

스파이럴 베벨기어의 전동오차 해석에 관한 연구

신 귀 수*, 이 기 형*, 채 희 창**, 정 인 성***

A Study on the Analysis of Transmission Errors of Spiral Bevel Gears

Gue-Su Shin*, Kee-Hyung Lee*, Hee-Chang Chae**, In-Sung Chung**

ABSTRACT

The most important criteria of quality of meshing and contact of gears are the low level of noise and the sufficient dimensions and location of the contact.

A new approach for determination of machine-tool settings for spiral bevel gears is proposed. The proposed settings provide a function of transmission errors, the desired location and orientation of contact. The function is able to absorb piece-wise linear functions of transmission errors that are caused by the gear misalignment and to reduce the gear noise.

The determination of pinion machine-tool settings is based on the local synthesis of gears. A computer program for simulation of meshing bearing contact and determination of transmission errors for misaligned has been developed.

1. 서 론

전동장치인 치차는 현대산업사회의 발달과 더불어 많은 기계요소를 구성하고 있다. 전동치차는 단순히 양수 펌프와 터빈 제분소에서부터 자동차, 헬리콥터, 선박에 이르기까지 수세기를 통해 변천, 발전해 오고 있다. 기계요소의 설계에 있어서 단순한 공학적 이론 해석만으로는 최적의 설계값을 결정할 수 있는 요소는 극히 일부이다. 치차장치를 비롯한 대부분의 요소에서 강도, 안전계수, 물림률등 많은 영향 인자를 고려하여 실험적, 경험적 자료들과 설계 계산식을 통하여 최적값을 구한다는 것은 많은 시간이 요구되며 또한 쉬운 일이 아니다.

또한 기어 구동상의 운동학적 오차인 접촉점의 변화에 의한 곡면의 복잡성과 피동기어 회전각의 실제와 이

론값 차이에 의한 수학적 어려움 등은 본 연구를 수행하는데 있어서 어려운 문제점이었다.

동력 전달에 가장 많이 사용되는 치차장치는 컴퓨터의 발달에 따라서 F. Litvin⁽¹⁾, G. Cockerham⁽²⁾, M. Savage⁽³⁾, T. W. Lee⁽⁴⁾, 정 태형⁽⁵⁻⁶⁾, 박 천경⁽⁷⁾ 등이 치차설계의 전산화를 발표하였다.

맞물림 정밀도와 기어 접촉의 중요한 기준이 되는 것은 저 수준 소음 및 구름 접촉의 정확한 위치와 치수인데 때때로 이런 사항들이 상반되지만 기어 해석과정의 절충으로 달성될 수 있다. 이와 같은 사실을 고려하여 동력 전달오차가 작은 스파이럴 베벨기어의 최적 치면 접촉 설계법을 개발하고자 한다.

베벨기어는 Gleason의 스파이럴 베벨기어가 비공액 치 곡면에 따라 설계되고 생산되는 것으로 가정하였다. 공작기계의 설치가 바깥에 의하여 발생하는 전동오차는

* 전북대학교 기계공학과 대학원

** 정희원, 전북대학교 공과대학 (정희원)

국부적 선형함수, S곡선, 포물선함수, 대칭 혹은 다른 형태가 될 수 있다.

본 연구에서 언급하는 문제점은 기어 지연(lagging)에 따른 전동오차 함수의 적합 정도를 감소시키기가 매우 어렵다는 것이다. 따라서, 본 연구에서는 이런 문제들을 해결하기 위해, 수학적 모델링과 운동학적 관계를 고려한 전동오차를 해석하여 스파이럴 베벨기어 창성의 최적 설계를 위한 컴퓨터 프로그램을 작성한후 전동오차 계산에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

치접촉 해석 프로그램을 사용하고 맞물리는 스파이럴 베벨기어들이 1사이클의 맞물림 동안 매우 작은 감소 혹은 증가 전동오차를 갖도록 할 수 있다.

일반적으로 피니언 회전각 증가에 따른 기어 맞물림 전동오차의 주기적인 곡선은 선형 혹은 거의 선형인 함수들로 간주할 수 있다. (Fig. 1) 기어의 비정렬(misalignment)로 인하여 구름 접촉점은 위치와 치수 조절이 필요하다. 포물선 함수의 전동오차들을 가지고 회전을 변환하는 비공액 쌍들로써 기어를 설계하면 이와 같은 목표들을 달성할 수 있다. 그러면 선형함수의 전동오차들이 흡수되고 비정렬로 인한 기어의 민감도를 감소시킬 수 있다.

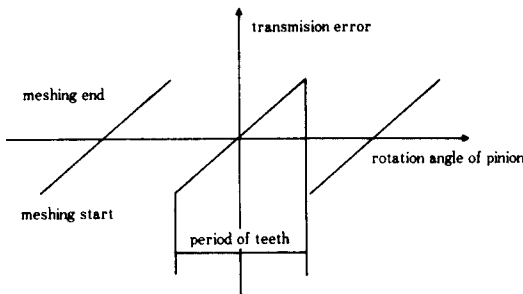


Fig.1 Transmission errors of conjugate gears caused by misalignment

2. 스파이럴 베벨기어 곡면 생성의 고찰

2-1. 전동오차와 전동오차의 보정

Litvin^(8, 9, 10)에 의해 제안된 피니언 공작기계 설치의 결정은 기어의 공간적 치면 구성에 관한 연구인데, 이것은 다음과 같은 필요조건을 만족해야 한다.

1. 기어 곡면은 선택하는 곳에서 평균 접촉점에서 접한다.

2. 접촉로의 접선은 평균 접촉점에서 정의된 방향을 갖는다.
3. 치 곡면에 대한 접촉타원은 평균 접촉점에서 요구된 치수를 갖는다.
4. 전달함수 $\phi_2(\phi_1)$ 는 평균 접촉점에서 정의된 함수를 갖고 이 함수의 이차 도함수는 기어 볼록면에서 (-)이고, 오목면에서 (+)이다.

여기서, ϕ_1 과 ϕ_2 는 절삭이 진행되는 동안 피니언1과 기어2의 회전각이다.

이론적으로 맞물리는 한쌍의 기어는 일정한 기어비 m_{21} 에 따라 회전을 전달한다.

$$m_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (1)$$

여기서, ω_1 과 ω_2 은 기어의 각속도, N_1 과 N_2 은 피니언1과 기어2의 잇수이다.

그러므로, 이상적인 기어 전동함수 $\phi_2(\phi_1)$ 은 다음과 같은 선형화가 예상된다.

$$\hat{\phi}'_2(\phi'_1) = (N_1 / N_2) \phi'_1 \quad (2)$$

여기서, ϕ_1 는 회전각이다.

