 변수에 관한 미분 방정식들을 유도함으로써 설명되어져온 것이 典型이었다. 工學的 문제의 거동을 설명하기 위한 방정식을 세우기 위해 직접적으로 사용되는 원리에는 平衡(equilibrium), 질량에 작용하는 힘에 관한 Newton의 생각들, potential 에너지, 變形 에너지(strain energy), 畧에너지의 보존, 가상 일(virtual work), 熱力學, 질량 보존, Maxwell의 방정식 등 다수가 포함된다. 이러한 문제들은 일단 문제를 定式化하는 힘든 과정이 끝나고 나면 그 결과로 생기는 수학적 방정식, 대개는 미분 방정식(線形이거나 때로는 非線形인 편미분 방정식)을 푼다는 것은 거의 불가능하다고 여겨졌었다. 규칙적인 形狀(직사각형, 원 등)의 가장 단순한 경계 조건을 갖는 아주 간단한 문제만을 풀이할 수 있었다.

유한 요소의 발전을 이끌어온 構造 力學의 탄탄한 기초는 실질적으로 19세기 末엽의 선구자들에 의해서 이루어졌다. Dover에서 발행한 출판물들 [5]은 potential과 補完(complementary) 에너지 원리와 오늘날 우리가 다시 음미하여볼 가치가 있는 平衡 이론에 관한 Castigliano의 엄청난 업적들

을 출판해 왔다. 이 참고문헌은 당시의 수많은 다른 연구자들의 업적들도 담고 있다. Castigliano의 원리는 원래 100여년 전인 1879년 Italy에서 출간되었다. 그는 자신의 원리를 이용하여 철교와 트러스에 관한 많은 실제적인 문제들을 해결했다. 참고도서[6]에 의하면 Rayleigh경의 참 해를 얻는 방식은, 어쩌면 Castigliano보다 더 분명한지도 모르지만, 기둥이나 軸(column or shaft)의 형상, 즉 橫變位를 가정한 후 이 形狀 함수(shape function)을 이용하여 구한 에너지의 最小化를 통하여 해를 구하는 것이다. 경계 조건들을 만족시키는 形狀 함수를 선택하는 데는 상당한 기술이 요구되었다. 형태가 곧은 棒(straight rod)이 아닐 때는 문제는 더 어려워졌다. 참고도서 [6]의 7장 첫번째 문단을 보면 Rayleigh 또는 그의 추종자들은 많은 경우에 있어서 부재의 幾何學的 形狀으로 인하여 적절한 非이론적 近似방법을 사용하는 것이 힘들거나 불가능하다는 것을 깨달았다고 한다.

참고도서 [6]의 부록 II는 Ritz가 1909년에 Rayleigh의 원리를 확장한 중요한 원리를 만들었는데, 이는 계산될 軸(shaft)에 하나 이상의 주파수를 허용하여 복수의 독립적인 形狀 함수들을 사용한다는 점이 포함되어 있다고 지적하고 있다. 이의 단점은 더욱 더 많은 수의 聯立 代數 방정식을 풀 필요가 있다는 점이다. 만약 Ritz가 자신의 생각을 다른 幾何學的 영역에도 사용하고, 각 영역에 대하여 개별적인 近似 함수를 정립한 후 이들을 함께 연결 시키도록 확장하기만 했어도 진정한 ‘유한 요소의 아버지’가 될 수도 있었다. 이것이 바로 유한요소가 다루는 ‘무엇’이다. 그것은 2절에서 다루는 바와 같이, 아이들이 장난감 블록과 막대를 가지고 풍차 방앗간, 트럭 등을 만드는 것과 거의 유사한 방법으로 모든 복잡한 幾何형상의 공학 문제를 수식적인 방법으로 기본요소들을 가지고 구성한다. Courant가 Ritz 후 꼭 40년만에 명백히 얻어낸 그 생각들은 현대의 디지털 컴퓨터가 방대한 양의 대수 방정식에 대한 공포를 떨쳐 버릴때까지 기다려야만 했다. 곧이어 Matrix방법

에 의하여 방대한 양의 代數 방정식의 해법이 유한 요소 방법에 도입되었다. 이제 수학자들이 線形 代數學으로부터 매트릭스 방정식을 풀기 위한 모든 방법들을 기술자들에게 도와주기 위해 다시 참여할 기회를 맞고 있다. 이 중요한 수학 분야에 대한 훌륭한 참고서는 참고도서[7]이며, 러시아어 저자 V. N. Faddeeva의 책이다.

