

정수압을 받는 축대칭 절두체 원추형 압력용기의 응력해석

백 태 현*, 정 태 진*, 이 종 길*

Stress Analysis of a Hydrostatically Pressurized Frustum of Axisymmetric Conical Pressure Vessel

Tae-Hyun Baek*, Tae-Jin Chung*, Jong-Kil Lee*

ABSTRACT

Theoretical equations for hoop stress, longitudinal or meridian stress and Von Mises stress of an axisymmetric conical pressure vessel and a frustum of conical pressure vessel, both of which are pressuized by hydrostatic loading, are derived from equilibrium equations. The membrane stresses computed by theoretical equations for a conical pressure vessel and a frustum of conical pressure vessel are compared with the values obtained from finite element method. Based on the fact that the computational values by theoretical equations are well agreed with the finite element results, derived equations are proved to be valid and it is possible for those equations to be conveniently used for structural analysis or design of frustum of conical pressure vessel which is a part of silo body.

1. 서 론

축대칭 원추형 압력용기(Conical Shell Pressure Vessel)는 화력발전소의 석탄저장용 사일로(Silo)⁽¹⁾, 시멘트 배합물 저장 사일로 등의 부분적인 구조물로서 공학적으로 많이 이용되고 있다. 이와같은 구조물은 전체 체적에 비하여 두께가 얇은 경우가 대부분이므로 판의 굽힘효과를 무시하고 막응력(Membrane Stresses)만을 고려하는 경우가 대부분이다. 일반적으로 박판으로 설계 및 제작된 축대칭 원통형 구조물에 대해서는 하중조건에 따라 좌굴(Buckling)에 대한 위험⁽²⁾도 고려하여야 할 뿐 아니라, 기본적으로 구조물 분석을 정확히 하기 위해서는 각각의 위치에서 응력상태를 계산할 수 있어야 한다.

근래에는 구조해석 및 각종 공학 계산용으로 여러종

류의 유한요소 프로그램이 보급되어 편리하게 사용되고 있으며, 이론적인 식에 의하지 않고서라도 적합한 유한요소모델링과 입력자료에 따라 이론치에 근접한 값을 얻을 수 있게 되었다. 따라서 경우에 따라 이론 또는 실험식은 유한요소 해석을 의하여 입증될 수 있으며, 반대의 경우도 성립되어야 한다.

본 논문에서는 정수압을 받는 박판의 축대칭 원추형 압력용기에 대하여 막응력 해석에 관한 사항을 이론적으로 정리^(3,4)하고, 더 나아가 사일로의 하부구조물로서 흔히 사용되는 절두체 원추형 압력용기(Frustum of a Conical Pressure Vessel)에 대해서 막응력 성분에 관한 이론적인 식을 유도하였다. 위의 두 경우 모두에 있어서, 이론식의 타당성을 입증하기 위하여 유한요소 해석 결과와 비교하였다.

* 군산대학교 기계설계학과(정회원)

2. 이론해석

그림1과 같이 내부압력 p 를 받는 축대칭 원통형 박판 셸에서 자오선 또는 길이 방향의 곡율을 R_r , 원주방향의 곡율을 R 라고 하면, 막응력 성분인 원주방향 응력 (σ_r) 및 길이방향 응력 (σ_t)은 그림 2의 상세도와 같이 나타낼 수 있다. 그림 2를 참고로 하여 법선방향에 대한 평형방정식을 취하면 다음의 식(1)과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} \Sigma F_n = 0 ; \\ p(R_t d\theta_t)(R_m d\theta_m) - 2\sigma_r(R_m d\theta_m)(t)(\sin \frac{d\theta_t}{2}) \\ - 2\sigma_t(R_t d\theta_t)(t)(\sin \frac{d\theta_m}{2}) \\ = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

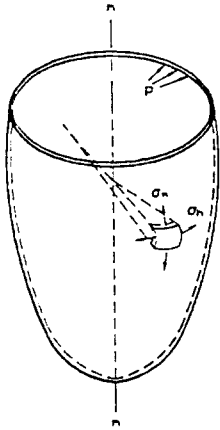


Fig.1 Thin-walled axisymmetric shell subject to internal pressure.