그러나, 실제전동함수 $\phi_2(\phi_1)$ 는 이상전동함수 $\hat{\phi}_2(\phi_1)$ 와 평균 접촉점 이외에서 언제나 다르다. 따라서 전동오차 $\Delta\phi_2(\phi_1)$ 는 다음과 같이 실제적 및 이론적인 전동함수의 차이로 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta\phi'_2(\phi'_1) &= \phi'_2(\phi'_1) - \hat{\phi}'_2(\phi'_1) \\ &= \phi'_2(\phi'_1) - (N_1 / N_2) \phi'_1 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $\phi_2(\phi_1)$ 과 $\hat{\phi}_2(\phi_1)$ 는 한쌍의 맞물리는 기어들에서 피니언의 회전각으로 기어의 회전각을 나타낸 실제 및 이론적 전동함수이다.

전동오차의 발생 원인은 다음과 같이 네가지로 볼 수가 있다.

- ① 기어는 창성방법 때문에 식(2)로 정의한 회전을 정확하게 전달하지 못한다. Gleason법으로 창성된 스파이럴 베벨기어와 하이포이드 기어가 좋은 예이다.
- ② 기어 축선은 엇갈리고 기어 축은 변동된다. Zhang⁽¹¹⁾은 그의 논문에서 변동된 기어 축(shaft)들이 엇갈린 기어 축선(axes)들로 모델화할 수 있었음을 증명하였다.
- ③ 실제 기어면의 열처리 편차는 기어면 비틀림의 중

요한 인자들 중의 하나이다.

④ 적용 하중하의 기어 치 곡면의 탄성 변형

본 연구에서는 위에서 언급한 ①과 ②를 전동오차의 중요 인자로하여 연구하였다. 비정렬 상태에서 물리고 있는 한쌍의 기어에 대한 전동오차 $\Delta\phi_2(\phi_1)$ 는 Fig. 2 처럼 각각의 물림 사이클에 대해서 선형이거나 거의 선형인 불연속 piece-wise 함수이다. 즉, 실제 엇갈림에 의한 치 물림 접촉의 불균일성으로 전동오차가 발생함을 보여주는 것이다. 식(3)에서 결정된 전동오차 역시 대체적으로 piece-wise 선형함수이다.

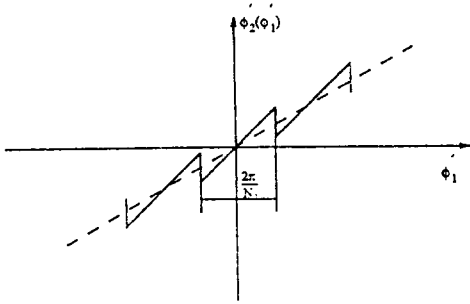


Fig. 2 Transmission functions of gears under misalignment

2-2. Gleason 시스템의 개요

Gleason은 미국내의 베벨과 하이포이드 기어 생산장치를 만드는 회사로써, 스파이럴 베벨기어를 만들기 위한 기계장치를 개발하였다. 세가지 중요 부분으로 구성된 절삭기의 기본적인 구조는 프레임, 크래들 및 미끄럼대다. 절삭이 시작될 때 작업물은 커터에 물리고, 커터가 블랭크를 통해 회전할 때, 상대 회전운동은 치 곡면을 만들기 위한 크래들과 작업 스피들 사이에서 산출되어진다. 작업물을 올려 놓는 미끄럼대는 커터에 관하여 전달되고, 작업물은 다른 치를 절삭하는 경우에 대해서 앞으로 지정된다. 이 작동절차는 다음 치를 절삭할 때까지 반복된다⁽¹²⁻¹³⁾.

절삭과정에 있어서 헤드 커터는 자체축으로 회전하고, 이 축은 크래들 좌표계로 산출되며 곡면은 원통곡면이다. 그러므로 크라운 래상의 기어 회전운동에 대응된다. 이 축에 관한 헤드 커터는 각속도는 창성운동에 따라서 관계되지 않고, 오직 요구하는 절삭속도에만 관계한다. 이러한 것들이 Gleason 생산 방법의 중요한 잇점이 되고 있는 것이다. 또 다른 잇점은 창성에 대하

여 같은 방법인 그래인딩에서도 마찬가지로 사용할 수 있다는 것이다. 그래인딩은 고 강도 치 곡면과 고 품질 기어를 생산하는데 필수적이다.

커터 날은 커터가 커터축을 회전하는 동안 원추곡면을 만드는데, Fig. 3은 만들어지는 두 원추곡면을 보여 주고 있다.

주곡률과 주방향에 대한 특성행렬은

$$\begin{aligned} \frac{0}{-\cos \psi du} &= \frac{\pm \cos \psi \cos \theta d\theta}{\sin \psi (\sin \theta du + u \cos \theta d\theta)} \\ &= \frac{\cos \psi \cos \theta d\theta}{\sin \psi (\cos \theta du - u \sin \theta d\theta)} = -\kappa_{II} \end{aligned} \quad (4)$$

이고,

주곡률 k_I, k_{II} 는

$$k_I = \frac{1}{u \tan \psi} \quad (5)$$

$$k_{II} = 0 \quad (6)$$

가 된다.

여기서, ψ 는 블레이드 각, u 는 원추면의 면좌표, θ 는 원추면과 회전면의 면좌표, k_I, k_{II} 는 주곡률이다.

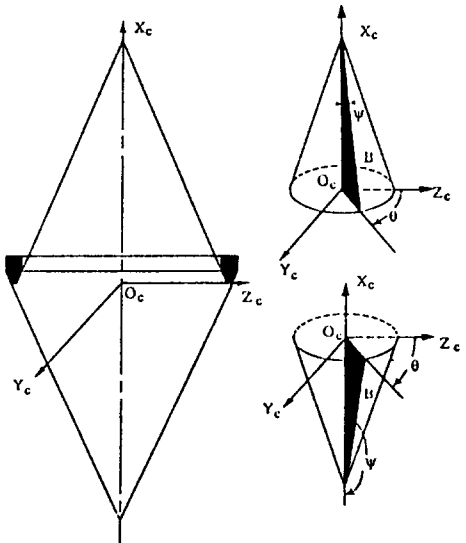


Fig. 3 Generated cone surfaces of the head-cutter

2-3. 좌표계와 부호

이가 왼쪽 방향으로 비틀리는(왼쪽 방향) 기어 구성

요소는 헤드 커터를 옮기는 크래들의 반시계 방향운동에 의해 절삭된다. 이 운동은 크래들 전면과 작업 스펀들의 뒷쪽으로부터 관측된다. Fig. 4는 왼쪽 방향 기어의 윗면과 전면을 나타낸다.

이가 오른쪽 방향으로 비틀리는(오른쪽 방향) 기어 구성요소는 보통 절삭되는 왼쪽 방향 기어 구성요소들의 운동에 반대인 운동에 의해 절삭된다. Fig. 5는 이 경우에 대한 기어의 윗면과 전면을 나타낸다.