1.3 ‘왜’

다시 말하자면, 有限 要素法이란 크고 복잡한 幾何 形狀의 문제(즉, 예로서 보잉 747기의 응력 해석)를 수학적으로 풀이하는데 따르는 어려움이 미분 방정식 풀이 방법에서 代數學의 연립방정식 풀이 문제로 변환되는 해석법인데, 여기서는 실제의 복잡한 형상을 구축하기 위한 블록(building block)이나 유한 요소(Finite Element)로서 단순한 형상(즉, 삼각형, 봉(rod), 보(beam)등)으로 이루어지며, 이들 각 요소에서 성립되는 관계와 전체 구조에 대해서 풀이될 모든 방정식을 포함한다. 작지만 無限小가 아닌 요소들의 중요한 변수들 간의 상관관계에 대한 표현은 각 요소에 대한 Rayleigh 또는 Ritz의 방법을 적용하여 결정된다. 일단 이것이 끝나고 나면, 요소의 미지수 수와 같은 크기의 매트릭스가 만들어져 요소를 나타낼 수 있다. 이것은 線形 代數學의 관계이며 미분 방정식이 아니다. 따라서 전체 문제는, 실제 문제에서 많은 수의 단순한 조각들로 구축되는 것과 거의 유사한 방법으로 요소 매트릭스를 컴퓨터내에 결합시킴으로써 하나의 큰 대수 방정식으로 만들어질 수 있다. 2절은 예제를 통하여 이를 자세히 살펴본다. 여기에서의 핵심은 방법의 單純性和 反復性이다. 근대의 Castigliano와 같은 전문가들은 정확히 나타내어진 유한 요소에서 성립되는 관계식을 유도해낼 수 있었고, 컴퓨터들에게 전체 문제를 표현할 수 있는 수천개의 방정식들을 결합하고 풀이하도록 program을 통하여 지시할 수 있었다. 오늘날의 공학자들은 실제 하중과 경계 조건을 규

정함으로써 실제 문제의 해를 구할 수 있다. 실제로, 컴퓨터내에서의 해답 모델을 그래픽 묘사(simulation)를 통하여 표현함으로써 우리로 하여금 그것이 실제인 것처럼 시각적으로 확인할 수 있게 해준다.

이제 有限 要素法을 개발한 동기에 관한 '왜'라는 문제는 분명하게 되었다. 항공기 산업분야에는 최초의 보잉 747기가 그 구조적 무결함을 입증받기 위한 실험이 준비될 때까지 단순히 기다릴 수는 없었다. 초기의 해석상의 잇점은 하중, 재질(materials)과 형상(geometry)을 변화시키거나, 수정된 비행기의 응력을 다시 계산하는 것이 상당히 간편하다는 것이다. 그 잇점은 오늘날에도 여전히 전하며, 그 방법은 다른 산업분야로, 또한 구조 외의 다른 응용 분야로 널리 퍼져왔다.

사실, 有限 要素法은 場(field)의 문제로 형식화될 수 있는 거의 모든 문제를 풀기 위해서 사용될 수 있다. 지난 30여년에 걸쳐서 대단히 많은 FEM 관련 소프트웨어가 개발되었다. 예로서 원자력 발전 관련 산업에도 ANSYS라는 강력한 FEM program을 낳게 하였다. 자동차 산업 분야에서도 1970년대 초에 본격적으로 FEM방법을 사용하기 시작하였는데, 석유 파동 이후 자동차에 사용되는 연료절약을 위하여 안전하면서도 가벼운 차를 만들기 위하여 항공 산업에서 사용하는 기술을 받아들이기 시작하였다.

아직 有限 要素法 이용의 초기 단계에 있는 분야는 아마 electromechanical, magnetic 분야일 것이며, 이는 아마도 필요성의 인식과 構造 工學에서 電子 工學으로의 지식의 전달이 늦어졌기 때문일 것이다. 오늘날의 심화된 국제 경쟁은 電磁氣學의 適合性을 만족하는 설계에 대한 요구, 그리고 高주파 전력 공급기와 같은 새로운 전자 장비 등의 개발 요구가 이러한 추세를 만들고 있다.

