

塑性 모델링의 간략한 歴史的 考察과 現代의 關心分野

Brief Historic Review and Contemporary Topics of Interest on Plasticity Modelling

趙 漢 旭*

固體力學의 구성은 크게 彈性論과 塑性論(혹은 非彈性論)으로 나눌 수 있다. 전자는 회복가능한 변형을 후자는 회복불가능한 변형을 다루며, 이 두 이론은 응력과 변형의 실험적 관찰에 기초하기 때문에 巨視的인 現象論(macroscopic phenomenology)의 성격을 갖고 있다. 체계적으로 잘 정리되어있는 彈性論과는 달리, 소성범위안에서의 복잡한 응력-변형도 관계는 종종 塑性論으로 설명되지 않는다. 이점이 많은 연구자들 사이에 완전한 의견의 일치를 보지 못하고 있는 원인이나, 지난 수십년 동안 塑性論의 기본틀에 대한 많은 진전이 있었다. 본 稿에서는 塑性論의 역사에 대한 “간략한” 歴史的 考察과 彈塑性 “大變位”를 연구하는 현 역학사회의 관심의 초점을 소개하고자 한다.

1. 塑性論의 歴史的 考察

連續體力學(continuum mechanics)의 한 부분으로써 塑性論의 원류는 19C 후반(1864-1872) Tresca, St.Venant, Levy 등에 의한 일련의 논문들로 거슬러 올라갈 수 있다. Tresca는 금속의 最大剪斷應力이 어느 臨界點에 도달했을 때, 소성 변형이 일어난다는 최초의 降伏條件(yield condition)을 제시하였다. St.Venant는 변형도 증분의

主軸(principal axes)은 응력의 주축과 일치한다는 소성거동법칙(plastic flow rule)을 이용하여 완전소성재료(perfectly-plastic material)에 관한 기초적 구성관련식(basic constitutive relations)을 제안하였으며, Levy¹⁾는 3차원으로 확장시켰다.

이후 소성론은 1924-1933년까지 거의 동면상태에 있었으나, 몇개의 논문은 소성론에 아주 중요한 개념을 소개하고 있다. von Mises²⁾는 J_2 -이론(octahedral shear stress yield condition)과 소성포텐셜(plastic potential)³⁾의 개념을 도입하고, 정상적 항복표면(regular 혹은 smooth yield surface)의 한 점에서 소성변형도율(plastic rate of strain)과 勾配(gradient)와의 관계를 논의하였다. Prandtl⁴⁾은 변형도에 탄성요소를 포함시키기 위하여 평면연속체(plane continuum)에 대한 St.Venant-Levy-von Mises의 방정식을 확장시켰으며, Reuss⁵⁾는 3차원 문제를 분석하였고, 또한 Tresca 조건의 적절한 소성거동법칙⁶⁾을 제시하였다. 이때에 와서야 소성경화재료에 대한 增分式 構成關係式(incremental constitutive relationships)이 고려되기 시작했는데, Prandtl⁷⁾은 硬化현상에 대한 一般關係式을, Melan⁸⁾은 正常的 降伏表面을 가진 塑性硬化固體의 개념을 체계화시키고 탄소성 증분 문제에 대한 唯一定理(unique theorem)에 대해 논의하였다.

1940년후 약 20년동안 古典的 金屬塑性論(classical metal plasticity)은 기본개념과 근본부분의 확립을 통해 많은 발전을 하였다. Prager⁹⁾는 정상