우리는 각 경우에서 5개의 좌표계를 설정한다. 좌표계 S.는 헤드 커터에 부착되고, 좌표계 S.는 가공물에 부착되며, 좌표계 S., S., 및 S.는 프레임에 부착된다. 축 Z.과 Z.는 각각 이 뿌리선과 피치선에 일치한다. 축 X.은 가공물의 뿌리원추의 모선(generator)에 수직하다. 축 X.는 가공물의 피치원추의 모선에 수직하다. 축 Z.와 Z.는 일치한다. 원점 O.은 기계중심에 일치하고, 원점 O.와 O.는 가공물의 피치원추의 꼭지점에 위치한다.

3개의 특별한 동작기계 설치인 기계웁셋, 기계 중심에서 끝 및 미끄럼대들은 피니언 창성을 위해서만 사용된다.

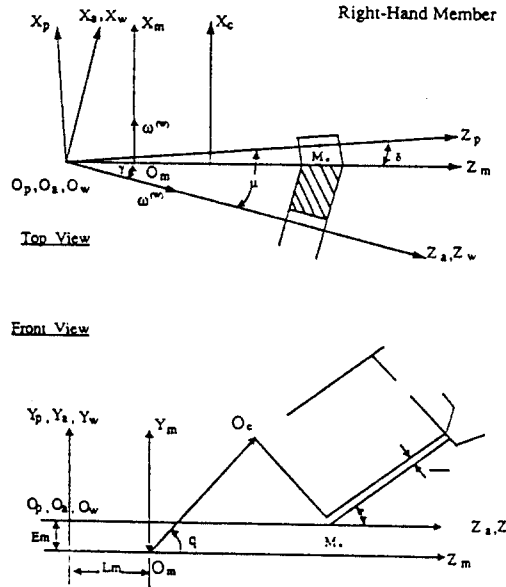


Fig. 5 Top and front views of a right-hand gear generator

E.으로 나타낸 기계웁셋은 피니언 축과 크래들 축간의 최단 거리이고, Fig. 4와 5에서 L.은 기계 중심선에서 끝까지 X.와 미끄럼대 X.의 벡터 합이다. 기계 중심에서 끝까지의 변화는 피니언 축에 평행하고, 미끄럼대의 방향은 크래들 축에 평행하다⁽¹⁴⁾. 동작기계 설치에 대한 부호는 Table 1.에 주어진다.

2-4. 창성된 기어 곡면

창성된 곡면 Σ.은 공구 곡면 Σ.군(family)의 포락선(envelope)이다. 곡면 Σ.와 Σ.는 공간 곡선 선분을 따라서 매 순간에 각각 접촉하고 있다. 수학적 의미로 맞물리는 곡면의 결정은 주어진 곡면군 포락선 이론을 근거로 하였다. 미분 기하학에 있어서, Σ.을 결정하기 위해 다음 단계를 먼저 구한다.

- a) 새로운 좌표계 S.에 있어서 주어진 곡면 Σ.에 의해 창성된 곡면 Σ.군
- b) 곡면 Σ.군의 포락선 Σ.

곡면 Σ.군의 행렬 표현식은 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$[B_w] = [M_{wc}][B_c] \tag{7}$$

여기서, [B]는 점 B의 4×1행렬이고, [M.]는 기존 좌표계 S.에서 새로운 좌표계 S.로의 좌표 변환을 정의

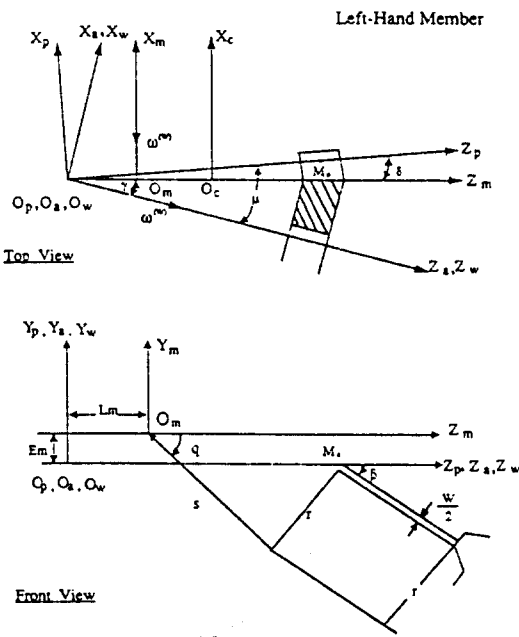


Fig. 4 Top and front views of a left-hand gear generator

Table 1. Sign covensions of machine-tool settings

구 분		오른쪽 방향 구성요소	왼쪽 방향 구성요소
cradle angle q	+	시계 반대 방향(CCW)	시계 방향
	-	시계 방향	기계 중심 아래
Machine Offset E _m	+	기계 중심위	기계 중심위
	-	기계 중심 아래	작업물 후진
Machine Center to Back X _{M:CB}	+	작업물 전진	작업물 후진
	-	작업물 후진	작업물 전진
Sliding Base X _{S:B}	+	작업물 전진	작업물 후진
	-	작업물 후진	작업물 전진
L _m	+	X _{S:B} : +와 X _{M:CB} : -	X _{S:B} : +와 X _{M:CB} : -
	-	X _{S:B} : +와 X _{M:CB} : -	X _{S:B} : +와 X _{M:CB} : -

한 행렬이며, 좌표계 S₁는 헤드 커터에 부착되고 좌표계 S₂는 가공물에 부착된다. Fig. 4와 5로부터 다음과 같이 된다.

$$[M_{wc}] = [M_{ws}][M_{sp}][M_{pm}][M_{mc}] \quad (8)$$

Fig. 6으로부터 행렬 $[(M_{..})]$ 를 얻을 수 있다.

$$[M_{..}] = \begin{bmatrix} \cos \phi_w & \pm \sin \phi_w & 0 & 0 \\ \sin \phi_w & \cos \phi_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서, ϕ_w 는 절삭이 행하여지는 동안의 회전각이다. 행렬에서 윗부호는 Fig. 4에서 보여주는 왼쪽 방향으로의 스파이럴 베벨기어 창성에 대해서이고, 아래부호는 오른쪽 방향으로의 창성에 대해서이며, 앞으로 이 부호에 따른다.