대단위 우주 항공 회사 이외에서의 流體解析에 대한 有限 要素法의 사용은 아직 유치한 단계에 있다. 유체에 대한 보다 일반적인 해석법의 발전은, 대부분의 문제가 非線形이므로, CRAY와 같은

아주 빠른 컴퓨터의 출현을 기다려야만 했다. 사실, 컴퓨터가 많이 量産되어서 훨씬 빨라지고 믿을 수 없을 만큼 값싸져버린 일련의 일들이 없었더라면, 有限 要素法은 오늘날처럼 존재할 수 없었을지도 모른다.

2. 有限 要素法의 기본 개념

2.1 場(field) 문제 해석의 필요성

最適의 설계를 얻어내기 위하여는 반복된 시행 작업을 진행하여야 된다. 이에 따라 설계 모델의 변화를 계속하여 변경하면서 실제 문제에서 일어날 수 있는 상황을 예측하기 위하여 field의 계산은 자주 필요하며, 이 field는 해석되는 구조체내에서 위치와 경우에 따라서는 시간에 따라 변화하는 양으로 정의된다.

많은 종류의 field가 있으며, 각 field는 취급하는 문제에 따라 다른 양을 갖게된다. 표 1은 해석될 다양한 field를 열거하였다. 설계되는 구조체의 응력은 구조체가 파괴되지 않도록 계산되어야만 한다. 熱 흐름(heat flow)은 구조체가 너무 많은 열을 받지 않도록, 電磁氣 구조체에서는 電磁氣場이, 流體 구조체에서는 流體 흐름(fluid flow)이 계산되어야 한다.

엄밀히 말해 어떤 field라도 potential과 관련이 있다. 표 1은 field뿐만 아니라 각 field에 연관된 potential에 대해서도 보여주고 있다. field는 위치에 대한 그들 도함수로서 potential과 관계를 가진다. 공간 도함수의 정확한 형태는 문제의 종류에 따라 변할 수 있다.

표 1. 다양한 performance 문제

Field	Potential
열전도	온도
역학적 응력	변위
전기장	전압
자기장	자기 벡터 potential
유체 속도	유체 potential

2.2 有限 要素 모델링

이상의 field와 potential의 계산은 유한 요소 해석을 사용하여 수행할 수 있다. 해석은 구조체의 유한 요소 모델을 결정함으로써 시작된다. 모델은 여러 크기와 형태의 조각인 유한 요소들의 집합이다. 유한 요소 모델은 해석될 구조체에 대해 다음과 같은 자료를 내포한다.

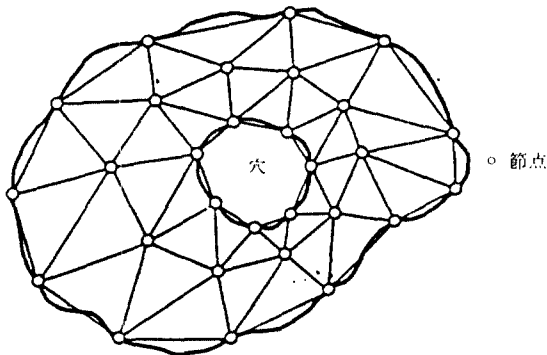
- 유한 요소로 나뉘어진 幾何形狀(geometry)
- 재료(materials)
- 가해진 衝擊(excitations)
- 拘束 형태(constraints)

재료 특성, 衝擊, 拘束 조건은 대개 쉽고 빠르게 나타낼 수 있지만, 幾何形狀은 표현하는데 어려움이 따른다.

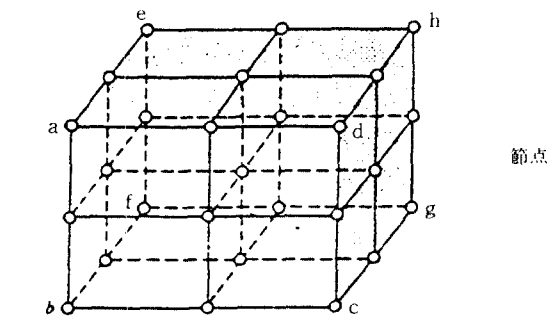
有限 要素法을 이용하여 구조체를 모델링할 때는 그림 1과 같이 이들 물체의 차원과 동일한 유한 요소계를 사용하여 구조체를 분할하여야 한다. 이때 각 요소의 형상과 크기는 동일하지 않아도 되지만 구조체를 표현하는 각 유한 요소는 그림 1에서 보는 바와 같이 절점에 의하여 상호 연결되어야 한다. 이러한 조건으로 구조체는 유한요소계와 그들을 연결하는 절점에 의하여 치환된 것으로 여겨질 수 있으며, 인접하는 유한 요소간의 물리적인 連續性을 부여할 수 있다. 또 한가지 고려해야 할 사항은 구조체의 형상이나 작용하는 하중 상태에 따라 효율적인 요소 분할이 이루어져야 된다는 점이다.

