유한차원 구조최적설계의 기법

(Techniques for Finite-Dimensional Structural Optimization)

류 연 선*

1. 서 언

공학설계에서의 과업은, 주어진 시간과 할당된 자원의 범위내에서, 요구기능을 충분히 발휘하면서 경제성을 동시에 갖춘 최선의 시스템을 개발하는 것이라 할 수 있다. 이를 위해서는 과학적 원리와 기술적 응용방법 및 사회적 요구의 다양한 측면을 가급적 모두 고려하고 이들을 활용하여야 한다. 하나의 시스템을 설계하는데는 다양한 분야의 전문가들이 공동으로 참여하고, 관점에 따라서는 수없이 많은 가용설계(feasible design)가 얻어질 수 있으므로 이들 중에서 최선의 것 즉, 최적설계(optimun design)를 도출하는 것이 쉽지 않다. 따라서 최적여부를 판단하기 위한 규준이 설정되어야 하는 데 이를 목적함수(objective function) 또는 가격함수(cost function)라고 한다. 목적함수는 설계자가 최종적으로 결정해야할 설계변수(design variable)로써 표현되어야 하며, 이는 시스템에 부과된 기능요구조건 혹은 설계조건을 수식으로 표현한 제약조건(constraints)을 만족하는 범위에서 극대화(maximization) 또는 극소화(minimization)된다. 이러한 최적설계는 설계과정에 최적화기법(optimization technique)을 도입함으로써 가능해 진다고 할 수 있다. 구조물의 최적설계는, 구조물을 기술하는 데 필요한 설계변수를 도출하고 설계의 제요소를 분석·정리·종합하여 수학적 계획 문제(mathematical programming problem)를 정식화한 후 수치적 최적화기법을 이용하여 가장 좋은 설계를 체계적으로 찾는 것을 말한다[1].

이 글에서 설계변수가 유한개이고 목적함수 및 제약함수가 설계변수의 비선형 함수로 표시되는 최적화 문제를 기술하고, 그 해법을 개념적으로 고찰하며 마지막으로 구조최적설계 문제의 특성과 최적화 과정을 살펴보기로 한다.

2. 유한차원 최적화문제

공학적 시스템 또는 요소의 설계과정에서 결정되어야 할 설계변수가 유한차원의 벡터, $x \in R_K$로 표시된다면 최적화문제는 일반적으로 비선형계획문제(nonlinear programming problem;NLP)로 정식화 된다.

Find	$x=(x_1, x_2, \cdots, x_k)^T$	(1a)
to minimize	$f(x)$	(1b)
subject to	$g_i(x) \leq 0;\ i=1, \cdots, m'$	(1c)
	$h_i(x) \leq 0;\ i=1, \cdots, m$	(1d)

여기서 $f(x)$는 최소화 할 가격함수이고, m'개의 $g(x)$ 및 m개의 $h(x)$는 각각 부등호 및 등호제약함수로서 모두가 설계변수 x의 함수로 표시되어 있다. 정식화 과정에서 k개의 설계변수 x_i, $i=1, \cdots k$는 가급적 상호독립성이 보장되도록 도출되어야 하지만 부득이한 경우에는 식(1d)와 같은 등식으

* 정회원, 부산수산대학교 해양공학과 부교수

로서 설계변수 상호간의 관계를 표현할 수도 있다. 수학적 의미에서 m개의 등호제약조건이 있을 경우 상호독립적인 설계변수의 갯수는 $(k-m)$개라고 할 수 있으므로 의미있는 최적화문제에서는 $k>m$ 이어야 한다. 한편 부등호제약조건 (1c)의 갯수는 임의적으로 많을 수 있지만 이들 상호간에 모순되는 경우는 없어야 한다. 즉 제약조건 (1c) 및 (1d)를 모두 만족하는 변수 x가 존재해야 한다는 것이다. 제약조건을 전부 만족시키는 해를 유용해(feasible solution)라 하고, 이러한 유용해의 집합(feasible set 또는 constraint set)중에서 식 (1b)의 가격함수 $f(x)$를 최소로 하는 것이 최적해(optimun solution)가 된다. 정식화가 잘못되면 유용해가 존재하지 않는 문제로 형성될 수 있는데, 이러한 문제를 미리 식별하기는 쉽지 않으므로 최적화 알고리즘의 수행중에 무용해문제(infeasible problem)임을 알게 되면 정식화 과정을 재점검해야 한다.