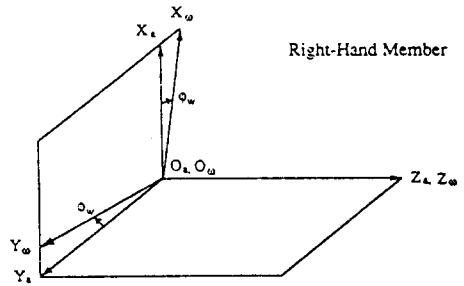
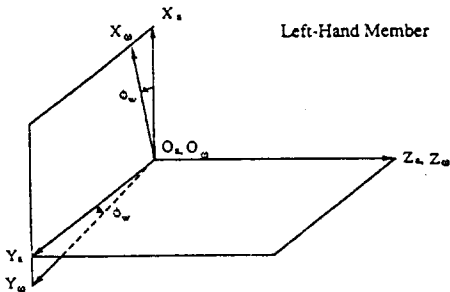


Fig. 6 The rotation angle of the work while it is being cut

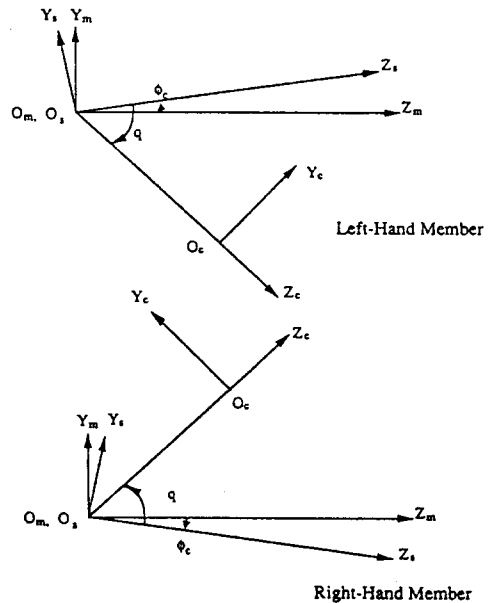


Fig. 7 Auxiliary coordinate system S.

Fig. 7로부터 공구에 밀접한 보조 좌표계를 응용하면, 변환행렬 $[M_{mc}]$ 는 다음과 같이 유도되어 진다.

$$[M_{mc}] = [M_{mc}] [M_{sc}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_c \pm \sin \phi_c & 0 & 0 \\ 0 & \sin \phi_c & \cos \phi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & \sin q & s \sin q \\ 0 & \pm \sin q & \cos q & s \cos q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서, ϕ_c 는 작업물이 절삭되는 동안의 크래들 회전 각이고, s 는 반경 방향 설정값이다. 곡면 ϕ_c 는 작업물이 절삭되는 동안의 크래들 회전각이고, s 는 반경 방향 설정값이다. 곡면 Σ_c 궤적의 포락선 Σ_c 의 결정은 고전적인 미분 기하학에서 개발되어진 포락선 존재성의 필요, 충분조건에 근거를 두었다⁽¹⁵⁾.

공통 접촉점 B 좌표는 Σ_c 의 식으로부터 얻을 수 있었다.

$$[B_m] = [M_{mc}][B_c] \quad (11)$$

Σ_c 이 원추곡면인 경우에 대한 맞물림 방정식은

$$(u - r \cot \psi \cos \psi) \cos \psi \sin \tau + s[(m_{cw} - \sin \tau) \cos \psi \sin \theta + \cos \psi \sin \psi \sin(q - \phi_c)] \pm E_m (\cos \psi \sin \psi + \sin \tau \cos \psi \cos \tau) - L_m \sin \tau \cos \psi \sin \tau = 0 \quad (12)$$

가 된다. 여기서, r 는 커터 팁반경, γ 는 뿌리각, q 는 크래들각, τ 는 보조변수 m_{cw} 는 기어비 $\frac{m_{cw}}{m_w}$ 이다. (12) 식은 창성 곡면좌표(u 와 θ)를 회전각 ϕ_c 와 관계시킨다.

3. 스파이럴 베벨기어의 치면 구성

3-1. 기어 공작기계 설치

기어 피치각 μ_2 는

$$\mu_2 = \arctan \frac{\sin \Gamma}{\frac{N_1}{N_2} + \cos \Gamma} \quad (13)$$

이고, 피니언 피치각 μ_1 은

$$\mu_1 = \Gamma - \mu_2 \quad (14)$$

이며, 이 뿌리각 δ_1, δ_2 는

$$\delta_1 = \mu_1 - \gamma_1, \quad \delta_2 = \mu_2 - \gamma_2 \quad (15)$$

여기서, Γ 는 축각, N_2 는 기어잇수, N_1 는 피니언 잇수, γ_2 는 기어 뿌리각이다.

Fig. 8은 헤드 커터 장치의 전면부를 보여주는 것으로, 헤드 커터의 내/외부 팁반경이 다음과 같이 표현됨을 보여주고 있다.

$$r_G = 1/2(d_G \mp W_G) \quad (16)$$

여기서, d_c 는 기어 커터의 평균 반경, W_c 는 점의 폭이다.

삼각형 O.O.M.의 길이와 각도 사이의 관계로부터, 다음과 같이 반경 방향 설정값 s_c 와 크래들각 q_c 가 표현되어 진다.

$$s_c = \sqrt{\frac{d_G^2}{4} + A^2 \cos^2 \delta_2 - d_G A \cos \delta_2 \sin \beta} \quad (17)$$

$$q_c = \arctan \frac{A^2 \cos^2 \delta_2 + s_c^2 - \frac{d_G^2}{4}}{2 A s_c \cos \delta_2} \quad (18)$$

여기서, A 는 평균 위치 피치 원추거리, β 는 평균 스파이럴각, d_c 는 이뿌리각이다.

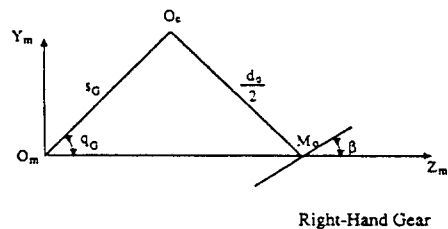
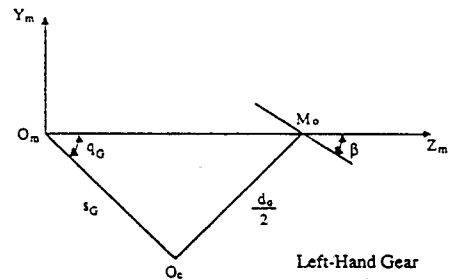


Fig. 8 The front view of the installation of the head cutter

3-2. 기어치 곡면상의 평균 접촉점 결정

스파이럴 베벨기어의 기어와 피니언 곡면은 매순간 점접촉을 한다. 이 평균 접촉점을 구름 접촉의 중심이고, 위치는 일반적으로 기어 치상의 작업물 두께의 중간에 선택된다. Fig. 9은 기어 치 곡면을 보여주고 있다. 단면 AB는 기어팁이고 이것은 피니언의 이뿌리 원추 모선에 평행하다. 단면 BC는 피니언 팁이고 이것은 기어의 이뿌리 원추 모선에 평행하다. 작업 영역은 사각형 ABCD 내부이다.