예를 들면, 그림 2와 같이 집중 하중이 작용하는 경우 혹은 구멍이 뚫어진 경우에는 응력 집중현상

(a) 線形의 유한요소에 의하여 분할된 1차원 구조체

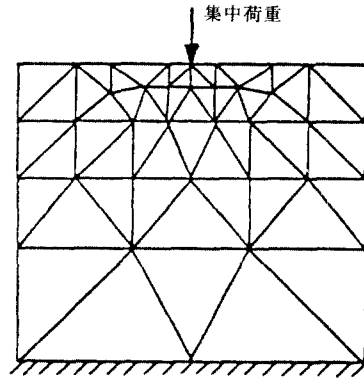


(b) 平面 삼각형 요소에 의하여 분할된 2차원 구조체

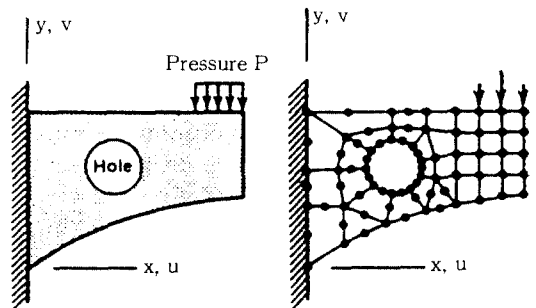


(c) 立方體 요소에 의하여 분할된 3차원 구조체

그림 1



(a) 집중하중이 작용하는 경우



(b) 구조체내에 구멍이 있을 경우

그림 2

이 있으므로 이 부분에 대하여는 가능한 한 요소 분할을 세분화하여야 한다. 또한 요소수가 많으면 많을수록 정확한 해에 가까워질 수 있지만 이에 반해 계산 시간은 매우 증대되어지므로, 문제의 성격에 따라 요구되는 해의 精密度를 고려하여 합리적인 요소 분할이 이루어지도록 해야 할 것이다. 그리고 각각의 유한 요소는 다른 유한 요소들과 같은 특성을 가질 수도 있고 다른 재료 특성을 가질 수도 있다.

衝擊은 유한 요소 모델에서 나타내어 질 수 있다. 그들은 유한 요소 내에서 또는 절점에서 발생할 수도 있다. 충격은 구조 응력 해석에서는 하중이라고 불릴 수 있는데, 이 하중에 의해 유한 요소들은 變位를 일으키게 된다.

유한 요소 모델의 각 절점은 하나 또는 그 이상의 자유도를 갖는 하나의 potential을 갖는다. 熱 문제에서 potential은 온도이며, 각 절점당 하나의 자유도를 갖는 스칼라 값이다. 構造 문제에서 potential은 각 절점당 6개의 자유도까지 가질 수 있는 하나의 變位 벡터이다. 6개의 자유도는 3 방향에서의 변위와 3축에 대한 회전이다.

절점에서의 각 자유도는 구속될 수도, 구속되지 않을 수도 있다. 구속의 한 형태는 자유도 값이 알려진 single-point constraint(SPC)이다. 구속의 또다른 형태는 다중 구속(multipoint constraint)(MPC)이며, 다중 구속에서는 potential의 자유도가 다른 potential 요소(대개는 다른 절점)와 같거나 그 함수일 때를 제외하고는 모르는 값이 된다. 일반적으로 모델의 대부분의 절점들은 구속되어 있지 않으며, 유한 요소 프로그램은 모든 자유도 값들을 결정하게 된다.

2.3 에너지 汎函數(energy functional)의 最小化

유한 요소 해석으로 유한 요소 모델의 온도, 응력, 場(field) 또는 다른 미지의 변수들을 얻을 수 있는 방법은 에너지 범함수를 최소화하는 것이다. 에너지 범함수는 특정한 유한 요소 모델과 관련된

모든 에너지들로 구성된다.

