

삼각형 판 요소의 변위 거동에 대한 비교 연구

A Comparative Study on the Displacement Behaviour of Triangular Plate Elements

이 병 채* 이 용 주**
 Lee, ByungChai Lee, Yong Joo
 김 동 석** 구 분 웅**
 Kim, Dong Seok Koo, Bon Ung

Abstract

Static performance was compared for the triangular plate elements through some numerical experiments. Four Kirchhoff elements and six Mindlin elements were selected for the comparison. Numerical tests were executed for the problems of rectangular plates with regular and distorted meshes, rhombic plates, circular plates and cantilever plates.

Among the Kirchhoff 9 DOF elements, the discrete Kirchhoff theory element was the best. Element distortion and the aspect ratio were shown to have negligible effects on the displacement behaviour. The Specht's element resulted in better results than the Bergan's but it was sensitive to the aspect ratio. The element based on the hybrid stress method also resulted in good results but it assumed to be less reliable.

Among the linear Mindlin elements, the discrete shear triangle was the best in view of reliability, accuracy and convergence. Since the thin plate behaviour of it was as good as the DKT element, it can be used effectively in the finite element code regardless of the thickness. As a quadratic Mindlin element, the MITC7 element resulted in best results in almost all cases considered. The results were at least as good as those of doubly refined meshes of linear elements.

1. 서 론

유한요소법은 1950년대 말에 개발된 이래 매우 활발하게 연구되어 왔으며 공학 해석에 있어 가장 중요한 방법중의 하나로 알려져 있다. 유한 요소 법과 관련하여 3만여편의 방대한 논문이 발표되었

고 요소 개발 연구, 해석 방법의 개발, 프로그램의 개발, 프로그램 사용자 편의 향상을 위한 연구와 수학적 기초 연구 등이 세부 연구 주제들이다. 현재 유한 요소 해석의 방법론은 아주 복잡한 비선형성을 가진 문제 외에는 거의 정립되었다고 볼 수 있고 특히 선형 정적 문제는 큰 오차 없이 해석

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과 부교수

** 한국과학기술원 기계공학과 박사과정

이 논문에 대한 토론을 1992년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 1993년 3월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

할 수 있게 되었다.

그러나 판이나 셸 같은 유한 요소의 경우 아직도 요소 개발이 계속되고 있고 발표된 논문마다 장점을 기술하고 있어 그 선택이 쉽지 않다. 이는 다른 한편으로 생각할 때 현재 많이 이용되고 있는 요소나 상용 프로그램내의 요소에도 상당한 단점이 있음을 의미한다고 할 수 있다. 판 요소는 두께가 얇은 평면 물체가 수직하중이나 굽힘 모멘트를 받을때의 변형을 기술하기 위한 요소로서 대개 두께-길이 비가 $1/20$ 이하인 구조의 모델링에 사용된다. 실제 사용되는 판 요소에서는 면내 변형, 굽힘 변형, 전단 변형 등이 동시에 일어나고 있으나 관심 영역을 선형, 소변형, 소변위 영역으로 제한하면 면내 변형은 독립적으로 기술될 수 있으므로 굽힘, 전단 변형을 기술하는 판 요소에 대해 고찰한다.

판 유한 요소는 크게 Kirchhoff 이론에 근거한 요소와 Mindlin 이론에 근거한 요소로 분류할 수 있고 각 이론에 대해 변위 요소, 평형 요소, Mixed 요소 또는 Hybrid 요소가 있다. Kirchhoff 이론은 전단 변형을 무시한 판 변형 이론으로 두께가 상당히 얇은 경우 적용된다. 이 경우 변위를 독립변수로 지배 방정식을 만들면 4차 편미분 방정식이 되어 변위 요소는 경계에서 C^1 연속성을 가질 때 수렴이 보장된다. 그러나 이러한 연속성을 가지는 요소는 변위 근사를 위한 형상 함수의 구성이 쉽지 않고, 계산량에 비해 정밀도도 뛰어나지 못한 것으로 나타나 70년대 이후 별로 연구되지 않고 있다.

Mindlin 이론은 굽힘 변형에 더하여 전단 변형을 근사적으로 고려한 판 변형 이론으로 이에 근거한 요소들은 횡변위와 회전을 독립 변수로 할 때, 범함수에 1차 미분이 최고 차수가 되어 독립 변수들이 요소 경계에서 C^0 연속성만 갖게되면 수렴이 보장되고 판 두께에 상관없이 적용될 수 있다. 그러나 이 경우에도 판의 두께가 아주 얇아질 경우 전단 구속 현상이 발생하여 전혀 틀린 해를 주었고 이를 개선하기 위한 많은 연구가 계속되어 왔다.

본 논문의 목적은 많은 삼각형 판 요소 중 몇개를 선정하여 정적 해석 문제에 대해 비교, 검토하

고 실제 예를 통해 효율, 신뢰성, 수렴성 등을 비교함으로써 판 요소 개발, 이용 등에 유용한 지침을 제공하며 나아가 셸 요소 개발의 기초로 활용될 수 있게 하는 것이다. 본 논문에서는 판 유한 요소의 변위만을 비교 분석하였으며, 응력에 대한 비교 분석은 후속 논문에서 다루어질 것이다.

2. 삼각형 판 유한 요소 고찰

판 유한 요소는 중요한 구조 요소로서 유한 요소법이 개발된 이래 바로 개발되기 시작하여 오늘에 이르고 있다.

판의 두께가 다른 길이에 비해 상당히 작은 경우 전단 변형은 무시할 수 있으며 변형이 작아 변위가 두께의 $1/10$ 이하일 경우 다음과 같은 가정에 따라 판의 굽힘 변형 이론을 세울 수 있고 이 이론을 Kirchhoff-Love 이론이라 한다.

1) 판의 중립면은 변형하지 않는다.

2) 변형 전에 중립면에 수직인 직선은 변형 후에도 중립면에 수직인 직선이 된다.

3) 두께 방향의 수직 응력은 다른 응력에 비해 작아 무시할 수 있다.

일반적으로 Kirchhoff 이론에 의한 판 모델은 판의 강성을 크게 추산하여, 변위를 작게, 고유 진동수를 크게 추산한다. 따라서 이의 정밀도를 높이기 위해 Kirchhoff 이론에 전단 변형을 추가적으로 고려한 판 변형 이론을 Mindlin이론이라 한다.

Kirchhoff 변위 요소는 요소의 경계에서 횡 방향 변위, 접선 방향 1차 미분, 법선 방향 1차 미분 값이 연속이어야 정해로의 수렴이 보장되며 이러한 조건들을 만족시킨다는 것은 쉽지 않다. 특히, 삼각형 판 요소는 사각형 판 요소의 경우보다 형상함수의 구성이 더 복잡하다. Kirchhoff 변위 요소 중에서 먼저 C^1 연속성을 완전히 만족하지 않는 요소를 살펴본다.

초기에 개발된 삼각형 요소인 Adini[1]의 A-9 요소는 3차 완전 다항식의 열개 항 중 xy 항을 제외한 아홉 기저 함수로 형상 함수를 구성하였고, Tocher[2]의 T 요소는 3차 완전 다항식 중 xy^2 항과 x^2y 항을 합쳐 하나의 항으로 형상 함수를 구성

하였으며, T-10 요소는 요소 중심에 변위 자유도 하나를 추가하여 완전 다항식 열개를 모두 이용하였다. 그러나 이들 요소에는 일정 변형도 요건, 기하학적 대칭성 문제, Patch 시험에 각각 문제점이 있다고 Clough와 Tocher[3]는 그의 논문에서 보고하였다.