평균 접촉점은 기어 곡면상에 있어야 한다. 이것은 공구에 의해 생성 되어지는 기어에 대해 맞물림 방정식을 만족해야 한다는 것을 의미한다. 다음처럼 기어 곡면상의 주곡률을 결정 할 수 있다.

$$k_{2I} - k_{2II} = \frac{a_{22}^2 - a_{12}^2 + (k_{cI} - k_{cII})a_{33}}{a_{33} \cos 2\sigma_{20}} \quad (19)$$

$$k_{2I} + k_{2II} = (k_{cI} + k_{cII}) - \frac{a_{22}^2 + a_{12}^2}{a_{33}} \quad (20)$$

여기서, k_{2I} , k_{2II} 는 주곡률, [A]는 주곡률과 주방향들을 관계 시키는 행렬, a_{ij} 는 행렬 [A]의 요소, σ_{2c} 는 e_2 로부터 e_c 까지 반시계 방향으로 측정한 각, k_{cI} , k_{cII} 는 기어 G의 접촉점에서 주곡률이다.

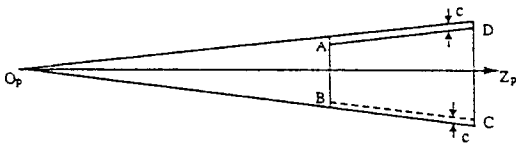


Fig. 9 Gear tooth Surface

3-3. 공간적 치면 구성

피니언 동작기계 설치 결정은 Litvin^(8,9)에 의해 제공된 기어 치 곡면의 공간적 합성 이론을 근간으로 하였다. 스파이럴 베벨기어 맞물림에 대한 공간적 치면 구성 목적은 다음 필요사항을 만족해야 한다.

- 첫째, 기어 치 곡면은 정의된 평균 접촉점 B에서 각각 접촉해야 한다.
- 둘째, 기어 치 곡면에 접촉타원은 점 B에서 요구된 치수를 갖는다.
- 셋째, 접촉로에의 접선은 점 B에서 정의한 방향이 되어야 한다.
- 넷째, 순간 기어비 $m_{21}(\phi_1)$ 는 점 B에서 정의한 값을

갖는다.

기어 치 곡면에 대한 공간적 치면구성은 맞물림의 개념과 구름 접촉의 개념에 관계된다. 이것은 평균 접촉점 B에서 또는 인접부를 포함하는 곳에서 물림이 진행되는 기어 치 곡면에 대한 맞물림의 최적 상태를 제공하게 된다.

지금부터 Fig. 10에서 보여주고 있는 고정된 좌표계 S_i 를 고려하기로 한다. Fig. 10으로부터 S_i 과 $S_{p(G)}$ 은 각각 동일 선상에 있음을 알 수 있다. 그러므로, 평균 접촉점 B의 좌표, 곡면 단위법선의 방향 및 기어 곡면상의 점 B에서 주방향은 $S_{p(G)}$ 계에서 결정되기 때문에 알 수 있다.

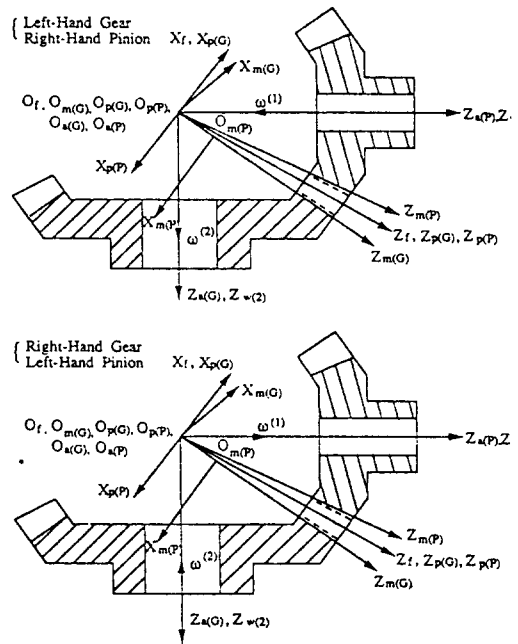


Fig. 10 Coordinate systems for local synthesis

일반적으로, 스파이럴 베벨기어는 비공액 치 곡면에 따라 설계되거나 생산된다. 동작기계 설치 다양성 및 기어 지면에 따른 전동오차 함수가 존재한다. 그러나 기어 지면에 따른 전동오차 함수만이 응용성이 좋다. 그러므로 기어 치 convex면 $n_{21}(\phi_1)$ 은 음의 값을 제공해야 하고, 기어치 concave면 $m_{21}(\phi_1)$ 은 양의 값을 제공해야 한다. 즉 이 $m_{21}(\phi_1)$ 의 절대값이 전동오차의 수준을 조절하게 된다.⁽¹⁶⁾

3-3-1. 평균 접촉점에서 피니어 치곡면의 주곡률과 주 방향

평균 접촉점에서 피니어 치 곡면의 주곡률과 주방향은

$$\kappa_A = \frac{[4T^2(b_1^2 + b_2^2)](1 + \tan^2 \nu)}{2T(1 + \tan^2 \nu_1) + b_1(1 - \tan^2 \nu_1) + 2b_2 \tan \nu_1} \quad (21)$$

$\kappa_A = \kappa_{2\Sigma} - \kappa_{1\Sigma}$ 이기 때문에 아래식과 같이 된다.

$$\kappa_{1\Sigma} = \kappa_{2\Sigma} + \frac{[4T^2(b_1^2 + b_2^2)](1 + \tan^2 \nu)}{2T(1 + \tan^2 \nu_1) + b_1(1 - \tan^2 \nu_1) + 2b_2 \tan \nu_1} \quad (22)$$

이 된다. 여기서, b_1, b_2 는 보조변수, ν_1 는 접촉점 B의 속도벡터와 주방향의 단위벡터가 이루는 각이다. 이때 다음과 같이 나타남을 주의해야 한다.

$$T = \frac{\epsilon}{t} \quad (23)$$

여기서, t 는 접촉타원의 장축이고, ϵ 은 탄성 접근(approach)이다.

따라서, 주방향 σ_{12} 는 다음과 같다.

$$\tan 2\sigma_{12} = \frac{2a_{12}}{\kappa_{2A} - a_{11} + a_{22}} \quad (24)$$

여기서, $\kappa_{2A} = \kappa_{21} - \kappa_2$ 이다.

이것은 σ_{12} 에 대해서 두가지 해를 주는데 더 작은값을 선택한다. $-\sigma_{12}$ 만큼 단위법선벡터 n 에 대해 단위벡터 e_{1II} 를 회전하면 단위벡터 e_{1I} 가 얻어지게 된다. $\pi/2$ 만큼 단위법선벡터 n 에 대해 단위벡터 e_{1I} 가 얻어지게 된다.

평균 접촉점에서 피니어 곡면의 주곡률은 다음과 같이 결정된다.

$$\kappa_{1I} = \frac{\kappa_{1\Sigma} + \kappa_{1A}}{2}, \quad \kappa_{1II} = \frac{\kappa_{1\Sigma} - \kappa_{1A}}{2} \quad (25)$$

여기서, $\kappa_{1I} = \kappa_{1II}$ 이다.