* 정희원, 삼성종합건설(주) 기술연구소 수석연구원, 공학박사

소성표면을 가진 소성경화재료를 연구했으며, 소위 “現代塑性構成모델”이라고 할 수 있는 다음과 같은 기본법칙들을 만들었다. 荷重의 載荷-除荷 조건, 連續性 조건(continuity condition), 一貫性 조건(consistency condition), 완전소성 및 소성경화 고체의 唯一性(uniqueness) 등을 증명하였다. 多結晶集合體(polycrystal aggregate)에 관한 중요한 가정들이 Hill¹⁰⁾에 의해 제시되고, Bishop과 Hill¹¹⁾에 의해 확장되었다. Drucker, Prager와 Greenburg¹²⁾가 탄소성재료에, Hill¹³⁾이 강체(rigid material)에 대해 극한정리(limit theorem)를 적용하였고, Mandel¹⁴⁾은 슬립선이론(slip line theory)을 논의하였다. Koiter¹⁵⁾은 정상항복표면에 대한 소성응력-변형도를 일반화하였으며, 슬립선이론이 증분이론(incremental theory)의 특수형태라는 것을 보여주었고, Ishlinskii¹⁶⁾와 Prager¹⁷⁾에 의해 소성경화법칙에 대한 等方(isotropic), 키니메틱(kinematic) 경화법칙이 제시되었다. 소성변형도와 응력의 履歷과의 관계를 나타내는 관계식은 변형이론(deformation theory)과 증분이론(incremental 혹은 flow theory)으로 나누어지며, 이와 같은 소성론은 1955년 경까지 어느정도 체계화되었으며 많은 중요한 개념들이 확립되었다.

Truesdell^{18,19)}, Noll²⁰⁾, Rivlin과 Ericksen²¹⁾ 등에 의한 하이포 탄성론(hypo-elasticity)의 연구가 자극이 되어, 대변위 안에서의 巨視塑性論이 시작되었다. 대략 5가지의 연구방향들이 제시되었으며 다음과 같이 요약할 수 있다. 첫째 연구방향은 Green^{22,23)}에 의해 시작되었으며 소성효과를 설명하기 위해서 하이포 탄성론의 응력-변형도사이의 관계식이 확장되었다. Green과 Naghdi²⁴⁾의 두번째 접근은 변형도 텐서(strain tensor)의 合算的 分離(additive decomposition)를 근거하여, 세번째 Thomas^{25,26)}의 방향은 古典的 微小變形(classical small deformation)의 관계를 大變形으로 일반화시킴을 기본개념으로 출발하고 있다. 네번째, Hill^{27,28)}은 現現象에서의 재료변형으로 인한 형태(geometry)의 변화와 더불어 미소변형을 고려함으로써 고전적인 관계식을 약간 변화시켰다. 이와같이 미소변형이론에서 대변형으로의 확장은 엄청난 새로운 分野를 열게 되었다. 대변형안에서의 기하

학적 非線形性은 소성론의 變形幾何學(kinematics)을 매우 복잡하게 만들었다. 마지막 연구방향으로, 塑性大變形理論은 變形勾配텐서 F(deformation gradient tensor)의 곱셈적 分離(multiplicative decomposition)에 의해 전개되었다. 재료역학 연구자인 Eckart²⁹⁾가 먼저 생각하였으나 연속체에 대해서는 공식적으로 Lee와 Liu³⁰⁾, Lee³¹⁾에 의해 소개되었다. 그들은 F를 行列의 곱 $F = F^e F^p (F^e$ 는 탄성, F^p 는 소성변형 구매 텐서로 나타내었다. 이 개념을 따른 Freund³²⁾, Hahn와 Jaunzemis³³⁾, Hahn³⁴⁾, Lee와 Germain³⁵⁾ 등의 시도가 있었으며 탄소성 대변형이론은 많은 발전이 있게 되었다. 이 F의 탄소성 분리에 암시적으로 들어있는 생각은 中間無應力基準狀態(intermediate unstressed reference state)의 존재이며, 이 개념은 오늘날의 탄소성 대변위 이론에서 일반적으로 쓰이고 있다.

이 곱셈적 분리와 Cosserat³⁶⁾의 方向性 연속체에 관한 연구등으로부터 자극을 받아 Mandel³⁷⁾은 材料下部構造(material substructure)의 방향성(orientation)을 나타내기 위하여 方向子벡터(director vector)의 개념을 소개하였다. 그 개념은 Dafalias³⁸⁻⁴⁰⁾, Loret⁴¹⁾ 등에 의하여 거시 대소성변형론안에서 구성방정식에 쓰이게 되었다.