Bazeley[4]등이 발표한 BCIZI 요소는 삼각형의 면적 좌표계를 이용함으로써 기하학적 대칭성 문제는 해결하였으나 이 요소도 Patch 시험을 통과하지 못했다. Patch 시험을 통과하는 요소를 개발하기 위한 연구는 그 후에도 계속되어 Specht[5]는 Patch 시험을 통과하는 형상함수 구성 기준을 제시하였고 이에 근거해 면적 좌표계로 표현되는 기저함수를 제안하였다. 전술한 바와 같이 Kirchhoff 변위 요소는 요소 경계에서 C^1 연속성을 만족시켜야 정해로의 수렴이 보장되며 초기 요소들은 이 조건을 만족시키지 못하는 비적합 요소들이었다. Irons[6] 등은 한 절점에서 3개의 자유도를 갖는 다항식으로 근사하는 적합 요소는 만들 수 없음을 보였다.

적합 삼각형 판 요소를 개발하기 위한 노력은 다항식이 아닌 형상 함수 이용, 고차 미분값을 절점 변수로 이용하는 방법, 영역을 부영역으로 분할하는 방법 등으로 크게 나눌 수 있다. Bazeley 등은 전술한 BCIZI 요소를 적합 요소로 바꾸기 위해 형상 함수에 면적 좌표의 비 다항식을 추가하여 BCIZ2 요소를 개발하였다[4]. 그러나, 이 요소는 상당히 강성이 큰 요소로 알려져 있고 요소 행렬 계산에 고차의 수치 적분을 해야하는 점, 절점에서 2차 미분값이 유일하게 정의되지 않는 점 등이 단점으로 지적되고 있다. Bazeley의 BCIZ2 요소의 개선이 Razaque에 의해 이루어졌는데 그는 대치 형상 함수와 최소 자승법에 의한 2차 미분값 평활(Smoothing)화 방법을 적용하였다[7].

Clough[3]는 삼각형을 세계의 부영역으로 분할하고 변위의 접선 방향 미분값이 각 모서리를 따라 선형으로 변하게 하고, 특별한 좌표계의 선택으로 기하학적 대칭성이 보장되게 하는 적합 요소인 9 자유도 HCT요소를 개발하였다. Clough와 Felippa[8]는 HCT 요소와 같이 세부영역으로 분

할하되 완전 삼차 다항식을 각 부영역에서 쓸 수 있도록 원래 삼각형의 모서리 중앙에 법선 미분값 자유도를 가진 12 자유도의 LCCT요소를 개발하였으며 Torres 등은 세 부영역으로 분할하되 절점, 모서리 중앙점, 내부점 등에 변위, 미분값 자유도를 갖게 하여 고차 적합 요소를 조직적으로 만드는 방법을 발표하였다. 이러한 고차 요소는 여러 저차 요소를 사용하는 것보다 정밀도와 효율 면에서 우수하나 고차 수치 적분, 고차 미분값의 진동 특성 개선, 계층적 해석을 통한 효율 제고 등으로 연구해야 할 과제들을 남기고 있다.

고차항을 포함시켜 적합성을 갖게 하는 방법들은 꼭지점에 횡 변위의 이차 미분값들을 자유도로 추가하고 적절한 모서리 중앙 혹은 내부점 자유도를 추가하여 형상 함수를 구성하는 방법이다. 이 중 대표적인 요소는 꼭지점의 18 자유도와 모서리 중앙의 법선 미분값 3 자유도, 도합 21 자유도를 가진 요소로 완전 5차 다항식으로 근사된다. 이 요소는 거의 같은 시기에 Argyris[10], Bell[11], Irons[12], Visser[13] 등에 의해 개발되었다. 이 요소에서 법선 방향 미분값의 모서리에서의 변화를 삼차 다항식으로 제한하면 모서리 중앙점 세 자유도가 소거될 수 있고 이 경우 18 자유도 요소가 된다. 그러나, 이러한 요소들은 계산이 복잡할 뿐 아니라 강성도 너무 큰 것으로 나타나 C^1 연속성을 반드시 갖게 해야 하는지는 실용성의 면에서 논란의 대상이 되고 있다.

또 다른 적합 요소 개발 방법은 꼭지점에 1차 미분 값까지 세 자유도를 갖게 하고 모서리 중앙이나 사분점에 횡 변위와 법선 미분값 혹은 꼭지점과 동일한 세 자유도, 요소 내부점에 횡 변위 만의 1 자유도를 갖는 비적합 요소를 기초로 유리식 근사항을 추가하는 방법이다. 이 방법은 고차 미분 절점 자유도가 없어 경계 조건의 적용이 용이하고 불연속성이 쉽게 고려될 수 있으며 약간의 추가 계산을 통해 전단력 분포도 구할 수 있는 점 등이 장점이나 유리항으로 인한 고차 수치 적분의 필요, 최근 개발되고 있는 Mindlin 요소에 비해 상대적 우월성이 별로 없는 점 등이 문제점으로 지적되고 있다.

이상의 요소와는 달리 Morley[4], Elias[15] 등

이 개발한 요소는 상보성 위치 에너지 최소화 원리에 근거한 요소 내부에서의 응력 함수를 이용하여 수식화하였으며 수식의 명확성과 간결성 면에서 뛰어난 것으로 보인다. 그러나 이 방법은 응력 함수의 선택이 어려우며, 외력상태의 정의, 응력 함수 경계 조건 설정, 해로부터 변위의 결정 등의 단점으로 인해 활발히 이용되지 않고 있다.

전술한 방법과 다른 수식화 방법으로 Lagrange 승수를 이용하는 방법이 있으며 요소 수준에서 변수군의 소기 여부에 따라 Hybrid 방법과 Mixed 방법으로 나누어진다.

Pian[6]은 상보성 위치 에너지 최소화 원리의 수정형을 이용하여 요소 내부에서는 응력 또는 굽힘 모멘트를 다항식으로 근사하고 요소 경계를 따라 변위를 근사하였다. 그러나 제로 에너지 모우드가 나타날 수 있기 때문에 응력과 변위의 근사 함수를 주의해서 선택해야 한다. Allman[17]은 요소 내부에서 변위를 완전 삼차 다항식으로 근사하고 요소 경계에서 변위를 접선 방향으로 삼차로, 법선 방향 미분값은 일차로 근사하는 Hybrid 변위 요소를 개발하였으며 변형도의 적합성이 완전하게 만족되는 점과 분포하중을 일관성 있게 처리할 수 있는 장점이 있다.

Mixed 방법에 근거한 요소는 Hermann[8]에 의해 시도되었으며 Hellinger-Reissner 변분원리에 근거한 요소로 요소 내부, 경계 모두에 서로 다른 조합의 응력, 변위 근사가 가능하다. Hermann의 변위 요소는 응력, 변위 모두 C^0 연속성만 가지도록 구성되었으며 평형과 적합성이 근사적으로 만족된다.

판의 두께가 두꺼워지게 되면 전단에 의한 변형을 고려해야 정확한 해를 얻을 수 있게 되며 Mindlin 이론에 따르는 요소들은 C^0 연속성만 만족하면 수렴이 보장되고 이에 따라 수식화가 간결해진다는 장점이 있으나 두께가 작아지면 전단 변형 에너지가 굽힘 변형에 의한 에너지보다 매우 크게 되어 "구속 현상"이 나타날 수 있다는 단점을 가지고 있다.