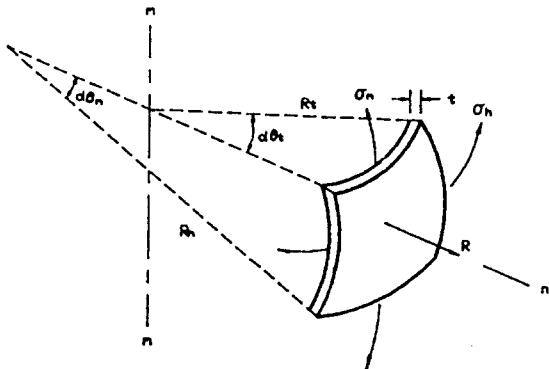


Fig.2 Membrane stress components of thin-walled axisymmetric shell.

응력을 받는 요소가 미소하다고 가정하면

$$\sin \frac{d\theta_m}{2} \approx \frac{d\theta_m}{2}, \quad \sin \frac{d\theta_t}{2} \approx \frac{d\theta_t}{2} \quad (2)$$

따라서, 식(2)를 식(1)에 대입한후 다시 식(1)을 ($R_r \cdot R_r$) ($d\theta_r \cdot d\theta_r$)으로 나누면 원통형 셸에 대해서 다음과 같이 셸의 두께 (t), 내압 (p) 및 막응력 사이 (σ_r, σ_t)의 일반적인 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{\sigma_h}{R_t} + \frac{\sigma_m}{R_m} = \frac{p}{t} \quad (3)$$

다음으로 그림 3과 같이 상단이 고정되고 비중량이 γ 인 액체로 채워진 축대칭 원추형 압력용기에 대해서 응력 상태를 고찰하기로 한다.

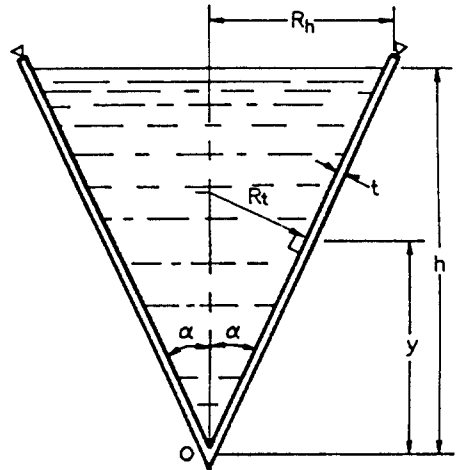


Fig.3 Thin-walled conical shell subject to hydrostatic loading.

위의 같이 원추형 압력용기인 경우 길이 방향의 반경은 무한대, 즉 $R_r \rightarrow \infty$ 가 되므로 식(3)은 다음과 같이 간단한 식으로 약하여 쓸 수 있다.

$$\sigma_h = \frac{pR_t}{t} \quad (4)$$

위의 그림 3에서 원추의 정점 0로부터의 높이 y 와 원주방향의 곡율 반경 R_r 의 관계는 기하학적인 관계에 따라

$$R_t = \frac{y \tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (5)$$

정점 0로부터의 높이 y 인 지점에서 정수압 p 는

$$p_y = \gamma (h-y) \quad (6)$$

위의 식 (5)와 (6)을 식(4)에 대입하면 아래의 식 (7)과 같이 원추정점 0로 부터 높이 y와 원주방향 응력 사이의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\sigma_h = \frac{\gamma(h-y)y}{t} \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \right) \quad (7)$$

식(7)을 y에 대하여 미분한후 미분한 식을 영으로 취하면, 다음의 식(8)과 같이 y=h/2에서 원주방향의 막응력에 대한 최대값을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{h,max} = \frac{\gamma h^2 \tan \alpha}{4 t \cos \alpha} \quad (8)$$

다음으로, 길이방향의 막응력을 얻기 위하여 원추정점 0로 부터 높이 y인 절단면 에서 그림 4와 같이 자유물체도를 취한다. 길이방향, 즉 축 m-m 방향에 대한 평방방정식은 아래의 식(9)와 같다.