소성론의 기본법칙을 증명하기 위하여 다양한 실험적인 조사가 주로 微小變形안에서 수행되어 왔다. 이 관찰들의 주된 목적은 降伏條件과 塑性舉動法則을 결정하고 塑性硬化의 영향을 연구하기 위하여 진행되어 왔다. Mises의 법칙은 Taylor와 Quinney⁴²⁾에 의해 延性금속에 대해 증명되었고, Zhukov⁴³⁾와 다른 연구자들에 의하여 주축의 방향이 고정되었을 때 변형이론에 의해 예상된 결과는 실험관찰과 아주 좋은 일치를 보여준다. Marin과 Hu⁴⁴⁾의 中立荷重(neutral loading)연구, Naghdi, Essenburg와 Koff⁴⁵⁾의 항복표면의 코너 및 비틀림(distortion), Hill⁴⁶⁾의 直交異方性(orthotropic) 재료의 항복조건, Zhukov⁴⁷⁾의 재료성질에 대한 소성변형의 영향, Baltov와 Sawczuk⁴⁸⁾의 異方性硬化(anisotropic hardening)에 관한 연구 등은 소성론을 발전시켰으나 매우 복잡하게 만들었다. 既變形을 가진 재료의 항복조건에 대한

조사는 Mair와 Pugh⁴⁹⁾, Phillips^{50,51)}, Phillips와 Ricciuti⁵²⁾, Helling, Miller와 Stout⁵³⁾ 등이 하였다. 소성의 성격을 규명하기 위하여 많은 이론과 실험들이 수행되었으며 많은 실험적 관찰들이 소성론안에서 고려되었다.

多軸荷重(multiaxial loading), 反復荷重(cyclic loading), 非等溫度(anisothermal) 등과 같은 복잡한 경우들도 比率依存的 塑性論(rate-dependent plasticity 혹은 viscoplasticity)과 더불어 연구되었다. 여러 모델중에서 Mroz⁵⁴⁾의 多表面모델(multisurface model)과 Dafalias와 Popov^{55,56)}, Krieg⁵⁷⁾의 二表面모델(two-surface 혹은 bounding surface model)이 특히 복잡한 재료의 응답을 描寫(simulation)하는데 성공적이며, McDowell⁵⁸⁾ 등에 의해 계속적으로 연구사용되고 있다. Stowell⁵⁹⁾, Prager⁶⁰⁾, Perzyna⁶¹⁾ 등에 의해 시작된 比率依存的 塑性論은 Geary와 Onat⁶²⁾, Chaboche⁶³⁾, Krieg et al.⁶⁴⁾ 등에 의해 內部狀態變數(internal state variables)를 사용하여 연구되어 왔다. Valanis^{65,66)}는 엔도크로닉 시간(endochronic time)의 개념을 소개하여 색다른 시각을 보여주었고, Im과 Atluri⁶⁷⁾는 엔도크로닉 이론(endochronic theory)의 積分形態(integral form)와 고전적소성이론의 微分形態사이의 상호관계를 보여주었다. 그 후 소성론은 Schmidt와 Miller⁶⁸⁾, Krempl et al.⁶⁹⁾, Lowe와 Miller⁷⁰⁾, Anand와 Brown⁷¹⁾ 외 많은 연구자들에 의해 개선되어 왔다.

2. 塑性 大變位內에서의 單純剪斷 (simple shear)

逆荷重(reverse loading)을 받는 대부분의 금속들은 Bauschinger 效果(Bauschinger effect)라고 알려진 응답을 보여준다. 이는 인장축으로 소성변형을 경험한 금속이 계속된 압축을 받았을 때 항복응력의 감소를 나타내는 현상을 의미한다. 하중의 反轉이 없을 때를 제외한 많은 경우 等方硬化法則(isotropic hardening rule)은 실제 금속에 적절하지 않다. Bauschinger 效果를 설명하기 위해 Ishlinski¹⁶⁾와 Prager¹⁷⁾에 의해 소개된 키니매틱 경화(kinematic hardening)의 개념이 표준관계

가 되어왔다.