전단 구속 현상을 해결하기 위한 가장 간단한 방법은 부정확 적분법에 의한 강성 행렬 계산 방법이다. 부정확 적분법은 변형 에너지를 적분할

때 굽힘에 의한 항은 정확하게 전단에 의한 항은 적분 차수를 낮춰 부정확하게 적분하는 선택적 부정확 적분법과 모든항의 적분 차수를 낮춰 적분하는 균일한 부정확 적분법이 있다. 그러나, 이러한 부정확 적분을 도입해도 아주 얇은 판이나 특별한 경계 조건, 뒤틀림이 심한 유한 요소 모델의 해석에는 상당한 오차가 발생하고 있다.

Mindlin 판 요소에 있어서 전단 구속 현상을 해결하는 또 다른 방법으로 Kirchhoff 조건을 요소 수준에서 Gauss 적분점이나 Loof 점에 적용하는 방법이 있다[19]. 삼각형 DKT (Discrete Kirchhoff Theory) 요소는 중형비에 따르는 전단 구속과 제로 에너지 모우드가 없고 Patch 시험을 통과하고 요소 뒤틀림에 대한 민감도가 작고 강성의 계산이 간단하고 효율적인 점 등이 장점이며 얇은 판 해석용 삼각형 요소 중 가장 좋은 요소의 하나로 평가되고 있다. 또, Batoz 등은 DKT와 동일한 수식화 과정을 따르되 Kirchhoff 조건식에 전단 변형도 정의식을 추가하여 평형식이 요소 경계의 몇 점에서 정확하게 만족되게 함으로써 두께가 상당히 두꺼운 경우에도 적용되는 DST (Discrete Shear Triangle) 요소를 개발하였다[20]. 전단 변형도 근사에 의한 판 요소는 변위와 회전을 같은 형상 함수로 보간하고 전단 변형도를 적절히 근사하여 전단 구속을 제거한 요소이며 Hinton[21]의 요소는 전단 변형도를 요소내 정해진 점에서 변위를 미분해 얻는 다항식의 항들만 갖는 보간 함수로부터 구한 대치 전단 변형도와 함께 한 방법으로 전단 구속, 제로 에너지 모우드가 없고 모든 Patch 시험을 만족하는 요소이다.

Mindlin 판 이론에 근거한 변위 요소의 전단 구속을 해결하기 위한 또다른 방법으로 전단 에너지에 수정 계수를 곱하는 방법이다. Tessler와 Hughes[22]는 전단 수정 계수를 일반화하고 변위와 회전에 대한 형상 함수를 독립적으로 선택하되 변위를 회전보다 한 차수 높은 완전 다항식으로 근사하고 전단에 대한 연속 조건이 요소 전 경계에서 항상 만족되게 함으로써 전단 구속이 없고 제로 에너지 모우드가 없으며 요소의 뒤틀림에 대한 민감도가 작은 MIN3 요소를 개발하였다.

Hybrid 응력 요소는 변위와 응력을 서로 독립

적으로 근사하는 요소이며 응력은 각 점에서 평형 방정식을 만족하도록 근사된다. Tong[23]은 Hybrid 요소의 요소행렬 계산의 효율을 높이기 위하여 요소의 응력 자유도와 변위 자유도 관계를 나타내는 역행렬을 외현적으로 표현하여 우수한 삼각형 요소를 개발하였고 Wu[24]는 전단 에너지 오차가 두께가 커짐에 따라 커지는 것을 막기 위해 전단항 수정 계수를 도입하였다.

Hybrid 변형도 요소는 요소 내의 변형도를 변위와 함께 근사하는 요소로 Hellinger-Reissner 변분 원리의 수정형이나 Hu-Washizu 변분 원리의 수정형에 근거하고 있다. Hellinger-Reissner 변분 원리를 수정한 PLAT6[25]는 변위, 회전은 완전 이차 다항식으로 근사하고 전단 변형도를 두 개와 다섯개 혹은 여섯개 자유도를 갖게 하였다. Chierslar와 Ghali[26]는 Hu-Washizu 변분 원리에 근거한 Hybrid 변형도 요소를 발표하였는데 선형 요소의 경우 변위요소에 비해 정확성, 수렴성, 제로 에너지 모우드가 없는 점등이 장점이나 고차 요소의 경우 요소 행렬의 계산에 많은 시간이 소요된다는 단점이 있다.

Mindlin 이론에 근거한 Mixed 요소의 경우 근사 기법에 대한 수학적 근거가 보다 확실하고, 전단 구속과 제로 에너지 모우드 배제 가능성을 보이고 있어 최근에 많이 연구되고 있다.

Hughes[27]등은 변위, 회전, 전단력을 독립 변수로 하는 Reissner-Mindlin 범함수에 전단 변형과 전단력의 관계, 모멘트 평형식을 최소 자승의 개념으로 적절한 계수를 이용하여 합하고 요소의 형상 두께 등에 관계없이 정해로 수렴하도록 이 계수의 범위를 정하였으며 변위를 3차로, 회전을 2차로, 전단력을 1차로 근사한 요소 또는 이 이상의 다항식을 이용한 변수에서는 모든 요소가 수렴하는 것으로 나타났다.

Zienkiewicz 등은 Mindlin 판에 대한 Reissner 변분 원리에 근거하여 요소의 변위, 회전, 전단력 등 각 자유도의 수와 강체 운동을 구속하는 자유도의 수를 이용해 전단 구속 여부를 쉽게 판정할 수 있는 방법을 제안하였고 이에 근거해 변위, 회전은 2차로, 전단력은 선형으로 근사하되 회전 근사에 Bubble 근사항에 의한 6자유도를 추가하여

여러 특성이 우수한 T5/3B3 요소를 개발하였다 [28]. 또, DKT 요소의 확장형인 DRM(Discrete Reissner-Mindlin) 요소를 발표하였는데 Mindlin 판에 대한 위치 에너지를 전단에 대한 항만 전단력의 항으로 표현하고 이 전단력과 변위, 회전과의 관계를 경계에서의 조건으로 만족되게 한 요소이다. 회전은 2차로, 변위는 선형으로, 전단력은 각 모서리에서 상수가 되게 근사하면 전술한 경계 조건과 전단 구속이 없을 조건을 만족하는 요소를 얻을 수 있고 얇은 판에서는 DKT에 비견할만한 거동을 보이고 상당히 두꺼운 판에도 적용할 수 있는 요소이다[29].

3. 선정된 판 유한 요소

전술한 여러 종류의 삼각형 판 유한 요소 중에서 대표적인 요소, 우수한 거동을 가진 것으로 알려져있는 요소 몇개를 선정하여 수치 계산을 통해 변위 거동 특성을 비교하였으며 비교된 각각의 요소에 대해 간단히 설명한다.

Kirchhoff 변위 요소는 처음 Zienkiewicz에 의해 기저 다항식 벡터가 면적 좌표 변수의 3차항까지 포함하도록 제안되었다. 그후 이 기저항에 거품 함수 항을 첨가하면 보다 향상된 변위 거동을 나타내며 이 기저 다항식이 에너지 직교 모드를 가진다는 것이 Bergan[30]에 의해 확인되었다. 그러나 이 요소는 Patch 시험을 통과하지 못하며 이를 개선하기 위해 Specht[5]는 적분 의미에서 내부 요소의 경계 위에서 수직 변위와 법선 기울기의 부적합을 제한하도록 기저 다항식을 구성하여 Patch test를 통과하는 요소를 제안하였다.