$$\Sigma F_m = 0 ; \quad (\sigma_m \cos \alpha)(2\pi R_y t) - p\pi R_y^2 - W = 0 \quad (9)$$

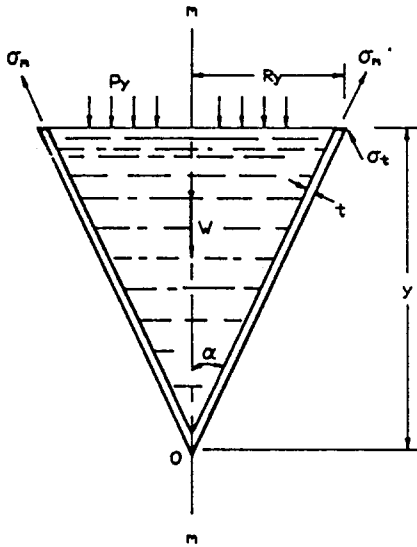


Fig.4 Free body diagram of a conical shell cut at y from an apex O.

그림 4에서와 같은 기하학적인 관계에 따라 절단면의 반지름 R_y는

$$R_y = y \tan \alpha \quad (10)$$

또한 자유물체도로 나타낸 체적의 총 중량 W는

$$W = \frac{1}{3} \gamma \pi (y \tan \alpha)^2 h \quad (11)$$

식(6), (10) 및 (11)을 식(9)에 대입하여 정리하면

$$\sigma_m t \cos \alpha (2\pi y \tan \alpha) = \gamma \pi y^2 \tan^2 \alpha \left(h - y + \frac{y}{3} \right) \quad (12)$$

위의 식 (12)를 σ_m 에 대해서 정리하면

$$\sigma_m = \gamma \frac{y(h - \frac{2}{3}y)}{2t} \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (13)$$

σ_m 에 대한 최대값을 얻기위하여 식(13)을 y로 미분한 후에 이 값을 영으로 하면 y=3h/4에서 다음의 식(14)와 같이 σ_m 의 최대값, 즉 $\sigma_{m,max}$ 를 구할 수 있다.

$$\sigma_{m,max} = \frac{3\gamma h^2}{16t} \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (14)$$

또한 판의 파손조건(Failure Criteria)을 판별하기 위하여 Von Mises응력, 즉 등가응력(Equivalent Stress) σ_e 를 구하면

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_t - \sigma_m)^2 + (\sigma_m - p_y)^2 + (p_y - \sigma_t)^2} \quad (15)$$

σ_m 에 대해서는 식(7)을, σ_t 과 P_y 에 대해서는 식(13)과 식(6)을 각각 식(15)에 대입하면 높이 y인 지점에서 등가응력을 계산할 수 있다.

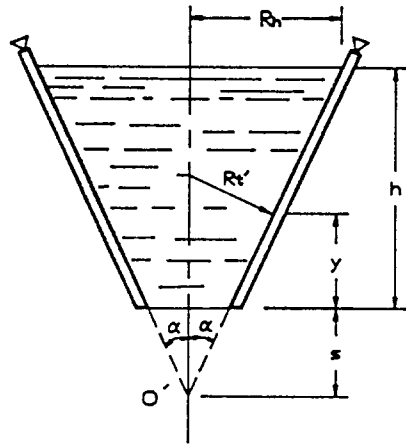


Fig.5 Frustum of conical shell subject to hydrostatic loading.

다음으로 위와 같은 관계식을 적용하여 그림 5와 같은 원추형 절두체에 대한 막응력을 구하기로 한다. 원추형 절두체의 높이가 h이고, 가상의 원추 정점 0로

부터 (s+y)인 지점의 접선응력 σ_t '는 식(7)에서와 같이 최대칭 원뿔형 셸에 대한 기본식(3)으로 부터 시작한다. 즉 R_m 은 무한대 이므로 식(4), (5) 및 (6)과 같은 과정을 거쳐 아래의 식과 같이 유도될 수 있다.

$$\sigma_{h'} = \frac{\gamma(h-y)(s+y)}{t} \frac{\tan \alpha}{\cos \alpha} \quad (16)$$