키니매틱 경화모델(kinematic hardening model) 안에서 단순선형식의 모델은 Nagtegaal과 de Jong⁷²⁾의 다음과 같은 관찰에 의해 세밀히 조사를 받게되었다. 완전소성재료가 큰 單純剪斷 변형을 가질 때, 變形이 계속증가함에 따른 Jaumann 率(Jaumann rate)의 적용은 剪斷應力의 振動現狀(oscillatory phenomena)을 가져온다. 이 현상은 Lehmann⁷³⁾의 논문에서 처음으로 소개되었고, Dienes⁷⁴⁾는 하이포 탄성론(hypoelasticity)안에서 비슷한 관찰을 하였다. 좀 더 자세히 설명하면, Nagtegaal과 de Jong⁷²⁾은 일반적으로 쓰이는 세가지의 경화법칙에 관련하여 殘留應力(internal stress 혹은 back stress)에 관해 재료스핀(material spin 혹은 material rate of rotation)에 관해 共回轉 導函數(corotational derivative 혹은 Jaumann rate)를 사용하였다. 그들의 새로 제시한 경화법칙은 진동이 없는 응력-변형도 곡선을 보여주나, Prager-Ziegler 경화법칙은 원하지 않는 응력의 진동을 만든다고 주장하였으며, 이 관찰은 많은 연구자들에게 單純剪斷에 관심을 갖도록 자극하였다. Lee et al.⁷⁵⁾은 응력의 진동을 없애기 위해 키니매틱 경화법칙과 관련하여 재료의 특별한 방향의 스핀에 기초한 수정된 Jaumann 率을 제시하였다. Dafalias³⁸⁾는 재료의 완전소성을 가정하고 재료스핀과 다른 하나의 스핀 $\dot{R}R^T$ 와 관련하여 Mises형태의 등방성/키니매틱 경화법칙을 사용하여 단순전단문제를 해석적으로 풀었다. 여기서 R은 F의 極分離(polar decomposition) $F=RU$ 에서의 직교변환부분이다. 그는 잔유응력에 대한 적절한 共回轉 導函數를 정의하기 위해 Mandel³⁷⁾에 의해 소개된 소성스핀개념에 대한 구성관계식의 사용으로 선형 키니매틱 경화의 경우에도 효과적으로 응력의 진동을 제거할 수 있음을 보여 주었으며, 비슷한 관찰이 Loret⁴¹⁾에 의해 독자적으로 행하여졌다. 후에 Dafalias^{76,77)}는 線形, 非線形 키니매틱 硬化法則下에서 大單純剪斷變形에서의 재료응답을 분석하였고 여러 다른 경우의 解도 제시하였다. Onat⁷⁸⁾는 수학적 해석을 통해 應力振動現狀을 확인하고 일반경화 법칙하에서 Nagtegaal 과 de Jong⁷²⁾의 새 제안들과 Lee et al.⁷⁵⁾

의 관련논문을 비교하였다. 그는 전술한 해석들이 이상적인 상태에서 분석되었기 때문에 새로운 變數(state variable)를 소개할 필요가 있다고 결론 지었다.

단순전단에 대한 연구는 많은 연구자들에 의해 여러 방법으로 언급되었으나 실험자료와의 比較缺乏은 그들의 제안을 적용성보다는 이론적으로 치우치게 만들었다. 대부분이 전단변형의 단순증가에 따른 전단응력 진동의 타당성에 초점을 맞춘 점은 彈塑性 大變位の 믿을만한 금속실험자료를 얻는 어려움에 부분적으로 원인이 있다. 그러나 Montheillet, et al.⁷⁹⁾의 단순전단에 대한 실험관찰은 여러 溫度와 變形度率(strain rate)에 따른 兩端이 고정된 固體 원통의 비틀림시험(torsion test) 중 몇 가지 경우에 軸方向應力의 진동이 실제로 있음을 보여준다.

3. 塑性스핀

단소성 大변위에 관한 現代의 이론안에서 소성스핀의 概念은 여러 사람들에 의해 연구되어 왔다. 전술한 바와 같이, 방향자벡터는 Mandel^{37,80)}에 의해 連續體와 그 내부의 下部構造(substructure)와의 變形幾何學을 巨視的으로 구별하기 위해 재료의 下部構造에 묻혀있다고 가정되었다. 따라서 連續體와 下部構造의 스핀의 차이인 “塑性스핀” 및 그 構成은 개념적으로 자연스럽게 소개될 수 있다. 또한 비슷한 개념이 Kratochvil⁸¹⁾에 의해 제시되었다.