식(1)의 NLP에서 최적해를 구하는 방법은 직접법(direct method)과 간접법(indirect method)으로 대별된다[2]. 간접법은 최적성 규준(optimality criteria)을 이용하는 것으로서, NLP의 Lagrange함수를 정의하고 Kuhn-Tucker필요조건에서 얻어진 비선형 연립방정식을 풍어서 후보최적해(candidate optimun)를 구하고 이들 중에서 충분조건을 만족하는 최적해를 결정하는 방법이다. 직접법은 설계변수의 초기 가정치로부터 시작하여 반복적인 탐색(search)을 통해 개선된 설계를 찾아 나가서 최적해에 이르게 하는 방법이다. 현재의 설계에서 개선된 설계의 방향으로 탐색하는 방법에 따라 다양한 최적화 알고리즘이 개발되어 있다. 탐색방향의 결정에 이용되는 정보에는 가격함수 및 제약함수의 함수값, 경사도벡터(gradient), 헷세행렬(Hessian matrix)등이 있으며, 이들 중 지배적인 정보와 수치계산상의 경제성, 해의 수렴성(convergence) 및 강건성(robustness)등이 알고리즘 선택의 고려사항이 된다.

NLP의 함수값만을 이용하여 최적해를 구하는 random search methods를 제외하면 이제까지 개발된 최적화기법이 경사도벡터에 근거한 방법(gradient-based optimization methods)이라해도 과언이 아니다. 이들 중 동적계획법(dynamic programming) 및 기하학적계획법(geometric programming)등과 같은 특정방법이외의 모든 기법을 수학적 계획법(mathematical programming methods)의 범주에 포함시킬 수 있다. 수학적 계획법은 원시법(primal methods)과 변환법(transformation methods)으로 분류할 수 있는데, 원시법에서는 NLP의 가격함수 및 제약함수를 선형화하여 부문제(subproblem)를 구성하고 이것을 풀어서 설계개선량을 계산해가는 방법이며, 변환법에서는 NLP를 일련의 비제약 최적화문제(unconstrained problem)로 변환하여 반복적으로 이들을 풀어서 개선설계를 계산한다.

현재의 설계 $x^{(q)}$에서 개선된 설계 $x^{(q+1)}$를 계산하는 데는 일반적으로 다음과 같은 반복기법이 이용된다.

$$x^{(q+1)}=x^{(q)}+\alpha_q s^{(q)};\ q=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{2a}$$

$$x_i^{(q+1)}=\beta_i^{(q)}\ x_i^{(q)};\ q=0,\ 1,\ 2\cdots;\ i=1,\ k \tag{2b}$$

여기서 s=탐색방향벡터, α=이동거리, $\beta_i=i$ 번째 설계변수 x_i의 개선승수이다.

현재까지 개발·이용되는 최적화기법중 원시법에 속하는 대표적인 것들은 축차2차계획법(Recursive Quadratic Programming method; RQP), 경사도 투영법(GRadient Projection method;GRP), 일반화 감소경사도법(Generalized Reduced Gradient method; GRG), 유용방향법(Feasible Direction Method; FDM), 축차선형계획법(Sequential Linear Programming method : SLP), 제약변측도법(Constrained Variable Metric method : CVM) 등이 있으며, 대표적인 변환법으로는 축차비제약 최소화법(Sequential Unconstrained Minimization Techniques : SUMT), 증대라그란지승수법(Augmented Lagrange Multiplier method : ALM) 등을 들 수 있다[4, 5].

여기서 부가해야 할 사항은 정보를 이용하는 모든 방법에서 가격함수 및 제약함수의 경사도, ∇f, ∇g, ∇h가 이용되므로 이들의 효율적인 계산방법을 염두에 두어야 한다는 것이다.

3. 구조최적설계문제

대표적인 구조최적화문제를 정식화하면 다음과 같다.

Find	$x \in R^k$	(3a)
to minimize	$f(x, u)$	(3b)
subject to	$g_i(x, u) \leq 0;\ i=1, \cdots m'$	(3c)
	$h(x, u)=0$	(3d)

여기서 x=설계변수벡터, u=구조응답벡터이다.

식(1)의 일반적인 NLP와 식(3)의 구조최적화문제는 외견상 유사하지만 본질적으로는 큰 차이가 있다. 즉 대부분의 구조설계문제에서는 가격함수 및 부등호제약함수가 설계변수 및 구조응답(변위, 변형율, 응력, 고유진동특성, 좌굴특성 등)의 함수로 표시되며, 등호제약조건으로 표시되어 있는 식(3d)가 설계변수 및 구조응답에 관한 상태방정식(state equation;평형방정식, 고유진동 또는 구조좌굴에 관련된 고유치문제 등)을 나타낸다는 점이다. 일반적으로 구조응답(이것을 상태변수(state variable)라고도 한다)은 주어진 설계변수 값에 대해 상태방정식을 풀어서 얻어진다(이 과정을 구조해석이라 한다). 따라서 상태변수 u가 설계변수 x의 함수 $u=u(x)$라고 할 수 있으며 식 (3b) 및 (3c)는 설계변수의 내재함수(implicit function)로 표현되는 것이다.