3-3-2. 블레이드각과 변수 결정

기어 헤드 커터 곡면 Σ_1 기어 곡면 Σ_2 피니어 헤드 커터 곡면 Σ_p , 피니어 곡면 Σ_i 은 공통 접촉점 B에서 동시에 접촉하고 있다. 이것은 네 곡면이 평균 접촉점에서 공통 법선을 갖게 됨을 암시한다. 여기서는 피니어 블레이드각 ψ_p 와 변수 τ_p 를 결정한다.

피니어 블레이드각 ψ_p 는

$$\psi_p = \begin{cases} \arcsin(n_x \cos \delta_1 - n_z \sin \delta_1) & \text{기어 오목면} \\ (\pi - \psi_p) & \text{기어 볼록면} \end{cases}$$

여기서, n_x, n_z 는 점 B의 단위법선벡터의 x, z 성분이다.

또한 변수 τ_p 는 다음과 같이 획득되어 진다.

$$\tau_p = 2 \arctan \frac{\sin \tau_p}{1 + \cos \tau_p} \quad (27)$$

3-3-3. 평균 접촉점에서 피니어 커터 곡면의 주곡률과 주방향

평균 접촉점에서 피니어 커터 곡면의 1차 주방향은

$$[e_{pII}] = \pm \begin{bmatrix} \sin \delta_1 \sin \tau_p \\ \cos \tau_p \\ \cos \delta_1 \sin \tau_p \end{bmatrix} \quad (28)$$

피니어 커터 곡면의 2차 주방향의 단위벡터는 각 $\pi/2$ 으로 공통 법선 n 에 관해 회전하는 피니어 커터 곡면의 제1차 주방향 단위벡터에 의해 구해지게 된다.

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (29)$$

식 (28)과 식 (4), (5), (6)을 사용하면, 피니어 커터의 1차 주곡률 k_{pI} 은 다음과 같다.

$$\kappa_{pI} = \frac{\kappa_{pII}(\kappa_{1I} \cos^2 \sigma_{pI} + \kappa_{1II} \sin^2 \sigma_{pI}) - \kappa_{1I} \kappa_{2II}}{\kappa_{pII} - \kappa_{1I} \sin^2 \sigma_{pI} - \kappa_{1II} \cos^2 \sigma_{pI}} \quad (30)$$

여기서, k_{pI} 는 피니어 커터의 1차 주곡률, k_{pII} 는 피니어 커터의 2차 주곡률, κ_{1I} 는 피니어의 1차 주곡률, κ_{1II} 는 피니어 커터의 2차 주곡률, σ_{pI} 는 피니어 커터의 e_p 로 부터 e_{1I} 까지 반시계 방향으로 측정한 각이다.

3-4. 피니어 공작기계 설치

3-4-1. 피니어 절삭비의 결정

피니어 절삭비 m_{pI} 를 유도하기 위해 피니어 커터 곡면과 피니어 곡면에 대한 주곡률과 주방향 사이의 관계를 사용한다. 여기서 곡면 Σ_1 와 Σ_i , Σ_2 와 Σ_i 이 동치임을 고려한다. 다음과 같은 데이터는 주어진 것으로 한다.

(1) 평균 접촉점에서 피니어 곡면의 주곡률 k_{1I} 와 k_{1II}

(2) 평균 접촉점에서 피니언 곡면의 주방향 e_{11} 와 e_{111}

(3) 평균 접촉점 좌표

(4) 계수 a_{11} , a_{12} 와 a_{22}

절삭비 m_{p1} 의 식은 다음과 같다.

$$m_{p1} = - \frac{a_{12}(k_{\mu} t_2^2 + k_{\mu} t_4^2 - V_3 - f_2) - (k_{\mu} t_2 + c_{12})}{a_{12}(2k_{\mu} t_1 t_2 - V_2 - f_1)} \frac{(k_{\mu} t_4 + c_{22})}{(31)}$$

여기서, t_1, t_2, t_4 는 보조변수, c_{12}, c_{22} 는 보조변수, f_1, f_2 는 보조변수이고,

$$v_2 = \pm[-(u_{21} \cos \mu_1 + u_{22} \sin \delta_1)n_x + (u_{21} \sin \mu_1 - u_{22} \cos \delta_1)n_z + (u_{11} \cos \mu_1 + u_{12} \sin \delta_1 + u_{32} \cos \delta_1 - u_{31} \sin \mu_1)n_y]$$

$$v_3 = \pm[-u_{22} n_x \cos \mu_1 + (u_{12} \cos \mu_1 - u_{32} \sin \mu_1)n_y + u_{22} n_z \cos \mu_1]$$

3-4-2. 변수 E_m 과 L_m 결정

피니언 공작기계 설치 변수 E_m 과 L_m 은 Fig. 4와 5에서 보여주고 있는데, 피니언 절삭비가 결정 되었기 때문에 이들 두 변수를 구할 수 있다.

$$E_m = \frac{\pm B_y \cos \mu_1 - V_1^{(in)}}{m_{p1} \sin \delta_1} + B_y \quad (32)$$

$$L_m = \frac{B_y \cos \mu_1 - B_x B_z \mp V_1^{(in)}}{m_{p1}} + B_x \sin \delta_1 + B_x \cos \delta_1 \quad (33)$$

Table 3. Input Data for Straight Blade

	Gear Convex Side	Gear Concave Side
Gear Blade Angle	20°	
Gear Cutter Average Diameter	6"	
Gear Cutter Point Width	0.08"	
First Derivative of Gear Ratio	-0.0035	0.0052
Semimajor Axis of Contact Ellipse	0.171"	0.181"
Contact Path Direction Angle	90°	75°

4. 수치해석 결과 및 고찰

이상의 연구에서 제안한 설계방법을 적용시켜 보기 위해서 설계 계산을 위한 기본 자료는 Table 2에 나타내었고, 직선 날인 경우에 대한 입력 자료는 Table 3에 나타내었다. 또한 공통 출력 데이터는 Table 4에 도시 하였고, 피니언 설치 데이터는 Table 5에 도시 하였다.

Table 2. Blank data

	Pinion	Gear
Number of teeth	10	41
Diametal Pitch	5.559"	
Shaft Angle	90°	
Mean Cone Distance	3.226"	
Outer Cone Distance	3.796"	
Whole Depth	0.335"	
Working Depth	0.302"	
Clearance	0.033"	
Face Width	1.139"	
Root Cone Angle	12° 1'	72° 25'
Mean Spiral Angle	-	35°
Hand of Spiral	R. H.	L. H.