길이 방향의 응력 σ_m '는 그림 6에서 가상의 원추 정점 0로 부터 높이(s+y)인 지점을 절단한 자유물체도로 부터 다음의 식과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma_m \cdot (2\pi R_y) t - \left\{ p_y \pi R_y^2 + \frac{1}{3} \gamma h (R_y^2 + R_m^2 + R_y R_m) - p_m \pi R_m^2 \right\} \cos \alpha = 0 \quad (17)$$

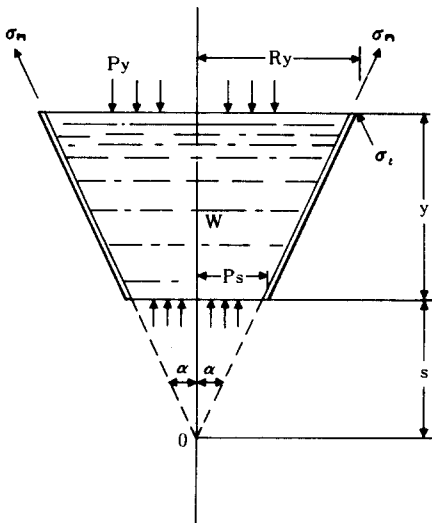


Fig. 6 Free body diagram of frustum of conical shell cut at (s+y) from an apex O'.

따라서 원추형 절두체의 길이 방향 응력 σ_m '는

$$\sigma_m' = \frac{1}{2 R_y t} \left\{ p_y \cdot R_y^2 + \frac{1}{3} \gamma h (R_y^2 + R_m^2 + R_y R_m) - p_m R_m^2 \right\} \cos \alpha \quad (18)$$

위의 식(18)에서 나타낸 각각의 기호는 다음과 같다.

$$p_y = \gamma (h-y) \quad (18-1)$$

$$p_m = \gamma h \quad (18-2)$$

$$R_y = (s+y) (\tan \alpha) \quad (18-3)$$

$$R_m = s (\tan \alpha) \quad (18-4)$$

원추형 절두체 압력용기에 대한 등가응력은 식(17), (18) 및 (18-1)을 식(16)에 대입하여 다음의 식(19)와 같이 얻을 수 있다.

$$\sigma_e' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{h'} - \sigma_m')^2 + (\sigma_m' - p_y')^2 + (p_y' - \sigma_{h'})^2} \quad (19)$$

3. 원추형 압력용기의 유한요소(FEM) 모델

정수압을 받는 최대칭 원추형 압력용기를 유한요소 프로그램⁽⁵⁾으로 해석하기 위하여 그림 3에 나타난 원추형 용기를 대칭조건을 고려하여 그림 7과 같이 1/4부분만을 택하였으며, 300개의 요소로 분할한 후에 해석하였다. 유한요소 모델에 사용된 요소는 사변형 셸 요소(Quadrilateral Shell Element)이며 박막응력(Membrane Stress)만을 고려하였다. 그림 7의 FEM 모델에 사용된 입력 및 물성 자료는 표1과 같다. 표1에서 E는 박판셸 재료의 탄성계수(Young's Modulus), ν 는 포와송 비(Poisson's Ratio)이며 기타 다른치수 및 각도에 관한 기호는 그림 3에 따른다.

Table 1. Geometrical dimensions and material properties of FEM model for conical shell subject to hydrostatic loading.

기 호	입력자료	기 호	입력자료
R_m	325cm	h	942.3cm
α	19.03°	γ	1.2×10 ⁻⁶ ton/cm ³
E	2100 ton/cm ²	ν	0.3
t	1cm		

그림 8은 그림 7이 FEM해석에 의하여 변형된 형상을 나타낸다. 위의 유한요소 모델을 분석한 후, 높이 변화에, 다른 박막응력 σ_m , σ_t 및 σ_e 의 이론해와 유한요소 분석결과는 그림 9, 10 및 11과 같이 전체적으로 잘 일치하였다. 그림 3에서 전체높이(h)에 대한 원추정점 0로부터 높이(y)의 비율, $y/h=0, 0.25, 0.50, 0.75$ 및 1.0에 대해서 식(7), (13) 및 (15)에 의한 계산치와 유한요소 해석결과를 수치적으로 비교한 결과는 다음의 표 2와 같다.