DKT 요소[31]는 회전량과 변위를 독립적으로 근사하되 영역의 일부에서 두 양 사이의 관계를 만족하도록 Discrete Kirchhoff Theory를 적용한다. 요소의 경계에서 w , (w,s) , β_s , β_n 은 연속이 된다. 이 요소는 제로 에너지 모드가 없으며 요소 뒤 틀림에 대한 민감도가 작고 patch 시험을 통과한다.

HSM(Hybrid Stress Method) 요소 [32]는 Hybrid 응력 요소이며 상보성 에너지 최소화 원리로부터 유도되어진다. 이때 요소 내에서 각 굽

힘 모멘트를 각각 완전 일차식으로 근사하고 요소의 각 모서리에서 횡변위는 Hermite 다항식으로 근사하며 법선 방향 미분값은 각 꼭지점의 값을 이용하여 일차로 근사한다. 한편, 요소의 경계에서 굽힘 모멘트의 불연속을 허용하면 상보성 에너지 최소화 원리로 부터 요소 내 굽힘 모멘트 자유도를 완전히 소거할 수 있고 요소의 거동을 모두 9개의 절점 변수로 표현할 수 있게 된다.

Mindlin 이론에 근거한 삼각형 판요소 중, T1 요소[33]는 B-방법의 전형적인 예로 일반적인 형상에서 일정 전단 변형 모드를 정확히 표현할 수 있도록 개발되었다. 각 모서리에서 모서리방향 전단 변형 성분은 전단 변형을 모서리에 투영시켜 구하고 이 값을 이용하여 각 절점에서의 전단 변형을 근사한다.

HMSH3 요소[34]는 Hellinger-Reissner 변분 원리에 근거하여 변위와 응력을 독립적인 상태 변수로 하는 Mixed 요소이며 막 응력과 굽힘 응력을 상수로 근사하고 전단력을 요소 경계 전단 조건을 만족하는 특별한 형태의 선형식으로 근사하여 막 변형 거동도 좋은 요소이다.

DST 요소 [20]는 전단에 의한 영향을 고려하기 위해 Discrete Kirchhoff 기법에 전단 변형도 정의식을 추가하여 평형식이 요소 경계의 몇점에서 정확하게 만족되게 하여 두께와 상관없이 해석이 가능하게 하였다. 제로 에너지 모우드와 전단 구속을 모두 배제한 이 요소는 얇은 평판에서는 DKT 요소와 일치하게 된다.

MITC7(Mixed Interpolated Tensorial Components)요소 [35]는 6절점 삼각형 요소로 수직 변위와 절점의 좌표는 6절점 Lagrangian type 형상 함수로 보간하고 회전은 이에 3차 거품 함수를 첨가하여 보간하였다. 이 3차 거품 함수에 해당하는 자유도는 요소 수준에서 제거되어 최종적으로 요소당 18 자유도를 갖는 삼각형 요소가 된다.

4. 수치실험

앞에서 설명한 8가지 요소와 부정확 적분법에 의한 계산(SEL3 요소)을 얇은 판뿐 아니라 상당

히 두꺼운 판의 경우에 대하여 적용하였으며 T1 요소와 부정확 적분법에 대해서는 적분점의 갯수의 변화에 따른 성능 특성도 비교하였다. 사각형 얇은 판 문제의 경우 전단 구속발생 여부를 검토하기 위해 아주 얇은 판을 해석하였으며 실용성을 검토하기 위해 보통 얇은 판도 해석하였다. 이 때 아주 얇은 판의 경우 두께와 길이 비를 10^{-5} 으로, 보통 얇은 판의 경우 10^{-3} 으로, 두꺼운 판의 경우는 0.1로 하였다.

비교 문제로는 문헌에 자주 인용되는 사각형 판의 해석, 마름모형 판의 해석, 원형 판의 해석, 외팔보 네요소 해석, 뒤틀린 격자의 해석을 택하였다. 비교되는 해는 최대 변위이며 해석적 정해가 있는 경우나 논문에 참고해가 있는 경우 그 값으로 하였고 이런 해를 찾을 수 없는 경우에는 해석 결과를 직접 수록하여 비료할 수가 있게 하였다. 참고 해가 있는 경우 참고 해에서 유한 요소 해를 뺀 값의 참고 해에 대한 백분율을 수록하였다.

4-1. 사각형 판의 해석

한 변을 각각 1, 2, 4, 8, 16 등분한 격자를 이용하였고 한 격자내의 요소 분할은 A, B, C 세가지 모델(그림 1)을 고려하였으며 대칭성을 이용하여 1/4만 해석하였다. 경계조건으로는 지지 방향의 회전 변위를 구속하지 않은 단순 지지(SS1), 지지 방향 회전 변위에 구속을 가한 단순 지지(SS2), 완전 지지(CL) 등 세 경우를 고려하였다. 하중 조건으로는 균일 분포 하중(UL)과 중앙의 집중 하중(CL) 두가지를 고려하였으며 고려된 경계 조건들과의 조합에 대해 각각 해석하였다. 판의 크기는 양변이 1인 정사각형으로 하였고 탄성 계수를 10920psi, 포와슨 비를 0.3으로 하여 계산하였다.

해석 결과를 표1에서 표3까지에 수록하였으며 다음 사항들이 고찰되었다.

아주 얇은 판의 경우 부정확 적분 요소 SEL3는 전단 구속이 심하게 일어나 모든 경우의 해가 거의 0이 되었다.