그러나 소성스핀에 대한 명확한 구성방정식은 Dafalias^{38~40)}와 Loret⁴¹⁾에 의해 처음 제시되었으며 單純剪斷의 해를 통해서 자세히 분석되었다. 소성스핀을 포함한 大塑性變形의 연구는 Dafalias^{76, 77,82,83)}, Paulun과 Pecherski⁸⁴⁾, Bammann과 Aifantis^{8 5)}, Pecherski⁸⁶⁾ 등으로 계속되고 있으며, 비슷한 개념들이 Anand⁸⁷⁾의 金屬高温加工, Haupt⁸⁸⁾의 금속에서의 比率依存的 彈塑性, Dafalias³⁹⁾, Dafalias와 Rashid⁸⁹⁾의 異方性 材料의 거동, Dafalias⁹⁰⁾의 比率依存的 塑性論, Dafalias와 Aifantis⁹¹⁾의 소성스핀의 微視的 起源(microscopic origin) 등을 통하여 연구되어왔다.

현재 彈塑性 大變位를 연구하는 力學社會는 전술한 저자들을 포함한 소성스핀이 必要하다고 믿는 그룹과 그렇지 않은 그룹으로 크게 나눌 수 있다.

참 고 문 헌

1. Levy, M., Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, 70, p.1323, 1870.
2. Mises, R.v., Gottinger Nachrichten, math-phys. Klasse., 582, 1913.
3. Mises, R.v., Zeits. ang. Math. Mech., 8, p.161, 1928.
4. Prandtl, L., Proc. 1st Int. Cong. App. Mech., Delft, 43, 1924.
5. Reuss, A., Zeits. ang. Math. Mech., 10, p.266, 1930.
6. Reuss, A., “Fliesspotential order Gleitebenen?,” ZAMM, 12, 15, 1932.
7. Prandtl, L., “Ein Gedankenmodell zur Kinetischen Theorie fester Korpern,” ZAMM, 8, 5, 1928.
8. Melan, E., Ing. Arch., 9, 116, 1938.
9. Prager, W., J. Appl. Phys., 20, 235, 1949.
10. Hill, R., “A variational principle of maximum plastic work in classical plasticity,” Quart. J. Mech. Appl. Math., vol.1, No.1, pp.18-28, 1948.
11. Bishop, J.F.W., and Hill, R., “A theory of the plastic distortion of a polycrystal aggregate under combined stress,” Phil. Mag., vol.42., pp.414-427, 1951.
12. Drucker, D.C., Prager, W., and Greenberg, H.J., “Extended limit design theorems of continuous media,” Quart. Appl. Math., vol.9, pp.381-389, 1952.
13. Hill, R., “On the state of stress in plastic-rigid body at yield point,” Phil. Mag., vol.42, pp.868-875, 1951.
14. Mandel, J., “On the lines of slip and the calculation of displacements in plastic deformation,” in French, C.R. Acad. Sci., Paris, 225, 1272-1273, 1947.
15. Koiter, W.T., “Stree-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic

- materials with a singular yield surface," *Quart. Appl. Math.*, vol.11, No.3, pp.350–354, 1953.
16. Ishlinkshii, A.U., "General theory of plasticity with linear strain hardening," *Ukr. Mat. Zh.*, 6, p.314, 1954.
 17. Prager, W., "A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids," *J. Appl. Mech.*, vol.23, pp.493–496, 1956.
 18. Truesdell, C., "The simplest rate theory of pure elasticity," *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 8, pp.123–132, 1955.
 19. Truesdell, C., "Hypo-elasticity," *J. Rat. Mech. Anal.*, vol.5, No.1, pp.83–133, 1955.
 20. Noll, W., "On the continuity of the solid and fluid states," *J. Rat. Mech. Anal.*, vol.4, No. 4, pp.3–81, 1955.
 21. Rivlin, R.S., and Ericksen, J.L., "Stress-deformation relation for isotropic materials," *J. Rat. Mech. Anal.*, vol.4, No.2, pp.323–425, 1955.
 22. Green, A.E., "Hypo-elasticity and plasticity," *Proc. Royal Soc. London*, No.234A, 1196, pp. 46–59, 1956.
 23. Green, A.E., "Hypo-elasticity and plasticity," *J. Rat. Mech. Anal.*, vol.5, No.5, pp.725–734, 1956.
 24. Green, A.E., and Naghdi, P.M., "A general theory of an elastic-plastic continuum," *Arch. Rat. Mech. Anal.*, vol.18, pp.251–281, 1965.
 25. Thomas, T.Y., "Combined elastic and Prandtl-Reuss' stress-strain relations," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol.41, No.10, pp.720–726, 1955.
 26. Thomas, T.Y., "Kinematically preferred coordinate systems," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol.41, No.10, pp.762–770, 1955.
 27. Hill, R., "On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid-3," *J. Mech. Phys. Solids*, vol.5, No.3, pp.153–161, 1957.
 28. Hill, R., "On the problem of uniqueness in the theory of a rigid-plastic solid-4," *J. Mech. Phys. Solids*, vol.5, No.4, pp.302–307, 1957.
 29. Eckart, C. "Thermodynamics of irreversible process: IV. The theory of elasticity and anelasticity," *Physical Review*, 73, (2), p.373, 1948.
 30. Lee, E.H., and Liu, D.T., "Finite strain elastic-plastic theory with application to plane wave analysis," *J. of App. Phys.*, 38, pp.19–27, 1967.
 31. Lee, E.H., "Elastic-plastic deformations at finite strains," *ASME J. of App. Mech.*, 36, pp.1–6, 1969.
 32. Freund, L.B., *Int. J. Solids Struc.*, 6, pp.1193–1209, 1970.
 33. Hahn, H.T., and Jaunzemis, W., *Int. J. Eng. Sci.*, 11, pp.1065–1078, 1971.
 34. Hahn, H.T., *Int. J. Solids Struc.*, 10, pp.111–121, 1974.
 35. Lee, E.H., and Germain, P., in: *Elastic-plastic theory at finite strain in problems of plasticity*, Sawczuk, A[ed.], Leyden: Noordhoff, pp.117–130, 1974.
 36. Cosserat, E. and F., "Theorie des Corps Deformables," Hermann, Paris, 1909.
 37. Mandel, J., "Plasticite classique et viscoplasticite. Courses and Lectures," No.97, *Int. Center for Mechan. Sciences*, Udine, Wien-New York, Springer, 1971.
 38. Dafalias, Y.F., "Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations," *ASME J. of Appl. Mech.*, 50, pp.561–565, 1983.
 39. Dafalias, Y.F., "The plastic concept and a simple illustration of its role in finite plastic transformations," *Mech. of Materials*, 3, pp. 223–233, 1984.
 40. Dafalias, Y.F., "A missing link in the formulation and numerical implementation of finite-transformation elastoplasticity. In: *Constitutive equations: macro and computational aspects*, William, K.J.[ed.], ASME, pp.25–40, 1984.
 41. Loret, B., "On the effect of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials," *Mech. of Mater.*, 2, pp.287–304, 1983.
 42. Taylor, G.I., and Quinney, H., *Phil. Trans. Royal Soc. A*, 230, p.323, 1931.
 43. Zhukov, A.M., "Combined load and the theories of plasticity of isotropic bodies(in Russian)," *Izv. Akad. Nauk SSSR OTN*, No.8, pp.81–92, 1955.