Table 2. Comparison table of theoretical values and FEM results for membrane stress components vs. height of conical shell subject to hydrostatic loading.

y/h	y (cm)	σ_{θ} (ton/cm ²)		σ_{ϕ} (ton/cm ²)		σ_r (ton/cm ²)	
		Eq. (7)	FEM	Eq. (13)	FEM	Eq. (15)	FEM
0	0	0	0.0046	0	0.0037	0	0.0084
0.25	235.6	0.0729	0.0721	0.0362	0.0361	0.0631	0.0634
0.50	472.2	0.0972*	0.0960	0.0579	0.0576	0.0847*	0.0855
0.75	706.7	0.0729	0.0720	0.0651*	0.0647	0.0693	0.0726
1.0	942.3	0	0.0198	0.0579	0.0594	0.0579	0.0590

주기 : *표시된 값은 이론적으로 계산한 최대치임.

각각의 응력에 대해서 계산결과를 살펴보면, 접선응력 (σ_{θ})의 최대치는 식 (8), 그림 9 및 표 2에서와 같이 $y/h=0.50$ 에서 발생되었으며, 이론치와 FEM의 계산결과는 1.2%이내로 일치하였다. 또한 길이 방향 응력 (σ_{ϕ})의 최대치는 식 (14), 그림 10 및 표 2에서와 같이 $y/h=0.75$ 에서 발생되었으며 이론치와 유한요소 계산치의 차이는 0.6%이고, 등가응력 (σ_e)의 그림 11 및 표 2에서와 같이 $y/h=0.50$ 에서 발생되고 역시 이론과 FEM 값이 1%이내로 일치하였다. 이와 같이 이론치와 FEM 계산치의 차이는 공학적인 구조 설계시 허용될 수 있는 범위 이내이며, 필요에 따라 차이를 줄이기 위해서는 유한요소 모델링 시에 요소수를 증가시키면 된다.

그러나, 원주방향응력은 그림 9에서 보인바와 같이 상단의 고정부위에서 이론식의 값과 유한요소 계산치가 서로 상이하게 나타났다. 서로 다르게 나타난 이유를 살펴보면, 이론해의 경계조건은 그림 3과 같이 길이 방향으로만 고정되어 있는 반면 유한 요소모델에서는 상단부위를 모든 방향을 고정하였기 때문에 서로 일치하지 않은 것으로 분석되었다. 그러나 길이 방향의 응력은 그림 10에서와 같이 모든 위치에서 이론치와 유한요소 계산치가 서로 잘 일치하였다. 등가응력에 대해서는 그림 11에서 보인바와 같이 상단부에서 차이가 나타났으며, 그 이유는 위에서 언급한 바와 같이 상단부에서 원주방향응력에 대한 이론치와 유한요소에 의한 해석결과가 서로 상이하기 때문인것으로 간주된다.

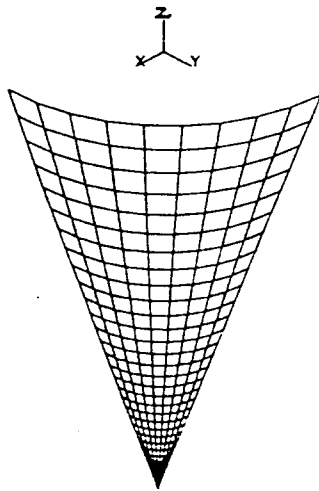


Fig.7 FEM model for conical shell subject to hydrostatic loading.

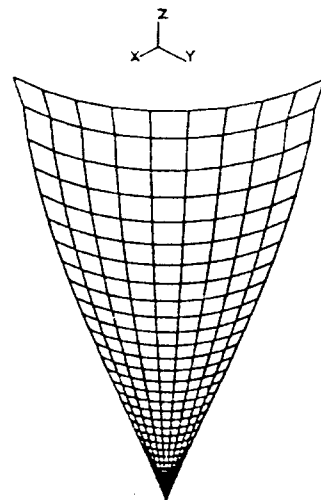


Fig.8 Deformed shape of conical shell subject to hydrostatic loading.