T1 요소와 HMSH3 요소의 해는 B형 격자의 경우 극히 불량하였고 다른 격자의 해도 구할 수는 있었으나 다른 우수 요소에 비해 정밀도가 상

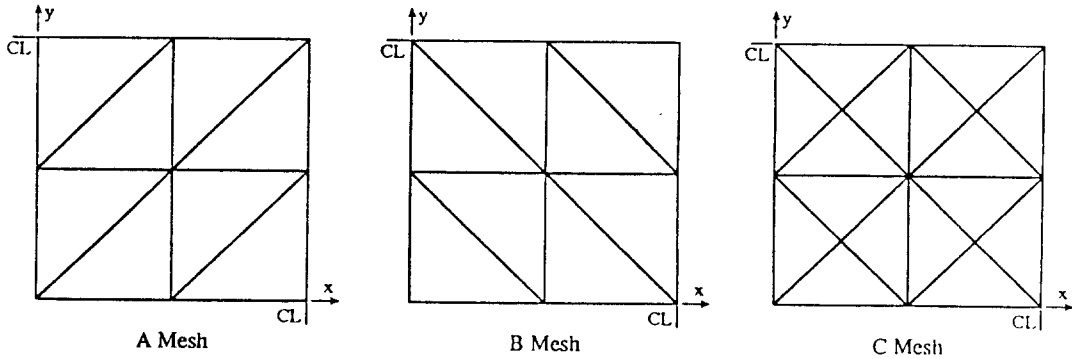


그림 1. 사각형 판 문제의 요소 분할

표 1. 사각형 평판의 최대 변위점에서의 상대 오차(%) (SS2-CL, Thin plate, a/ b=1)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7	Bergan	Specht	HSM	DKT
A	1x1	100.00	67.95	67.95	67.95	-2.44	-1.89	26.87	-20.36	20.53	-2.44
	2x2	100.00	31.89	31.89	31.89	0.16	-0.33	5.29	-5.45	5.23	0.16
	4x4	100.00	22.88	22.86	22.87	-0.06	-0.05	1.48	-1.25	1.26	-0.06
	8x8	100.00	20.59	19.96	20.56	-0.03	-0.01	0.06	-0.30	0.30	-0.03
	16x16	100.00	19.48	7.92	19.15	-0.01	-	0.30	-0.08	0.08	-0.01
B	1x1	57.79	100.00	100.00	100.00	42.43	7.94	21.51	-12.26	60.82	42.43
	2x2	90.77	100.00	99.99	100.00	9.52	0.81	13.24	-2.70	15.88	9.52
	4x4	99.99	99.97	99.25	99.95	2.21	0.07	4.46	-0.63	3.98	2.21
	8x8	100.00	99.47	69.32	99.15	0.54	0.00	1.55	-0.14	0.99	0.54
	16x16	99.99	92.16	8.80	88.15	0.13	-	0.58	-0.04	0.25	0.13
C	1x1	57.79	35.90	35.90	35.90	12.87	0.11	-1.64	-8.62	23.07	12.87
	2x2	82.19	8.85	8.85	8.85	3.48	-0.02	2.10	-2.17	6.83	3.48
	4x4	94.95	2.26	2.26	2.26	0.87	-0.01	2.97	-0.53	1.73	0.87
	8x8	98.69	0.57	0.57	0.57	0.22	0.00	3.17	-0.14	0.43	0.22
	16x16	99.63	0.14	0.14	0.14	0.05	-	3.21	-0.04	0.11	0.05

당히 떨어졌다. C형 격자의 해가 A형 격자의 해보다 우수하였고 A형으로 두배 세분한 결과보다 C형 격자의 해가 우수하였다. 특히, 완전 지지의 경우 A형 격자에서는 전단 구속이 심한 반면 C형 격자로는 정밀한 해를 구할 수 있었다.

DKT 요소는 원래 얇은 판 용으로 개발되었으므로 모든 경우에 정밀도 높은 해를 구할 수 있었다. HSM 요소로도 비교적 좋은 해를 구할 수 있었으나 DKT 요소에 비해 안정성이 떨어지는 것으로 나타났다.

DST 요소는 모든 경우에 신뢰성 있게 해를 구할 수 있었으며 아주 얇은 판의 해는 DKT 요소와 일치하고 있었다.

MITC7 요소의 해는 모든 경우에 우수하였다. UL 하중인 경우 선형 요소로 두배 세분한 해석 결과보다 우수하였으나 CL 하중인 경우 선형 요소보다 약간 나은 정도에 그쳐 개선할 필요성이 있겠다.

변위 요소인 Bergan 요소와 Specht 요소의 해를 살펴보면 CL 하중 상태에서 Bergan 요소가,

표 2. 사각형 평판의 최대 변위점에서의 상대 오차(%) (SS2-UL, Thin plate, a/ b=1)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7	Bergan	Specht	HSM	DKT
A	1×1	100.00	32.66	32.66	32.66	-7.62	10.09	1.17	-30.73	16.51	-7.62
	2×2	100.00	32.66	32.66	32.66	-0.75	2.42	1.17	-10.77	6.66	-0.75
	4×4	100.00	32.65	32.64	32.65	-0.29	0.61	0.30	-2.99	1.86	-0.29
	8×8	100.00	32.60	31.26	32.57	-0.11	0.15	0.30	-0.82	0.51	-0.11
	16×16	100.00	31.72	13.39	31.20	-0.04	-	0.27	-0.22	0.14	-0.04
B	1×1	55.66	100.00	100.00	100.00	-20.95	16.64	35.95	-18.27	17.69	-20.95
	2×2	94.46	100.00	99.99	100.00	-10.67	3.39	18.53	-6.51	4.82	-10.67
	4×4	100.00	99.97	99.32	99.95	-3.44	0.76	7.23	-2.14	1.55	-3.44
	8×8	100.00	99.51	72.27	99.22	-1.03	0.18	2.91	-0.64	0.46	-1.03
	16×16	99.99	92.76	11.04	89.01	-0.30	-	1.19	-0.19	0.14	-0.30
C	1×1	55.66	32.66	32.66	32.66	0.92	5.00	-7.60	-13.84	12.66	0.92
	2×2	83.37	13.01	13.01	13.01	-0.91	1.21	0.89	-4.74	3.93	-0.91
	4×4	95.15	4.24	4.24	4.24	-0.46	0.29	2.73	-1.46	1.14	-0.46
	8×8	98.69	1.30	1.30	1.30	-0.17	0.07	3.12	-0.43	0.33	-0.17
	16×16	99.63	0.38	0.38	0.38	-0.06	-	3.20	-0.13	0.09	-0.06

표 3. 사각형 평판의 최대 변위점에서의 상대 오차(%) (CL-UL, Thin plate, a/ b=1)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7	Bergan	Specht	HSM	DKT
A	1×1	100.00	100.00	100.00	100.00	-49.34	34.04	37.21	-37.10	31.68	-49.34
	2×2	100.00	100.00	100.00	100.00	-22.29	2.74	17.02	-7.29	-3.65	22.29
	4×4	100.00	99.99	99.95	99.98	-6.49	0.15	4.44	-2.03	-1.17	-6.49
	8×8	100.00	99.79	97.38	99.62	-1.68	0.00	1.29	-0.41	-0.38	-1.68
	16×16	99.99	96.31	51.11	93.88	-0.42	-	0.46	-0.08	-0.11	-0.42
B	1×1	100.00	100.00	100.00	100.00	18.08	67.01	-31.40	-75.57	77.13	18.08
	2×2	100.00	100.00	100.00	100.00	4.02	7.14	7.93	-19.66	22.60	4.02
	4×4	100.00	99.99	99.95	99.98	0.59	0.56	4.85	-5.34	5.98	0.59
	8×8	100.00	99.75	97.06	99.56	0.14	0.03	1.81	-1.36	1.53	0.14
	16×16	99.99	95.78	44.46	93.05	0.03	-	0.69	-0.34	0.38	0.03
C	1×1	100.00	100.00	100.00	100.00	-12.20	-2.97	14.34	-10.37	0.03	-12.20
	2×2	100.00	22.82	22.82	22.82	-4.69	0.03	2.86	-6.77	4.39	-4.69
	4×4	100.00	6.52	6.52	6.52	-1.33	-0.01	3.07	-2.08	1.42	-1.33
	8×8	99.99	1.68	1.68	1.68	-0.36	-0.01	3.22	-0.53	0.36	-0.36
	16×16	99.98	0.42	0.42	0.42	-0.09	-	3.24	-0.13	0.09	-0.09

UL 하중 상태에서 Specht 요소가 우수하였다. 해의 정밀도는 UL 하중에서 DKT요소와 비견할 만하고 CL 하중에서는 떨어진다. 특히 Bergan 요소는 C격자일 때 수렴하지 않아 신뢰성에 문제가 있는 것으로 판단된다.

보통 얇은 판의 경우에는 얇은 판 요소인 내개의 Kirchhoff 판 요소를 제외하고 나머지 6종류에 대하여 해석하였으며 결과를 표 4에 수록하였다.