44. Marin, J., and Hu, L.W., "On the validity of assumptions made in theories of plastic flow for metals," *Trans. ASME*, vol.75, No.6, pp.1181–1190, 1953.
45. Nagbdi, P.M., Essenburg, F., and Koff, W., "An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity," *J. Appl. Mech.*, vol.25, No.2, pp.201–209, 1958.
46. Hill, R., "The mathematical theory of plasticity," Oxford, Clarendon Press, 1950.
47. Zhukov, A.M., "Certain singularities of the curve of neutral loading(in Russian)," *Izv. Akad. Nauk SSSR, OTN Mekh.*, No.8, pp.32–40, 1958.
48. Baltov, A., and Sawczuk, A., "A rule of anisotropic hardening," *Acta Mech.*, vol.1, pp. 81–92, 1965.
49. Mair, W.M., and Pugh, H.L.D., "Effect of prestrain on yield surfaces in copper," *J. Mech. Eng. Sci.*, 6, 150, 1964.
50. Phillips, A., "Yield surfaces of pure aluminum at elevated temperatures," *Proc. IUTAM Symp. on Thermoelasticity*, Springer, Berlin, pp.241–258, 1970.
51. Phillips, A., "Experimental study. Some thoughts on its present status and possible future trends. Problems of Plasticity, Sawczuk, A. [ed.]," *Int. Symp. on Foundations of Plasticity*, pp.193–233, 1972.
52. Phillips, A., and Ricciuti, M., "Fundamental experiments in plasticity and creep of aluminum-extension of previous results," *Int. J. Solids Struc.*, vol.12, pp.159–171, 1976.
53. Helling, D.E., Miller, A.K., and Stout, M.G., "An experimental investigation of the yield loci of 1100-o aluminum, 70:30 brass, and an overaged 2024 aluminum alloy after various prestrains," *J. Eng. Mater. Tech.*, vol.108, pp. 313–320, 1986.
54. Mroz, Z., "On the description of anisotropic work-hardening," *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 15, pp.163–175, 1967.
55. Dafalias, Y.F., and Popov, E.P., "A model of nonlinearly hardening materials for complex loading," *Acta Mech.*, 21, pp.173–192, 1975.
56. Dafalias, Y.F., and Popov, E.P., "Plastic internal variables formalism of the cyclic plasticity," *J. Appl. Mech.*, vol.98, No.4, pp.645–651, 1976.
57. Krieg, R.D., "A practical two surface theory," *J. Appl. Mech.*, vol.42, pp.641–646, 1975.
58. McDowell, D.L., "Two surface theory for transient nonproportional cyclic plasticity : part I – development of appropriate equations," *J. Appl. Mech.*, vol.52, pp.298–302, 1985.
59. Stowell, E.Z., "A phenomenological relation between stress, strain rate, and temperature for metals at elevated temperatures," *NACA TN-4000*, 1957.
60. Prager, W., "Linearization in visco-plasticity," *Oesterr. Ing. Arch.*, vol.15, No.1–4, pp.152–157, 1961.
61. Perzyna, P., "The constitutive equations for rate sensitive plastic materials," *Q. Appl. Math.*, vol.20, No.4, Jan., pp.321–332, 1963.
62. Geary, J.A., and Onat, E.T., "Representation of non-linear hereditary mechanical behavior," *ORNL TM-4525*, 1974.
63. Chaboche, J.L., "Viscoplastic constitutive equations for the description of cyclic and anisotropic behavior of metals," *Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Tech. Tech.*, vol.25, No.1, pp. 39–48, 1977.
64. Krieg, R.D., Swearinge, J.C., and Rohde, R.W., "A physically-based internal variable model for rate-dependent plasticity, in: *Inelastic Behavior of Pressure Vessel and Piping Components*, Chang, T.Y. and Krempl, E.[eds.]," *ASME*, pp.15–28, 1978.
65. Valanis, K.C., "A theory of viscoplasticity without a yield surface, Part I : General theory : Part II : Application to mechanical behavior of metals," *Arch. Mech.*, 23, pp.517–551, 1971.
66. Valanis, K.C., "Fundamental consequences of a new intrinsic time measure," *Arch. Mech. Stosov.*, vol.32, No.2, pp.171–191, 1980.
67. Im, S., and Atluri, S.N., "A study of two finite strain plasticity models : An internal time theory using Mandel's director concept, and a general