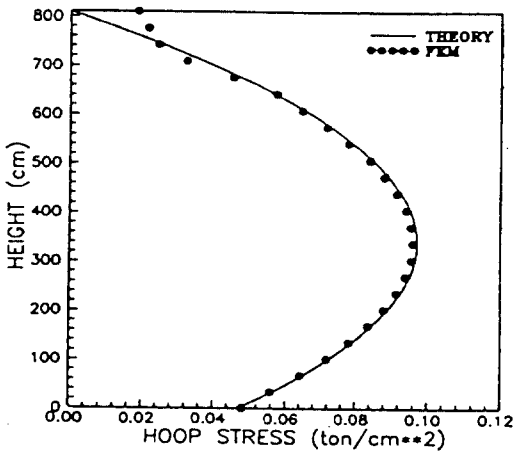


Fig. 9 Hoop stress(σ_h) variation vs. height of conical shell subject to hydrostatic loading.

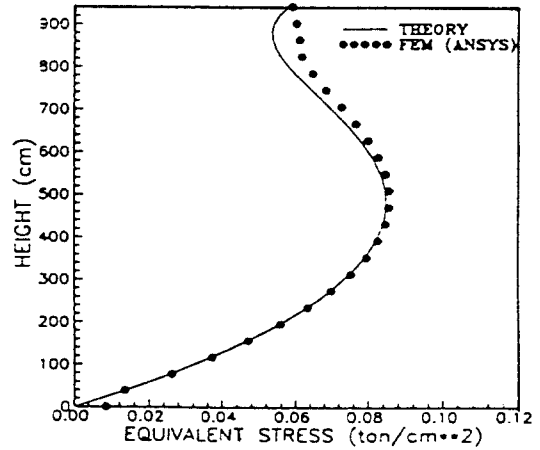


Fig. 11 Equivalent stress(Von-Mises stress; σ_e) variation vs. height of conical shell subject to hydrostatic loading

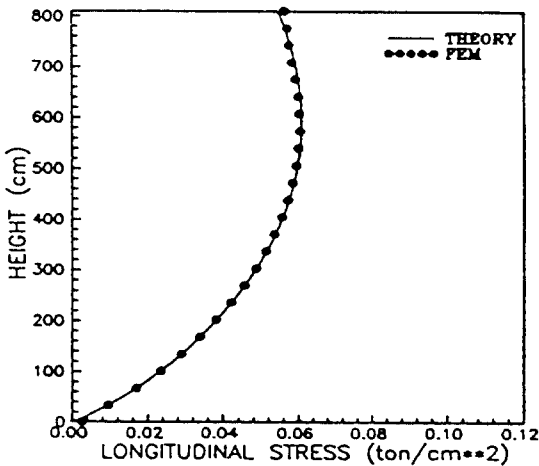


Fig. 10 Longitudinal stress(σ_L) variation vs. height of conical shell subject to hydrostatic loading.

높이 변화에 따른 정수압의 변화가 그림 12와 같이 벡터표시로 가시화 되어 있다. 그림 13은 유한요소 해석에 의하여 절두체 원추형 압력용기가 정수압을 받을때 변형된 형상을 나타낸다. 유한요소에서 사용된 원추형 절두체 압력용기에 대한 물성 및 입력자료는 표 3과 같다. 표 3에서 각각의 기호는 그림 5에 표시된 기호에 따르며, E는 탄성계수를 나타내고 ν 는 포와송비를 의미한다.

Table 3. Geometrical dimensions and material properties of FEM model for conical shell subject to hydrostatic loading.