에너지 보존 법칙은 물리학에서 잘 알려진 원리이다. 그 법칙은 原子 에너지가 포함되지 않는다면, 구조물 또는 구조계의 총 에너지는 항상 일정함을 설명한다.

有限 要素法은 에너지 범함수를 최소화함으로써 어떤 유한 요소 모델에 대해서도 정확한 해를 얻도록 해주며, 그 얻어진 해는 에너지 보존 법칙을 만족시키게 된다.

범함수의 최소값은 미지의 절점 potential에 대한 범함수의 도함수를 0으로 놓음으로써 구할 수 있다. 어느 함수의 최소값이라 하더라도 기울기 또는 도함수가 0인 계산법으로부터 알 수 있다. 결국, 유한 요소 해석의 기본 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dF}{dp} = 0 \quad (1)$$

여기에서 F는 범함수이며 p는 계산될 미지의 절점 potential이다. 위의 간단한 공식은 유한 요소 해석의 기본이 된다. 범함수 F와 미지의 p는 문제의 형태에 따라 변하게 된다.

變分 계산(variational calculus)에서 범함수는 Euler 방정식으로 불리는 한 관계식을 따르는 것으로 표현할 수 있다. 적합 Euler 방정식에 범함수를 대입하면 物理界(physical system)의 미분 방정식을 얻게 된다. 따라서 유한 요소의 해는 적합 미분 방정식(appropriate differential eq.)을 만족하게 된다.

2.4 1次元 스프링 要素

그림 3은 단순한 力學的 스프링을 보여주고 있다. 그것은 여기에서는 절점 a, b로 표시된 단치 두 절점만을 연결하기 때문에 1차원 유한 요소의 예가 된다.

스프링과 같은 力學的, 構造的 문제에서 미지의 절점 potential은 變位이다. 그림 3에서 변위는 단

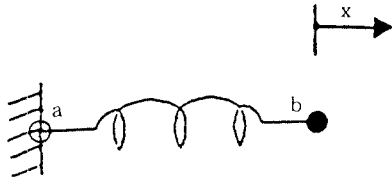


그림 3. 1차원 유한 요소로 작용하는, 두 점을 연결하는 스프링

지 x방향에서만 존재한다 : 즉, 변위는 단지 1차원이며 1개의 자유도만을 갖는다.

에너지 범함수는 항상 총 에너지를 나타낸다. 여기에서 범함수 F는 스프링에 저장된 에너지와 스프링을 압축, 인장시키는데 필요한 에너지로 이루어져 있다.

$$F = \frac{1}{2} kx^2 - f \, dx \quad (2)$$

여기에서 f는 힘이며, k는 스프링 剛性이다. 식(2)를 식(1)에 대입한다.

$$\begin{aligned} p &= x \text{ 이므로} \\ kx - f &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

이것은 스프링 변위에 대한 식으로 바뀔 수 있다.

$$x = \frac{f}{k} \quad (4)$$

그러므로 우리는 이 단순한 1차원 스프링 예제에서 에너지 범함수가 어떻게 여기에서는 변위 x로 표현된 미지의 질점 potential의 정확한 해를 얻게되는가를 살펴보았다.

2.5 2次元 Poisson 방정식 要素

그림 2에서 2차원 유한 요소를 볼 수 있었다. 정의에 따라, 2차원 유한 요소들은 2차원 평면에서 세개 또는 그 이상의 절점을 연결한다. 여기에서 우리는 간단히 Poisson 미분 방정식을 만족하는 삼각형 유한 요소 모델링에 관한 방정식을 유도해

볼 것이다.

2차원에서의 Poisson 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial u}{\partial y} = f \quad (5)$$

여기에서 x와 y는 2차원을 나타내며 k는 재료 상수(material constant)이다. 방정식 (5)는 構造力學 문제에서 변위 u를 지배한다. 이 식에서 f는 단위 체적당의 外部 하중이다. 이 식은 또한 熱力學에서는 靜的 온도 T를, 電磁氣學에서는 電磁氣 영역을 지배한다.