- isotropic/kinematic-hardening theory," *Int. J. of Plasticity*, vol.3, pp.163–191, 1987.
68. Schmidt, C.G., and Miller, A.K., "A unified phenomenological model for non-elastic deformation of type 316 stainless steel-1. Development of the model and calculation of the materials constants," *Res. Mech.*, vol.3, No.2, Sep., pp.109–129, 1981.
 69. Krempl, E., McMechon, H., and Yao, D., "Viscoplasticity based on overstress with a differential growth law for the equilibrium stress," *Mech. Mater.*, vol.5, No.1, pp.35–48, 1986.
 70. Lowe, T.C., and Miller, A.K., "Modelling internal stresses in the nonelastic deformation of metals," *J. Eng. Mater. Tech.*, vol.108, No.4, Oct., pp.365–373, 1986.
 71. Anand, L., and Brown, S., "Constitutive equations for large deformations of metals at high temperatures, in: *Constitutive Models of Deformation*, Chandra, J., and Srivastav, R.P. [eds.], SIAM, Philadelphia, pp.1–26, 1987.
 72. Nagtegaal, J.C., and de Jong, J.E., "Some aspects of non-isotropic workhardening in finite strain plasticity, in: *Proc. Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain: Theory, Experiment and Computation, 1981*, Stanford Univ., Lee, E.H. and Mallet, R.L. [eds.], published by the Division of Appl. Mech., Stanford Univ. and Dep. of Mech. Engn. Aeronau. Eng. and Mech., R.P.I., Troy, pp.65–102, 1982.
 73. Lehmann, Th., "Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für grosse elasto-plastische Formänderungen," *Ing.-Arch.*, 41, pp.554–569, 1972.
 74. Diens, K., "On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies," *Acta Mech.*, 32, pp.217–232, 1979.
 75. Lee, E.H., Mallet, R.L., and Wertheimer, T.B., "Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity," *J. of App. Phys.*, 50, pp.554–569, 1983.
 76. Dafalias, Y.F., "The plastic spin," *ASME J. of Appl. Mech.*, 52, pp.865–871, 1985.
 77. Dafalias, Y.F., "A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations. In: *Plasticity Today: Modelling, Methods and Applications*, Sawczuk, A., and Bianchi, G. [ed.], Elsevier Applied Science Publishers, pp.135–151, 1985.
 78. Onat, E.T., "Shear flow of kinematically hardening rigid-plastic materials, in: *Mechanics of Material Behavior*, Dvorak, G.J., and Shields, R.T. [eds.], Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo, pp.311–324, 1984.
 79. Montheillet, F., Cohen, M., and Jonas, J.J., "Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu and α -Fe," *Acta Metall.*, vol.32, No.11, pp.2077–2089, 1984.
 80. Mandel, J., "Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques," *Int. J. of Solids Struc.*, g, pp.725–740, 1973.
 81. Kratochvil, J., "Finite-strain theory of crystalline elastic-plastic materials," *J. of Appl. Phys.*, 42, pp.1104–1108, 1971.
 82. Dafalias, Y.F., "Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations. Part 1: Kinematics," *Acta Mechanica*, 69, pp.119–13, 1987.
 83. Dafalias, Y.F., "Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations. Part 2: Kinetics," *Acta Mechanica*, 73, pp.121–146, 1988.
 84. Paulun, J.E., and Pecherski, R.B., "Study on corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity," *Arch. Mech.*, 37, 6, pp.661–667, 1985.
 85. Bammann, D.J., and Aifantis, E.C., "A model for finite-deformation plasticity," *Acta Mech.*, 69, pp.97–117, 1987.
 86. Pecherski, R.B., "The plastic spin concept and the theory of finite plastic deformations with induced anisotropy," *Acta Mech.*, 40, 5–6, pp.807–818, 1988.
 87. Anand, L., "Constitutive equations for hot-working of metals," *Int. J. of Plasticity*, vol. 1, pp.213–231, 1985.
 88. Haupt, P., "On the concept of an intermediate configuration and its application to a repre-

- ntation of viscoelastic-plastic material behavior," Int. J. of Plasticity, vol.1, pp.303–316, 1985.
89. Dafalias, Y.F., and Rashid, M.M., "The effect of plastic spin on anisotropic material behavior," Int. J. Plas., vol.5, No.3, pp.227)–246, 1989.
90. Dafalias, Y.F., "The plastic spin in viscoplas-
- ticity," Int. J. of Solids and Structures, vol.26, No.2, pp.149–163, 1990.
91. Dafalias, Y.F., and Aifantis, E.C., "On the microscopic origin of the plastic spin," Acta Mecha., vol.82, No.1–2, pp.31–48, 1990.