Table 4. Gear machine tool settings

Setting Value	Data
Radial	2.87798"
Cradle Angle	58.6365°
Ratio of Roll	0.973748

Table 5. Pinion Machine-Tool Setting with Straight Blade

	Gear Convex Side	Gear Concave Side
Blade Angle	16.5561°	22.9907°
Tip Radius of Cutter	3.4293°	2.9600°
Radial	2.85059°	3.50382°
Cradle Angle	58.65649°	58.8954°
Ratio of Roll	0.22900	0.25348
Machining Offset	0.29011°	-3.17916°
Machine Center to Back+Sliding Base	0.021231°	0.052118°

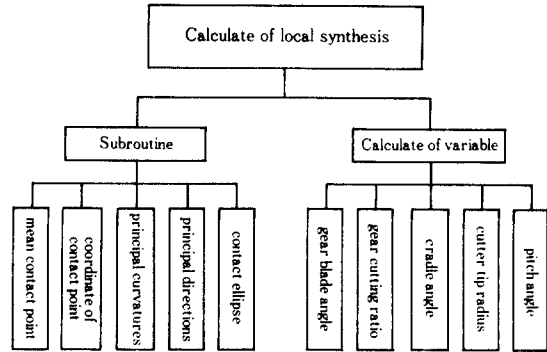


Fig. 12 Diagram of subroutines and calculating variables

Fig. 11는 본 프로그램에서 응용된 프로그램의 흐름도이고, Fig. 12는 부 프로그램과 계산된 변수값들이다.

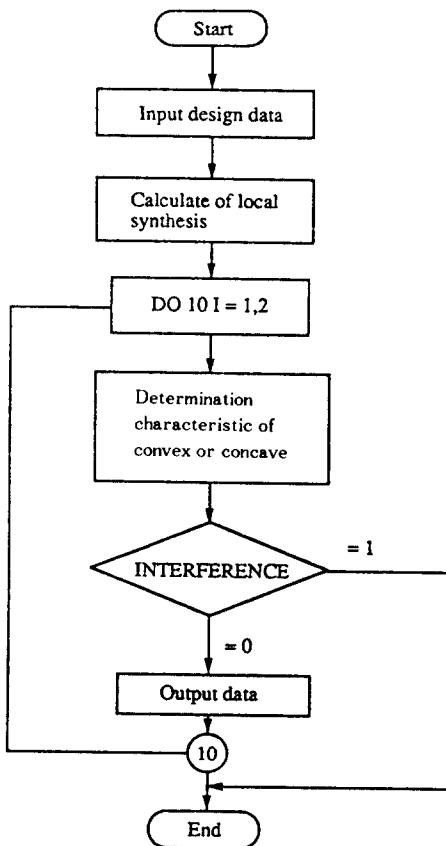


Fig. 11 Simple flow chart of tooth contact analysis program

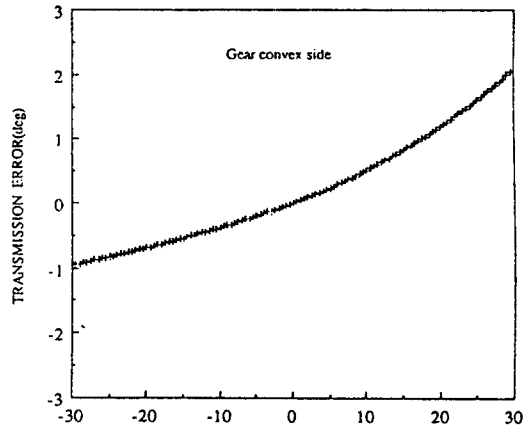


Fig. 13 Gear convex side, alignment

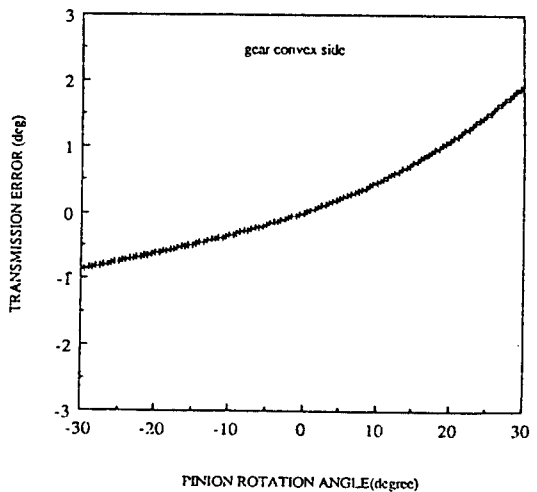


Fig. 14 Gear convex side, $\Delta A = +0.002$ inches

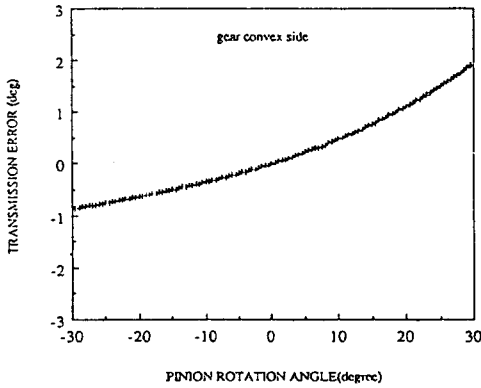


Fig. 15 Gear Convex side, $\Delta V = +0.002$ inches

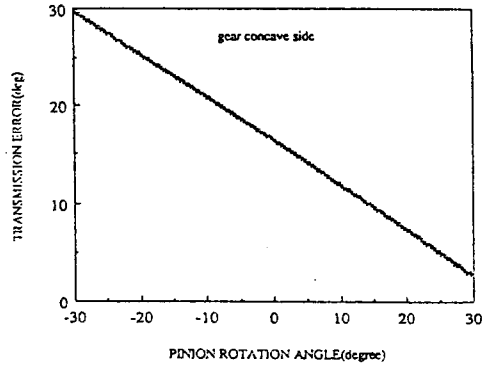


Fig. 18 Gear concave side, $\Delta V = +0.002$ inches

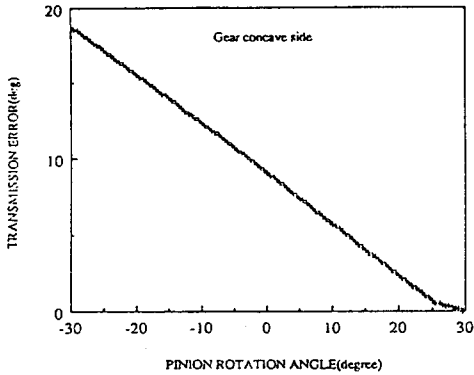


Fig. 16 Gear concave side, alignment

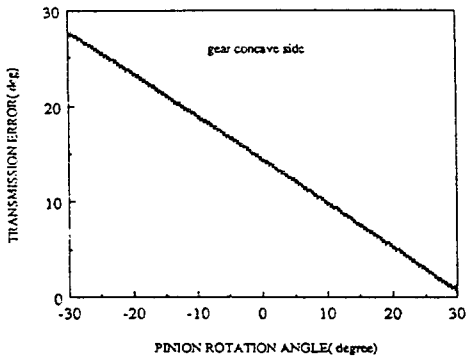


Fig. 17 Gear concave side, $\Delta A = +0.002$ inches

본 프로그램을 수행하여 얻은 결과치를 Fig. 13부터 Fig. 18에 도시하였다. 기어 블록면인 경우는 Fig. 13에서 Fig. 15까지 이고, 기어 오목면의 경우는 Fig. 16에서 Fig. 18까지 이다. ΔA 와 ΔV 의 변환값은 ± 0.002 in로 하였다.