위의 세 종류의 物理 문제에 대한 에너지 범함수는 아래와 같다.

$$F = f_s \left[\left(\frac{1}{2} \right) k (\text{del } u)^2 \right] dS - f_s \left(\frac{1}{2} fu \right) dS \quad (6)$$

여기에서 S는 2차원에서의 면적이다. 식(6)의 첫 번째 항은 구조체 내의 축적된 内部 변형에너지를 나타내며, 두 번째 항은 外部 에너지를 표시한다. 또한 첫 번째 항에는 증감 연산자(gradient operator)가 포함되어 있다.

$$\bar{G} = \text{del } u = \bar{V}u \quad (7)$$

$$\bar{G}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} \quad (8)$$

윗 식의 \hat{i}, \hat{j} 는 단위 벡터이다.

2차 유한 요소의 가장 단순한 형태는 선형 또는 요소에 걸친 미지의 potential u의 1차 變分(first-order variation)으로 가정한다. 그림 4는 삼각 유한 요소를 보여준다. 정확한 결과값을 위해 요소의 세 각이 각각 180 보다 많이 작아야 한 경우를 제외하고는 임의의 크기와 형태일 수 있다. 이러한 1차 요소(first-order element)내에서 u는 다음식에 따라 세 절점에서의 세 개의 미지값 u와 관련이 있다.

$$u = \sum_{k=1,2,3} u_k (a_k + b_k x + c_k y) \quad (9)$$

세 점에 식(9)를 적용하면 계수 a, b, c에 대한 해를 얻을 수 있다 :

$$\begin{bmatrix} a_l & a_m & a_n \\ b_l & b_m & b_n \\ c_l & c_m & c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_l & y_l \\ 1 & x_m & y_m \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}^{-1} \quad (10)$$

식 (7)에 식(9)를 대입하면,

$$u = \sum_{k=l,m,n} [b_k u_k \hat{i} + c_k u_k \hat{j}] \quad (11)$$

그러므로, 변위 gradient는 특정 삼각 유한 요소 내에서는 상수이다. 사변 유한 요소들은 둘 또는 네 개의 삼각형으로 구성될 수 있다.

절점 potential u_k 는 $ds=dx dy$ 인 범함수 식(6)을 최소화함으로써 구해질 수 있다. 식(1)에 식(11)과 (6)을 대입하고, 한 개의 삼각 유한 요소를 고려해보면 다음과 같은 식이 된다.

$$\int_s \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{kG^2}{2} - \frac{f u}{2} \right] ds = 0, j=1,m,n \quad (12)$$

삼각형에 대한 적분을 하면 3×3 의 매트릭스 방정식이 생성된다.

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (13)$$

여기에서 剛性 매트릭스는

$$[K] = k\Delta \begin{bmatrix} (b_l b_l + c_l c_l) & (b_l b_m + c_l c_m) & (b_l b_n + c_l c_n) \\ (b_m b_l + c_m c_l) & (b_m b_m + c_m c_m) & (b_m b_n + c_m c_n) \\ (b_n b_l + c_n c_l) & (b_n b_m + c_n c_m) & (b_n b_n + c_n c_n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Δ 는 삼각형의 면적이며, (13)의 오른쪽 항은 하중 벡터이다:

$$\{F\} = \frac{\Delta}{3} \begin{Bmatrix} f \\ f \\ f \end{Bmatrix} \quad (15)$$

식 (13)은 그림 4에서 절점 l, m, n을 가진 하나의 삼각형을 포함하는 영역에서 potential u를 구

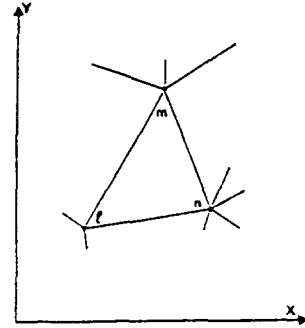


그림 4. xy평면에서의 삼각형 유한 요소

하기 위한 식이다. N개의 절점을 가지는 실제 문제에 대해서는, N개의 행과 열을 갖는 剛性 매트릭스 $[K]$ 를 얻기 위해 이상의 과정이 각 유한 요소마다 반복되어야 한다. 식(13)이 식(3)과 유사함을 주목하라. 양쪽 모두, 剛性和 미지의 potential을 곱한 값이 하중 함수와 같게 된다.

2.6 軸對稱 有限 要素(Axisymmetric Finite elements)

공학자들에 의해 설계되는 모든 구조체들은 실제로 3차원 형태이다. 3차원 구조체의 특별한 한 경우는 축대칭 구조물이다.