표 4. 사각형 평판의 최대 변위(SS2-UL, t/ a=0.001, a/ b=1, $\times 10^4$)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7
A	1x1	.0000	.1302	.1302	.1032	.2339	.4139
	2x2	.0000	.2767	.2767	.2767	.3676	.4076
	4x4	.0001	.3140	.3171	.3144	.3973	.4064
	8x8	.0004	.3340	.3772	.3393	.4041	.4063
	16x16	.0015	.3803	.4029	.3869	.4057	-
B	1x1	.1715	.0000	.0000	.0000	.4161	.3740
	2x2	.0376	.0005	.0036	.0010	.4056	.4029
	4x4	.0004	.0120	.1544	.0192	.4065	.4060
	8x8	.0013	.1309	.3772	.1731	.4064	.4062
	16x16	.0048	.3516	.4038	.3699	.4063	-
C	1x1	.1715	.2604	.2604	.2604	.3540	.4058
	2x2	.0725	.3703	.3703	.3703	.3921	.4063
	4x4	.0215	.3971	.3971	.3971	.4027	.4063
	8x8	.0094	.4039	.4039	.4039	.4054	.4062
	16x16	.0179	.4057	.4057	.4057	.4060	-

SEL3 요소는 모든 경우에 부정확하게 쓸 수 없는 해를 산출하였다. T1 요소와 HMSH3 요소도 약간의 전단 구속 현상을 보였으나 격자를 세분해감에 따라 점차로 정확한 해에 접근하였다. 그러나 수렴하는 속도는 전단 구속이 없는 요소에 비해 상당히 떨어졌다. T1 요소에서 선택적 부정확적분을 한 T1(1)요소의 해가 정확한 적분을 한 T1(3) 요소보다 우수하였다. HMSH3 요소의 해는 SEL3 요소의 해보다 훨씬 우수하였으나 T1 요소의 해보다는 정밀도가 떨어졌다.

DST 요소의 해는 상당히 우수하였으며 모든 경우 신뢰성 있는 해를 구할 수 있었다. 대개의 경우 A 격자 보다 B격자의 해가 우수한 것이 특기할 만하다. MITC7 요소의 해는 매우 우수하였으며 대체로 두배로 세분한 우수 요소의 격자와 비슷한 정밀도를 보였다.

두꺼운 판의 해석 결과를 표 5에 수록하였다. SEL3 요소와 HMSH3 요소는 동일한 결과를 산출해 주고 있으며 T1 요소들 보다 우수한 것으로 나타났다. 그러나 단순 지지 A격자와 좌잡 격자에

표 5 사각형 평판의 최대 변위(SS2-UL, t/ a=0.1, a/ b=1, $\times 10^{-2}$)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7
A	1x1	.0218	.1401	.1401	.0218	.2426	.4393
	2x2	.1232	.3256	.3321	.1232	.3830	.4301
	4x4	.2666	.3994	.4004	.2666	.4158	.4281
	8x8	.3700	.4178	.4178	.3700	.4242	.4275
	16x16	.4113	.4226	.4226	.4112	.4266	-
B	1x1	.1953	.0521	.0741	.1953	.4398	.4098
	2x2	.2399	.3306	.3500	.2399	.4266	.4289
	4x4	.3500	.4062	.4079	.3500	.4270	.4284
	8x8	.4041	.4199	.4200	.4041	.4271	.4276
	16x16	.4216	.4231	.4231	.4216	.4273	-
C	1x1	.2518	.2811	.2814	.2518	.3740	.4315
	2x2	.3591	.3895	.3898	.3531	.4103	.4289
	4x4	.4085	.4062	.4155	.4085	.4227	.4278
	8x8	.4225	.4199	.4217	.4225	.4261	.4274
	16x16	.4261	.4231	.4233	.4261	.4270	-

서는 T1요소의 해가 더 나았다. 적분점 수가 다른 T1(1) 요소와 T1(3) 요소의 결과는 비슷하였다.

DST 요소의 해는 HMSH3 요소의 해보다 훨씬 우수하였고 MITC7 요소의 거동은 그보다 더 우수하였으며 수렴하는 경향으로 보아 선형 요소로 두배 세분한 격자 해보다 우수한 것으로 판단된다.

4-2 원형 판의 해석

직경이 10in인 원형판의 1/4 영역을 3, 12, 48개의 사각형으로 분할(그림 2)한 후 각 사각형을 변형을 고려하여 각각 두개의 삼각형으로 분할하였다. 두께가 0.1in인 얇은 판과 두께가 1in, 2in인 두꺼운 판에 대해 각각 SS1-UL, SS1-CL, CL-UL, CL-CL 경계조건하에 해석하였다. 재료 상수는 사각형 판의 경우와 같다.

얇은 원형 판의 해석 결과를 표 6에 보였다. SEL3 요소는 모든 경우 전단 구속이 일어났다. T1 요소와 HMSH3 요소는 완전 지지일 때 전단 구속이 일어났고 단순 지지의 경우에도 해가 별로 좋지 않았다. DKT 요소의 거동은 전반적으로 우수하였으나 CL-CL 상태의 거동이 상대적으로 열등하였다. HSM 요소의 거동은 균일 분포 하중의 경우 DKT 요소보다 약간 못하였고 집중 하중을 받는 경우에는 약간 우수하였다. DST 요소와 DKT 요소는 완전히 같은 결과를 산출하였다. MITC7 요소의 거동은 상당히 우수하였으나 CL-CL 거동이 상대적으로 조금 나빴다. 변위 요

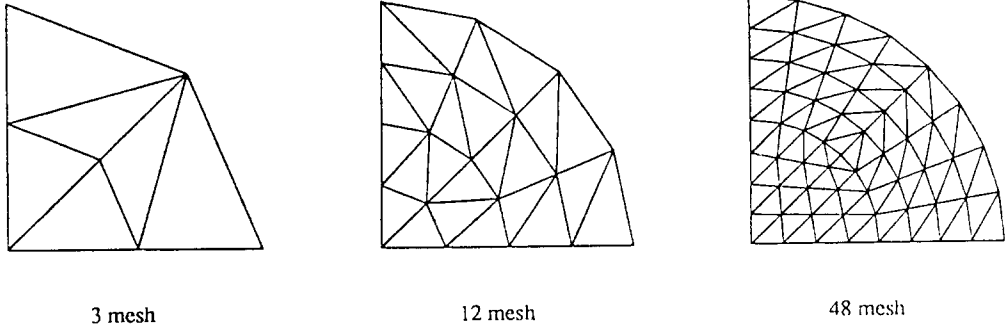


그림 2. 원형 판 문제의 요소 분할

표 6. 원형 평판의 최대 변위점에서의 상대 오차(%)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7	Bergan	Specht	HSM	DKT
BC&LC	n										
SS1-UL	3	99.63	30.82	30.81	30.82	4.98	0.23	20.00	2.25	10.24	4.98
	12	99.99	25.46	24.25	25.14	1.03	0.00	5.17	-0.97	2.59	1.03
	48	99.99	19.11	12.81	18.42	0.27	0.00	-0.12	-2.33	0.68	0.27
SS1-CL	3	90.05	32.68	32.67	32.68	-6.68	1.70	13.82	-0.32	-0.21	-6.68
	12	99.97	37.24	36.12	36.97	-1.74	0.47	3.38	-1.23	0.22	-1.74
	48	99.93	34.09	23.84	33.46	-0.46	0.13	0.49	-1.59	0.15	-0.46
CL-UL	3	99.99	99.99	99.99	99.99	-5.38	-0.22	-12.52	-22.73	16.36	-5.38
	12	99.99	99.98	99.89	99.97	-2.17	-0.06	-3.37	-7.98	3.89	-2.17
	48	99.99	99.79	92.26	99.65	-0.54	-0.02	-2.27	-3.98	1.09	-0.54
CL-CL	3	99.99	99.99	99.99	99.99	-1.70	2.63	-14.50	-22.37	40.36	-1.70
	12	99.99	99.98	99.85	99.97	-2.01	-0.56	-3.95	-7.30	2.88	-2.01
	48	99.99	99.72	89.23	99.56	-1.95	-1.46	-0.38	-3.11	-0.37	-1.95

소들도 DKT 요소와 비슷한 정도의 해를 산출해 주었고 Bergan 요소가 Specht 요소에 비해 나은 것으로 나타났다.