ΔA 는 축을 따르는 피니언의 전이량이고, ΔV 는 피니언 축선지정 오차로써, ΔA 는 공작기계 장착거리가 증가할 때는 양의 값을 갖는데, 증가하여도 비정렬에 크게 영향을 주지 않음을 알 수 있었다. 그러나 오목면의 경우 ΔV 값의 변화는 인터퍼런스에 의해 값의 변화가 크게 나타났다. 즉, 피니언 회전각에 따라 기어 블록면인 경우에 전동오차는 정렬일때 $-1^{\circ} \sim 2.4^{\circ}$, $\Delta A = +0.002$ in 일때 $-0.8^{\circ} \sim 2.0^{\circ}$, $\Delta V = +0.002$ in일때 $-0.8204^{\circ} \sim 2.0^{\circ}$ 로 매우 작은 반면에, 기어 오목면인 경우에 전동오차는 정렬일때 $0^{\circ} \sim 17^{\circ}$, $\Delta A = +0.002$ 일때 $1^{\circ} \sim 27^{\circ}$, $\Delta V = +0.002$ in일때 $3^{\circ} \sim 30^{\circ}$ 로 크다.

한쌍의 스피어럴 베벨기어 구동에 대한 공작기계 설치를 결정하기 위해서 2장에서 정의한 비교방법을 이용하였고, 이를 근거로 비정렬상태나 정렬 상태하에서의 직선날 절삭공구에 의한 한쌍의 물림 계산을 위한 본 프로그램을 수행시킴으로서 기어 절삭공구 설치에 대한 값을 구할 수 있다.

본 프로그램을 이용하여 만든 베벨기어는 축을 따르는 피니언의 전이와 피니언 축선 지정오차에 의한 비정렬에 크게 영향을 받지 않았다.

5. 결 론

본 연구에서는 수학적 모델링과 운동학적 기하학을 기초로 한 치접촉 해석을 하였다. 그리고 좌표 변환이나 점접촉 운동과 단위 수직 벡터사이의 운동학적 관계에 의해서 전동오차 해석을 수행하였다.

1. 본 연구에서 개발한 프로그램을 사용하여, 전달점에서 jump함수에 관계하는 전동오차의 불연속 한

수는 작은 비정렬을 발생함을 알 수 있었다. 따라서 전동오차를 갖게 되는 기어 이상성은 비정렬 상태에 있어서 기어 민감도의 감소를 허용하는 장성에 대한 수정을 완전하게 할 수 있었다.

2. 구름 접촉의 전이를 유지하기 위해, 기어의 비정렬에 대한 공차와 전동오차 함수의 예상치에 대한 제한이 필요 하였다.
3. 한쌍의 스파이럴 베벨기어 구동에 대한 기계공구 설치를 결정하기 위해 본 프로그램을 이용함으로써 비정렬 상태나 엇갈리지 않은 상태하에서의 직선날 절삭공구에 의한 한쌍의 물림 계산을 정확하게 할 수 있었다.
4. 피니언 곡면상의 평균 접촉점에서 주곡률과 주방향을 결정하는 식들을 유도할 수 있었다. 이 식들은 기어 곡면상의 평균 접촉점에서의 주곡률과 주방향의 함수들이었다.
5. 피니언 곡면 특성식에 관한 0차(위치), 1차(법선), 2차(주곡률과 방향) 도함수에 의해 피니언 기초 기계공구 설치를 결정하는 방정식을 유도할 수 있었다.

이상에서 언급한 것처럼 전동오차 해석은 어려운 문제이다. 비록 0인 전동오차를 갖는 맞물리는 스파이럴 베벨기어를 생산하기가 가능하다 하더라도, 기어는 비정렬에 매우 민감함을 고려해야 한다.

참고문헌

1. Litvin, F. L., Rahman, P., and Goldrich, N., "Mathematical Models for the Synthesis and Optimization of Spiral Bevel Gear Tooth Surfaces", NASA-CR-3553, Jun. 1982.
2. Cokerham, G., and Waite, D., "Computer-Aided Design of Spur or Helical Gear Train, Computer Aided Design, 1975.
3. Savage, M., Brikmanis, C. K., "System Life and Reliability Modeling for Helicopter Transmissions", NASA-CR-3967, pp. 32~50, Oct. 1986.
4. Lee, T. W., "Weight Minimization of a Speed Reducer", ASME 77-Det-163, 1977.
5. 정 태형, 김 민수, "컴퓨터를 이용한 동력 전달용 인볼류트 원통기차의 설계", 대한기계학회논문집, pp. 594~602, 제14권, 제3호, 1991.
6. 정 태형, 변 준형, 최 종인, "유성치차장치의 전산 기원용 설계법에 관한 연구", 대한기계학회논문집, pp. 1253~1262, 제15권, 제4호, 1991.
7. 박 천경, 박 동삼, "우성치차장치의 회전오차 해석과 그 진단에 관한 연구", 대한기계학회논문집, pp. 43~53, 제14권, 제1호, 1990.
8. Litvin, F. L., and Gutman, Y., "Method of Local Synthesis and Analysis for Hypoid Gear Drives of "Formate" and "Helixform", Parts 1-3", Trans. of the ASME, Journal of Mechanical Design, pp. 83~113, Vol. 103, Jan. 1981.
9. Litvin, F. L., and Gutman, Y., "A Method of Local Synthesis of Gears Grounded on the Connections Between the Principal and Geometric Curvatures of Surfaces", Trans. of the ASME, Journal of Mechanical Design, pp. 114~125, Vol. 103, Jan. 1981.
10. Zhang, Y. Synthesis and Anaylsis of Hypoid Drive. Ph.D. dissertation, University of Illinois at Chicago, 1988.
11. Zhang, Y., Synthesis and Analysis of Modified Spur and Helical Gears. Ph.D. dissertation, University of Illinois at Chicago, 1988.
12. Dudley, D. W., Bevel and Hypoid Gear Manufacture. In Gear Handbook : The Design, Manufacture, and Application of Gears, D. W. Dudley, chapter 20. New York, Mcgraw-Hill, 1962.
13. Colvin, F. H., and Stanley, F. A., Gear Cutting Practice. New York, Mcgraw-Hill, 1950.
14. Buckingham, E., Analytical Mechanics of Gears. Dover Publications, INC.
15. Barrett O'neill. Elementary Differential Geometry. Academic Press. 1966.
16. Gleason Works, Understanding Tooth Contact Analysis. Gleason Machine Division, The Gleason Works. Publication No. SD3139. New York, 1981.