한개의 축대칭 유한 요소는 이전 절에서 설명한 2차 삼각 요소의 매우 간단한 연장이다. 전형적인 축대칭 유한 요소가 그림 5에 보여지고 있다. 대칭 축이 y축이고, 요소는 그 축을 중심으로 360 회전

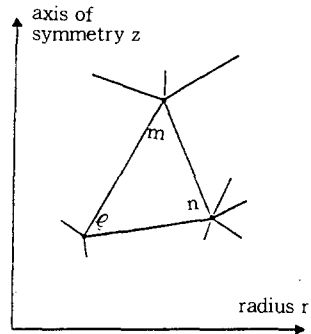


그림 5. 축대칭 유한 요소

을 한다고 가정한다. 결국, 똑같은 대칭축에 실린
 더, 원뿔 또는 다른 형태로 만들어진 구조체는 축
 대칭 유한 요소로 모델링 될 수 있다. 축대칭 유한
 요소 매트릭스 방정식의 유도는, 면적에 2 를 곱하
 고 요소 반경을 곱한 값이 총면적과 같을 경우를
 제외하고는, 2차원 요소와 같다.

2.7 3次元 有限 要素

3차원 유한 요소는 적어도 4개의 절점을 가지
 며, 한 평면내에 모두 놓여지지 않는다. 요소는 재
 료의 부피를 갖는 固體 형태를 이룬다.

이상에서 설명한 1차원, 2차원, 축대칭 유한 요
 소들은 3차원 유한 요소보다 사용하기 쉽기 때문
 에 가능하기만 하다면 언제나 이용된다. 3차원 요
 소는 미지의 절점 양이 적어도 한 방향내에서 不
 變하는 것이라면 사용될 필요가 없다. 예를 들어
 x, y축 최대값보다 z축에서 훨씬 큰 값을 갖는 구
 조체는 하중과 구속 형태 또한 2차원일 경우, 일반
 적으로 2차원으로 가정될 수 있다.

물론, 엔지니어들이 설계하는 많은 구조체에서
 대칭축이 존재하지 않는 경우에는 3차원으로 다룰
 수 밖에 없다. 그런 경우에는 3차원 유한 요소가
 사용되어야만 한다.

그림 6은 가장 일반적인 3차원 고체형 유한 요
 소를 보여주고 있다. 가장 단순한 형태는 4面體 또
 는 4개의 절점을 가진 4개의 면으로 구성된 요소
 이다. 4면이 모두 삼각형이라는 것만을 제외하면
 피라미드와 유사한 형태이다. 또한 5面體, 6개의
 절점을 가진 5개의 면으로 구성된 요소도 보여주
 고 있다. 두면이 삼각형이며 다른 세면이 4변형이
 다. 세번째 고체형 요소는 6面體 또는 6개의 면을

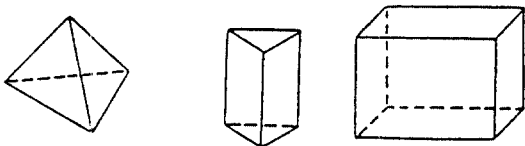


그림 6. 3차원 유한 요소 : 4면체, 5면체, 6면체

가진 요소이다. 이 벽돌형 요소는 8개의 절점을
 가지며, 6개의 모든 면이 사변형이다. 5면체의
 두 삼각형면 또는 6면체의 마주보는 면들이 30
 이내에서 평행하지 않을 경우 正確性이 감소되는
 것을 제외하고는 이들 3차원 요소들의 형태와
 크기는 임의로 할 수 있다.

4면체 유한 요소에 대한 매트릭스 방정식의 유
 도는 삼각형 요소와 거의 유사하다. 따라서,
 Poisson 방정식을 따르는 양들의 경우에, 공간적
 분이 세 방향 모두에서 행해지는 것을 제외하고는
 4면체 요소는 1차원 삼각형 요소와 유사하다. 식
 (9)을 확장시키면

$$u = \sum_{k=1, m, n, o} u_k (a_k + b_k x + c_k y + d_k z) \quad (16)$$

매트릭스 방정식의 유도는 2차원 요소에서 설명
 된 과정과 유사한 절차를 따른다.