기 호	입력자료	기 호	입력자료
R_o	325cm	R	45.7cm
a	19.03°	h	809.8cm
E	2100 ton/cm ²	r	1.2×10^{-6} ton/cm ²
t	1cm	ν	0.3

4. 절두체 원추형 압력용기의 유한요소 모델

절두체 원추형 압력용기가 정수압을 받을때, 유한요소 모델은 기본적으로 원추형압력용기의 유한요소 모델과 동일하게 사변형 쉘 요소를 사용하였으며 박막응력만을 고려하였다. 대칭조건에 의하여 절두체 원추형 압력용기의 1/2만을 택하였으며, 입력자료를 확인할 수 있도록

정수압을 받는 절두체 원추형 압력용기의 박막응력, 즉 σ_h , σ_m 및 σ_e 에 대한 이론식은 2절에서 유도된 식 (16), (18) 및 식(19)를 사용하였으며, 이론식과 유한요소 분석결과는 그림 14, 15 및 그림 16에 보인바와 같이 전체적으로 잘 일치하였다. 그러나, 상단 고정부위에서 원주방향응력 및 등가응력은 그림 14 및 그림 16

에서 보인바와 같이 고정부의 경계조건이 상이하여 이론과 유한요소 결과 사이에 부분적으로 차이가 발생하였다. 정수압을 받는 절두체 압력용기의 높이 변화에 따른 원주방향응력, 길이방향응력 및 동가응력에 대한 수치결과는 표 4와 같다.

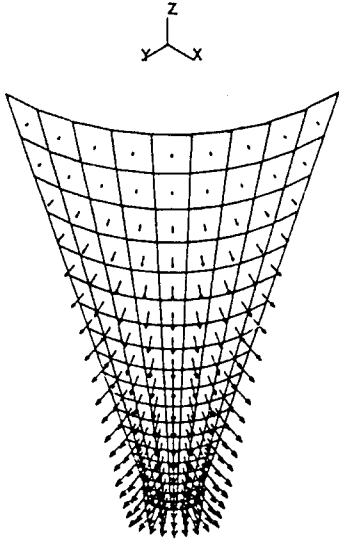


Fig. 12 Hydrostatic pressure variation vs. height of frustum of conical shell subject to hydrostatic loading.

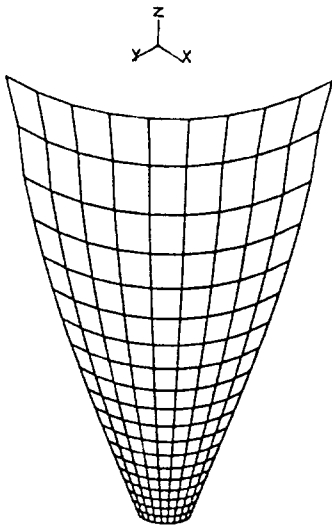


Fig. 13 Deformed shape of frustum of conical shell subject to hydrostatic loading.

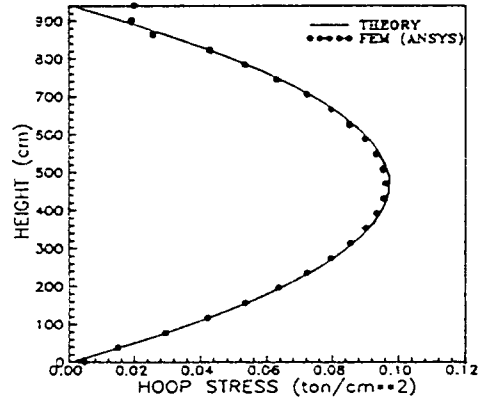


Fig. 14 Hoop stress (σ_{θ}) variation vs. height of frustum of conical shell subject to hydrostatic loading.

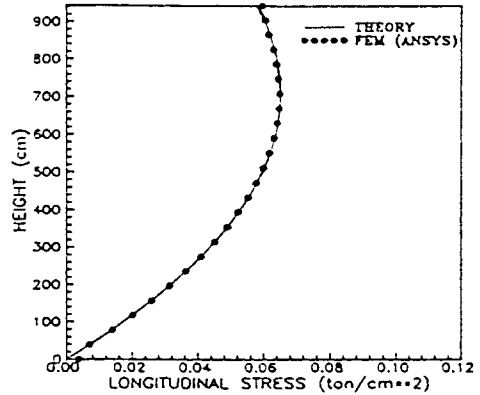


Fig. 15 Longitudinal stress (σ_z) variation vs. height of frustum of conical shell subject to hydrostatic loading.