표 7. 원형 평판의 최대 변위점에서의 상대 오차(%)
(Thickness = 0.1)

ELEMENT		SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7
BC&LC	n						
SS1-UL	3	33.93	16.88	16.06	33.93	5.06	-0.32
	12	11.62	4.92	4.76	11.62	1.03	-0.24
	48	3.23	1.76	1.75	3.23	-0.24	-0.07
CL-UL	3	41.47	42.46	38.13	41.47	-3.46	-1.02
	12	13.51	12.26	11.64	13.51	-1.88	-0.64
	48	3.44	4.94	4.89	3.44	-1.45	-0.22

두꺼운 원형 판의 해석 결과를 표 7에 보였다. SEL3 요소와 HMSH3 요소의 해는 거의 같았으며 T1 요소의 해는 이들에 비해 정밀도가 약간 떨어졌다. DST 요소의 거동은 HMSH3 요소 보다 우수하였고 MITC7 요소의 해가 가장 좋아 두배로 세분한 다른 요소 해보다 오히려 우수하였다.

4-3 뒤틀린 격자의 사각형 판 해석

격자의 뒤틀림이 해에 미치는 영향을 알아보기 위해 한 변의 길이 1in, 두께 0.1 in인 사각형 판을 그림 3과 같이 요소 형상이 뒤틀린 두가지 격자로

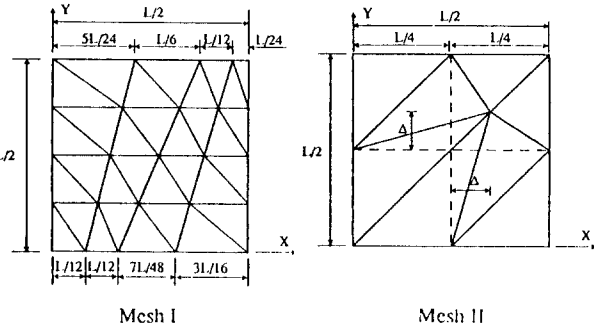


그림 3. 사각형 판의 뒤틀린 격자 요소 분할

모델링하여 SS2-UL조건에서 해석하여 그 결과를 표 8에 수록하였다. 원래 문제에 대칭성이 있는 것을 고려하여 1/4만 모델링하였다. 재료 상수는 사각형 판의 경우와 동일하다.

Mindlin 판 요소의 경우 뒤틀린 격자의 해가 뒤틀리지 않은 격자의 해보다 더 정확한 것으로 나타나 뒤틀림의 정도가 그렇게 크지 않을 경우에는 영향이 별로 없는 것으로 판정할 수 있겠다. 그러나 Kirchhoff 판 요소들은 뒤틀린 격자의 해가 뒤틀리지 않은 격자의 해에 비해 약간 못한 것으로 나타나 뒤틀림이 심하지 않은 격자가 되도록 주의해야 할 필요가 있겠다.

표 8. 조잡 격자를 이용한 사각 평판의 최대 변위점에서의 상대오차(%) (SS2-UL, $t/a=0.1, D/L=0.1$)

ELEMENT	TYPE	Mesh I	Mesh II
SEL3		23.60	30.75
T1(3)		5.97	36.58
T1(1)		5.70	29.64
HMSH3		23.60	30.75
DST		1.32	2.77
MITC7		-1.03	-1.34
Bergan		5.53	4.07
Specht		-0.80	7.27
HSM		3.28	16.33
DKT		1.41	5.88

4-4 마름모 형 판의 해석

마름모 형 판은 한변을 2, 4, 8, 16 등분한 격자로 모델링 하였으며 한변의 길이가 100in이고 두께가 1in인 판에 SS1-UL 조건을 계산하여 그 결과를 표9에 수록하였다. 마름모는 내각이 30°, 150°인 마름모이며 전 영역을 모델링 하였다. 재료

상수는 사각형 판의 경우와 같다.

SEL3 요소, T1요소, HMSH3 요소들의 해는 조잡 격자의 해가 세분 격자의 해보다 나은 경우가 자주 있어 신뢰성이 없었으며 MITC7 요소의 거동이 가장 좋았다.

DKT 요소의 해는 수렴하고 있으나 사각형 판 해석에 비해 수렴 속도, 정밀도 등이 모두 떨어진다. 한변을 여덟 등분한 모델에서도 오차는 4.7% 정도로 사각형 판 요소에 비해 상당히 나쁘다. DST 요소의 거동은 DKT 요소와 비슷하였고 HSM 요소와 Specht 요소는 DKT 요소에 비해 오차가 반 정도인 것으로 나타났다. MITC7 요소는 다른 요소를 두배로 세분한 경우보다 나은 결과를 주었다.

4-5 외팔 보의 네 요소 해석

폭 1in 두께 0.05in인 외팔 보를 그림 4와 같이 한 사각형으로 생각하여 이 사각형을 C형 격자로 분할하였다. 두께는 일정하게 하였으며 길이와 폭의 비를 1, 2, 4, 8, 16, 32로 바꾸어 가며 해석하여 요소의 종횡비 영향을 검토하였다. 해석 결과는 표 10에 보였다. 탄성 계수는 사각형 판의 경우와 같으며 포와슨 비는 0.25이다.

SEL3 요소, T1 요소, HMSH3 요소의 해는 전 단 구속에 의해 길어질수록 나빠져 종횡비의 영향을 검토할 수 없었다. 얇은 판 요소인 변위 요소와 HSM 요소의 해도 길어질수록 나빠져 변위 요소의 경우 종횡비가 3이상이면, HSM 요소의 경우 5이상이면 정밀한 해를 기대할 수 없는 것으로 나타났다. DKT 요소, DST요소, MITC7 요소 등은 대체로 길이에 선형 비례하는 해를 산출해 주어 종횡비에 별 영향을 받지 않는 요소인 것으로 나

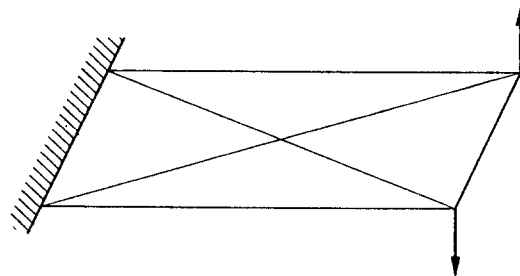


그림 4. 외팔보 문제의 요소 분할

표 9. 마름모형 평판의 최대 변위점에서의 상대 오차(%)

ELEMENT	SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7	Bergan	Specht	HSM	DKT
2×2	17.85	16.38	14.07	12.47	-68.41	-6.10	91.00	42.09	-29.50	-68.27
4×4	45.37	7.49	6.50	4.56	-13.37	2.26	21.55	10.31	-7.22	-13.23
8×8	45.79	8.53	5.28	0.87	-4.88	-0.96	9.50	2.96	-2.42	-4.71
16×16	31.85	1.63	-0.21	-2.52	-3.31	-	6.16	1.72	-1.90	-3.01

표 10. 외팔 보의 최대 변위 비교

ELEMENT L/a	SEL3	T1 (3)	T1 (1)	HMSH3	DST	MITC7	Bergan	Specht	HSM	DKT
1	0.56	1.20	1.20	1.22	1.85	2.07	1.82	1.70	2.20	2.34
2	0.84	1.82	1.83	1.89	4.41	4.56	3.69	4.40	4.90	5.65
4	0.74	1.61	1.63	1.87	9.67	9.10	5.50	4.21	8.21	12.51
8	0.45	0.99	1.03	1.67	20.02	17.41	5.23	2.42	8.54	25.99
16	0.24	0.52	0.56	2.02	40.44	33.72	3.37	1.26	5.76	52.55
32	0.12	0.27	0.29	3.32	81.08	66.66	1.81	0.63	3.15	105.40

타났다. 단지, MITC7 요소의 경우 길어질수록 약간씩 stiff해지는 경향을 보여 종횡비 8 이상인 격자는 사용하지 않는 편이 좋을 듯하다.