2.8 전체 모델에 대한 解

그림 1에서 보여지듯이, 유한 요소 모델은 수많
 은 유한 요소들로 구성되어 있다. 각각의 유한 요
 소내에서의 미지 field의 가정된 단순한 變分은 실
 제 구조물에서보다 더 구속된 potential과 field를
 제공한다. 따라서 계산된 potential과 field는 대개
 실제에서보다 약간 적은 값이 된다. 계산의 정확
 성은 일반적으로 모델의 요소의 수가 많을수록 증
 가한다. 最適의 정확성을 위해서 유한 요소의 밀
 도는 potential gradient가 높은 곳에서 커야한다.

이전 절에서 설명된 바같이 모든 유한 요소들은
 매트릭스 방정식을 만족한다. 한 요소에 대한 매
 트릭스 방정식에서의 미지수의 갯수는 요소내의
 절점수와 각 절점당의 자유도 갯수를 곱한 값과
 같게 된다.

유한 요소 모델의 매트릭스 방정식은 유한 요소
 전체의 방정식의 집합이다. 그러므로 미지수 N의
 총 갯수는 수백개 수천개 아니 그 이상이 될수도

있다.

다행히도 $N \times N$ 剛性 매트릭스는 거의 존재하지 않는다 : 다시말하면, 대부분의 매트릭스는 많은 0값을 포함하고 있기 때문에 0값이 아닌 매트릭스의 요소들만이 컴퓨터에 의해 저장되고 계산되어진다. 컴퓨터 프로그램은 매트릭스 대각선을 따라 일정한 band내의 0이 아닌 값들만을 옮겨 놓기 위해 매트릭스의 行과 列을 재배열한다. 재배치된 매트릭스의 열의 폭은 재배열 밴드폭(resequenced bandwidth)이라고 불린다.

매트릭스의 재배열, Gauss 소거법과 같은 해법, 컴퓨터, 그 밖의 다른 요소들의 도움으로 매트릭스 방정식을 풀기 위해서는 컴퓨터의 작업시간이 필요하게 된다. 방정식을 풀기 위한 시간은 대략 미지수 N 의 갯수의 제곱에 비례해 해당된다. 현재 사용되는 PC(Personal Computer)를 사용하는 경우라도 몇 분 이내에 500-1000개에 해당하는 N 값을 가진 문제를 쉽게 풀어낼 수 있다. 적당한 경계조건을 이용하여 幾何의 한 부분만을 해석하기 위해 幾何對稱의 장점을 이용한다면, N 이 줄어들어 실질적인 컴퓨터 시간과 해석 시간은 더 절약될 수 있다.

2.9 解의 형태

앞에서 설명한 해의 형태는 定常 상태(steady-state)의 靜的 解이다. 그러나 해의 몇가지 다른 형태가 有限 要素法에 의해 얻어질 수 있다.

다른 형태의 解란 시간에 따라 영향을 받는 값이다. 그중 하나는 시간에 따라 단계적으로 얻어지는 결과값이므로 순간 解(transient solution)라고 불린다. 또다른 형태의 解는 電氣 문제에서 대개 다루어지는 것으로 시간의 사인 곡선 함수인 衝擊에서 발생한다. 시간의 영향을 받는 위의 두 형태에서, 해는 이전 절에서 설명한 것과 근사한 방법으로 매트릭스 방정식을 풀면 얻어진다.

문제의 또다른 형태는 때때로 固有值 문제(Eigen Value Problem)라고도 불리는 物理界(physical system)의 자유 또는 공명 진동수를 결정하는 것이다. 유한 요소 매트릭스 방정식의 고유치는 자유 진동수와 모드 형태(mode shape)를 얻기 위한 특별한 技法에 의해 결정된다.

해의 형태는 해석되는 物理界에 의존한다. 공학에서는 構造, 熱, 電磁氣, 流體 문제 등 다양하고 광범위한 영역이 있으며, 그 중에서도 構造 解析은 有限 要素法으로 많은 중요한 解를 얻을 수 있다.

참 고 문 헌

1. Turner, M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures," Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 9, September 1956
2. Proceedings of the Matrix Method in Structural Mechanics Conference, AFFDL-TR-66-80, held at Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1966.
3. Cook, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
4. Courant, R., "Variational Method for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations," Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, 1943
5. Castigliano, C. A., Theory of Equilibrium Equations of Elastic Systems and Its Application, Dover Publications, Inc., New York, 1966
6. Temple, G., and W. Bickley, Rayleigh's Principle. Dover Publications, Inc., New York, 1956
7. Faddeeva, V. N., Computational Methods of Linear Algebra. Dover Publications, Inc., New York, 1959.