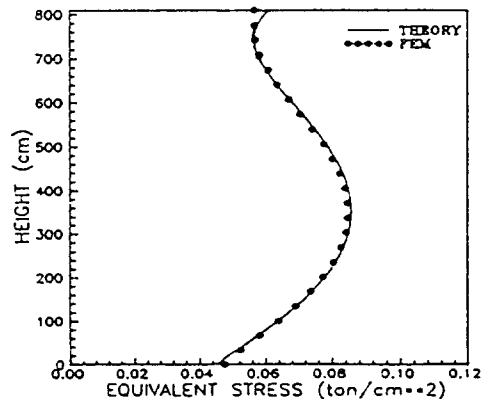


Fig. 16 Equivalent stress (Von-Mises stress; σ_v) variation vs. height of frustum of conical shell subject to hydrostatic loading.

Table 4. Comparison table of theoretical values and FEM results for membrane stress components vs. height of frustum conical shell subject to hydrostatic loading.

$\left(\frac{y+s}{h+s}\right)^{*1}$	y (cm)	σ_n' (ton/cm ²)		σ_m' (ton/cm ²)		σ_e' (ton/cm ²)	
		Eq. (16)	FEM	Eq. (18)	FEM	Eq. (19)	FEM
0.14	0	0.0470	0.0481	0	0.0026	0.0447	0.0474
0.25	101.2	0.0725	0.0717	0.0234	0.0234	0.0637	0.0637
0.50	337.4	0.0972 ^{*2}	0.0960	0.0516	0.0513	0.0855	0.0845
0.75	573.6	0.0730	0.0716	0.0610 ^{*2}	0.0605	0.0710	0.0702
1.0	809.8	0	0.0188	0.0548	0.0566	0.0607	0.0536

* 주기: 1. S=132.5cm이며 기호는 그림 5를 참고할 것.
 2. *표시된 값은 이론적으로 계산한 최대치임.

6. 결 론

참고문헌

본 연구를 통하여 정수압을 받는 절두체 원추형 압력용기의 박막응력에 관한 이론식을 평행방정식을 이용하여 식(16), (18) 및 (19)와 같이 유도하였다. 이와같이 유도된 이론식의 타당성을 입증하기 위하여 단순한 원추형 압력용기에 관한 이론식⁽³⁻⁴⁾ (7) (13) 및 (15)를 이용한 계산결과와 유한요소 해석을 비교하였으며, 표 2에서와 동일한 결과가 됨을 확인하였다. 또한 절두체 원추형 모델에 대해서도 표 4의 계산결과와 같이 유도된 이론식과 유한요소 해석결과는 서로 잘 일치하였다. 따라서 본 연구에서 유도된 식(16), (18) 및 (19)는 사일로 등을 구성하고 있는 절두체 원추형 압력용기의 박막응력(σ_n' , σ_m' 및 σ_e') 계산에 직접 응용할 수 있다.

한편으로 표 4의 계산 결과와 같이 절두체 원추형 압력용기의 원주응력(σ_n') 및 Von-Mises 응력 또는 등가응력(σ_e')은 원추형 압력용기에서와 마찬가지로 절두체 원추 연결선상의 가상 정점으로 부터 1/2높이에서 최대값이 되었으며, 길이방향 응력(σ_m')은 가상 정점으로 부터 1/3높이에서 최대값이 되었다.

1. 정태진, 백태현, 홍동표, 이종길, "삼천포 화력발전소 후속기(#3, #4호기)요 Coal Silo 구조제산", 기술보고서 KNU-ERI-91051, 군산대학 공학연구소(1991. 5)
2. 이영신, 조원만, "압력용기의 도움형상 설계", 대한기계학회 논문집, 제15권, 제3호(1991), pp. 1057~1062.
3. A. C. Ugral, Stresses in Plates and Shells, McGraw-Hill Books Inc. (1981), pp. 205~214
4. Joseph H. Faupel and Franklin E. Fisher, Engineering Design, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc. (1981), pp. 217~220.
5. ANSYS, Engineering Analysis System, Theoretical and Verification Manual, Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, Pennsylvania (1989. 8)

* 본 논문은 강원산업(주) 삼표제작의 연구지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.