5. 결 론

삼각형 판 요소들의 정적 거동을 비교 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. Kirchhoff 이론에 근거한 요소

- DKT 요소는 얇은 판 요소 중 가장 좋은 거동을 보이고 있으며 격자 뒤틀림, 종횡비 영향도 크지 않다.
- HSM 요소의 거동은 DKT 요소에 비해 약간 떨어지며 종횡비가 5 이상이면 정밀한 해를 기대하기 어렵다.
- 변위 요소로는 Specht 요소가 우수한 것으로 나타났고 정밀도는 DKT 요소에 비해 약간 떨어진다. 그러나 격자에 뒤틀림이 있는 경우에는 Bergan 요소의 거동이 더 좋았다. 뒤틀림이 큰 경우의 해는 오차가 상당히 컸

다. 요소의 종횡비가 3 이상이 되지 않게 해야 신뢰성 있는 해를 얻을 수 있다.

2. Mindlin판 이론에 근거한 요소

- 부정확 적분 요소, T1 요소, HMSH3 요소 등은 얇은 판 문제에서 전단 구속이 발생하는 경우가 있고, 격자에 뒤틀림이 있을 때나 종횡비가 커질 때의 거동도 좋지 않아 가능하면 사용하지 않는 편이 바람직하겠다.
- DST 요소의 얇은 판 거동은 DKT 요소와 일치하고 있고 두꺼운 판에서도 좋은 거동을 보여주며 종횡비, 요소의 뒤틀림의 영향도 크지 않아 선형 요소로는 가장 우수한 것으로 평가된다.
- 이차 요소인 MITC7 요소의 거동은 모든 경우에 탁월하며 선형 요소로 두배 세분한 경우의 해와 비교해 볼 때 정밀도가 비슷하거나 나은 것으로 나타났다. 그러나 집중 하중에 대한 거동이 떨어지는 점의 개선과 막 변형과의 신뢰성 있는 연계를 위한 연구가 앞으

로의 과제로 남아 있다.

참 고 문 헌

1. A. Adini, "Analysis of Shell Structures by the Finite Element Method," Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Engng, Univ. of California, Berkeley, 1961.
2. J. L. Tocher, "Analysis of Plate Bending Using Triangular Elements", Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Engng, Univ. of California, Berkeley, 1962.
3. R. W. Clough and J. L. Tocher, "Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending," Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Ohio, 515-545, 1965.
4. G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, "Triangular element in plate bending-conforming and non-conforming solution," Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Ohio, 547-576, 1965.
5. B. Specht, "Modified shape functions for the three-node plate element passing the patch test," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26, 705-715, 1988.
6. B. M. Irons and K. J. Draper, "Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending," *AIAA J.*, 3, 961, 1965.
7. A. Razzaque, "Program for triangular bending elements with derivative smoothing", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 6, 333-343, 1973.
8. R. W. Clough and C. A. Felippa, "A refined quadrilateral element for the analysis of plate bending," Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech., Ohio, 399-440, 1968.
9. J. Torres, A. Samartin, V. Arroyo and J. Diaz Del Valle, "A C^1 finite element family for Kirchhoff plate bending," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23, 2005-2029, 1986.
10. J. H. Argyris, I. Fried and D. W. Scharpf, "The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method," *The Aeronaut. J. Royal Aeronaut. Soc.*, 72, 701-709, 1968.
11. K. Bell, "A refined triangular plate bending finite element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1, 29-45, 1969.
12. B.M.Irons, "A conforming quartic triangular element for Plate bending," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 1, 29-45, 1969.
13. W. Visser, "A refined mixed type plate bending element," *AIAA J.*, 7, 1801-1803, 1969.
14. L. S. D. Morley, "The triangular equilibrium element in the solution of plate bending problems," *The Aeronaut. Quart.*, 19, 149-169, 1968.
15. Z. M. Elias, "Duality in finite element methods," *J. Engng Mech. Div., ASCE* 94, 931-946, 1968.
16. T.H.H.Pian and P.Tong, "Basis of finite element methods for solid continua," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2, 73-83, 1970.
17. D. J. Allman, "A simple cubic displacement element for plate bending," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 10, 263-281, 1976.
18. L. R. Herrmann, "Finite element bending analysis for plates," *J. Engng Mech. Div., ASCE* 93, 13-26, 1967.
19. H. W. Loof, "The economical computation of stiffness of large structural elements," Symp. on the Use of Electronic Digital Computers in Structural Engng, Univ. of Newcastle, 1966.
20. J. L. Batoz and P. Lardeur, "A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 28, 533-560, 1989.
21. E. Hinton and H. C. Huang, "A family of quadrilateral Mindlin plate bending elements with substitute shear strain fields," *Computers and Structures*, 23, 409-431, 1986.
22. A. Tessler and T. J. R. Hughes, "An Improved treatment of Transverse shear in the Mindlin type four-node quadrilateral element," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 39, 311-335, 1983.
23. P. Tong, "A family of hybrid plate bending elements," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18, 1455-1468, 1982.
24. C.C. Wu, "Some Problems of a plate bending hybrid model with shear effect," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18, 755-764, 1982.
25. S. W. Lee and S. C. Wong, "Mixed formu-

- lation finite elements for Mindlin theory plate bending," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 18, 1297-1311, 1982.
26. J. D. Chieslar and A. Ghali, "A hybrid strain technique for finite element analysis of plate and shell," *Computers and Structures*, 24, 749-765, 1986.
 27. T. J. R. Hughes and L. P. Franca, "A mixed finite element formulation for Reissner-Mindlin plate theory: uniform convergence of all higher order spaces," *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 67, 223-240, 1988.
 28. O.C.Zienkiewicz and D. Lefebvre, "A robust triangular plate bending element of the reissner-Mindlin type," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26, 1169-1184, 1988.
 29. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, P. Papadopoulos and E. Onate, "Plate bending elements with discrete constraints: new triangular elements," *Computers and Structures*, 35, 502-522, 1990.
 30. P. G. Bergan, "Finite elements based on energy orthogonal functions," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 15, 1541-1555, 1980.
 31. G. Dhatt, L. Marcotte and Y. Matte, "A new triangular discrete Kirchhoff plate /shell element," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 23, 453-470, 1986.
 32. R. L. Spilker and N. J. Munir, "The hybrid stress model for thin plates," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 15, 1239-1260, 1980.
 33. Thomas J. R. Hughes, "*The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis.*" Prentice-Hall, 1987.
 34. A. F. Saleeb, T. Y. Chang and S. Yingyeunyoung, "A mixed formulation of C^0 -linear triangular plate shell element-the role of edge shear constraints," *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 26, 1101-1128, 1988.
 35. Seong Wook Cho, "*On Mixed-Interpolated General Shell Finite Elements for Nonlinear Analysis.*" Ph. D. Thesis, Dept. of Mechanical Engng, Massachusetts Institute of Technology, 1990.

(접수일자 : 1992. 4. 7)