구조해석과정에서 유한요소법을 이용할 경우 상태방정식 즉 유한요소방정식의 계수행렬은 설계변수를 포함하고 있으므로 ∇f 및 ∇g의 계산에 상태방정식을 설계변수로 미분하여 du/dx를 구하는 부가적 과정이 필요하게 된다. 즉 등호제약조건으로 표시된 식(3d)의 상태방정식은 구조해석과정에서 만족되고, 최적화기법은 식(3b) 및 (3c)로 구성된 문제에 적용하는 것이다. 경사도 정보를 이용하는 최적화기법을 구조최적설계 과정에 응용하려면 가격함수 및 제약함수의 설계민감도 해석(design sensitivity analysis)이 선행되어야 하며, 이때의 계산량이 문제에 따라서는 구조해석에 필요한 계산량보다 많아질 수 있는 것이다. 따라서 효율적이고 경제적인 설계민감도 해석에 관한 연구가 필수적이라 하겠다.

구조최적설계의 과정을 단계별로 요약하면 다음과 같다.

(1) 설계변수의 값을 추정한다.

(2) 상태방정식을 풀어서 상태변수를 계산한다. (구조해석)

(3) 부등호제약함수값을 계산하고 제약조건의 상태를 점검한다.

(4) 설계민감도해석을 수행하여 부문제를 구성한다.

(5) 부문제를 풀어서 최적설계 개선량을 계산한다.

(6) 최적설계의 수렴(모든 부등호제약조건이 만족되고 가격함수가 국부적 최소)을 점검하여 (2)단계를 반복하거나 수행을 미친다.

앞에서 기술한 NLP의 해법은 (3)~(5)단계에 이용된다. 간접법을 사용할 경우와 random search methods를 이용하는 경우에는 부문제의 구성이나 설계민감도 해석과정 등이 생략될 수 있으나, 설계민감도는 어떤 설계변수를 얼마만큼 개선하는 것이 좋은가 하는 정보를 제공하므로 그 자체로서도 의미를 갖게 된다. 또 (6)단계의 수렴점검에는 주로 최적성의 규준이 이용된다.

한편, 구조최적화문제의 정식화를 위한 구조모

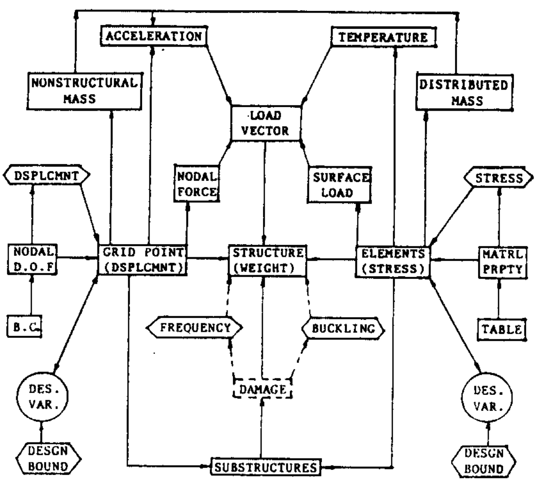

Fig.1 Structural Modeling for Design Optimization.

델링의 개념은 Fig.1에 표시되어 있다. 그림에서 설계변수는 원으로, 제약조건은 6각형, 사용가능한 가격함수는 괄호안에 되어 있으며, 이는 구조해석에 유한요소법을 사용한다는 것을 전제로 하고 있다[3].

4. 결 언

유한차원의 설계변수를 가진 구조최적화문제의 해법과정을 개념적으로 기술하였다. 구조해석과정에는 유한요소법이, 최적화기법으로는 gradient-based optimization technique이 사용됨을 전제로 한 것이다. 구조최적설계과정은 구조해석방법과 불가분의 관계가 있으며 최적화의 각 단계마다 대단히 다양한 경험적 이론과 기법 또한 제안되고 있다. 구조최적설계의 각 단계에서 필요한 정보와 또 그의 계산에 필요한 시간이 구조해석방법 및 프로그램의 가용성, 알고리즘의 적합성 및 최적해의 정확성 등에 의해 좌우되기 때문이다. 또한 범용의 구조 최적화 프로그램과 특수목적적인 구조최적화 프로그램이 동시에 개발되어야 할 것이다.

최적설계과정을 통하여 얻어진 결과가 기존의 구조요소를 조립하여 완성되는 구조물의 최종설계의 결정에도 참고의 역할을 할 수 있음을 부언해 둔다.

참 고 문 헌

1. 조효남, 박문호, 류연선, 구조물의 최적설계, 제3회 전산구조공학 기술강습회 교재 3-4, 한국전산구조공학회, 1991.
2. Arora, J.S., Introduction to Optimun Design, McGraw-hill, 1989.
3. Ryu, Y.S. and Yu, C. "Modular Design of FEM-Based Nonlinear Structural Optimization System", Proc. of the US-Korea Joint Seminar/Workshop on Critical Engineering System, C.-K. Choi and H-S. Ang eds., May 1987, pp118-125.
4. Vanderplaats, G.N., Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, McGraw-hill, 1984.
5. Belegundu, A.D., A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization, Ph.D. Thesis, The University of Iowa, 1982.