

## 변형율속도 제어에 의한 평면변형 및 축대칭 전방 압출

이 종 수,\* 홍 성 석,\* 조 남 춘,\* 이 성 호\*

### An Optimal Plane Strain and Axisymmetric Extrusions of Rate Sensitive Materials

J. S. Lee,\* S. S. Hong,\* N. C. Cho\* S. H. Lee\*

#### ABSTRACT

The optimal extrusion process for the rate sensitive materials have been developed in this study. The preliminary designs of the die shapes have been carried out to maintain constant strain rate during extrusion and the upper bound approach has been applied to define the process variables (the die entrance velocity and the die length) including the rheology during deformation. The result for the axisymmetric extrusion process has been verified with rigid-viscoplastic finite element analysis. It has been confirmed that the optimal die has wider band of constant strain rate than the conical one does.

#### 기 호 설 명

$H_0$ : 빌렛의 높이	$r$ : 금형 반경	$W_i, W_o, W_f$ : 내부변형, 전단변형 및 마찰 에너지 소모율
$H_f$ : 제품 높이	$R$ : 압출비	$\alpha$ : 금형의 접선각
$H$ : 금형 높이	$S_1$ : 경계면 (boundary surface)	$\epsilon_{ij}$ : 변형율 텐서
$J$ : 총에너지 소비율	$U_0$ : 금형 입구 압출 속도	$\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}_0$ : 유효 변형율속도
$L$ : 금형길이 (die length)	$U_1$ : 속도 성분	$\dot{\epsilon}_{ij}$ : 변형율속도 텐서
$m$ : 마찰상수 (friction factor)	$\Delta U_1$ : 속도 불연속 성분	$\tau$ : 전단 응력
$r_0$ : 빌렛 반경	$V$ : 체적	$\sigma_0$ : 항복 응력
$r_f$ : 제품 반경		

#### 1. 서 론

압출금형의 형상은 성형 중에 발생하는 금속 유동에 영향을 끼치는 중요한 요소의 하나이며 압출 금형은 그 형상에 따라 전단형 금형 (shear die), 원추형 금형 (conical die), 포물선형 금형 (parabolic die), 유선형 금형 (streamline die)으로 크게 구별된다. 이 중 유선

형 금형이 변형 구간에서 보다 균일한 변형율 분포를 나타내는 것으로 알려져 있다[1].

기존 금속재료의 대부분은 성형성이 좋고 변형속도에 큰 제약이 없으므로 성형 시 변형율속도에 큰 변화가 나타나는 기존의 금형으로도 압출이 가능하다. 그러나 성형 중 재료가 겪는 변형율속도의 변화가 압출의 성패를 좌우하는 경우가 있으며 이 때에는 변형 구간에

\* 국방과학연구소 (경희원)

서의 변형율속도를 제어할 수 있는 금형이 필요하다. 압출 시 변형율속도의 제어가 요구되는 대표적인 것은 초소성 재료이며 이외에도 단섬유 강화 알루미늄 복합재료 등이 있다.

Srinivasan 등(2)은 축대칭 전방압출에 있어서 변형율속도를 일정하게 유지하는 금형형상을 제시하였다. 그러나 이 방법에서는 금형과 소재 사이의 마찰을 고려하지 않았으며 초기 압출속도를 구하기 위해서는 금형길이 임의로 정해야 하는 문제가 있다. 본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 Srinivasan 등이 제시한 방법을 이용하여 평면변형 및 축대칭 압출에 대한 최적 금형형상을 구하고 상계해법을 이용하여 압출 초기속도를 구함으로써 마찰을 고려한 경우의 금형형상을 제시하였다. 또한 제시된 금형형상의 타당성을 입증하기 위하여 원추형 금형과 축대칭 최적형상 금형 내에서의 변형율속도 분포를 강·점소성 유한요소 해석으로 비교 검토하였다(3).

## 2. 금형 형상 설계

압출되는 소재가 비압축성, 등방성이라고 가정하고 압출금형 내에서 유효 변형율속도 분포가 일정하게 유지되는 금형 형상을 소성이론의 기본식들을 이용하여 구하였다.

평면변형 압출의 경우 Fig. 1과 같이 압출 변형구간에서 일정한 유효 변형율속도  $\dot{\epsilon}_0$ 를 유지하는 금형형상  $H(x)$ 를 고려해 보자. 금형 입구로부터의 거리  $x$ 에서 폭  $dx$ 인 슬랩을 선택하여 슬랩 내에서의  $x$  방향 속도가  $U_x$ 이고 변형율속도가 일정하다고 가정하면  $dx$ 만큼 이동하는데 소요되는 시간은 다음과 같다.

$$dt = \frac{dx}{U_x} \quad (1)$$

이 때  $y$ 방향의 변형을 증가는

$$d\epsilon_y = \frac{dH}{H} \quad (2)$$

이고 따라서  $y$ 방향의 변형율속도는 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_y = \frac{d\epsilon_y}{dt} = \frac{U_x}{H} \frac{dH}{dx} \quad (3)$$

입구에서의 속도와 높이를 각각  $U_0, H_0$ 라 하면 비압축성 조건으로부터

$$\dot{\epsilon}_x = - \frac{H_0 U_0}{H^2} \frac{dH}{dx} \quad (4)$$

슬랩 내에서의 유효 변형율 속도를 구하여 이를 일정한 값  $\dot{\epsilon}_0$ 로 놓으면

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \dot{\epsilon}_x = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{H_0 U_0}{H^2} \frac{dH}{dx} \quad (5)$$

식(5)를 적분하여 경계조건을 고려하면 다음과 같은 금형 형상  $H(x)$ 를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_0} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\dot{\epsilon}_0}{U_0} x + 1 \right) \quad (6)$$

금형의 출구  $x=L$ 에서  $H=H_f$  라면 금형입구에서의 압출 속도는

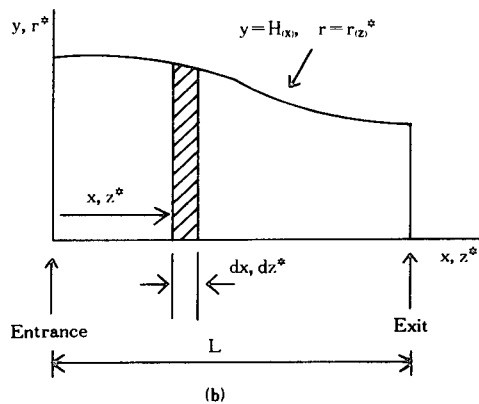
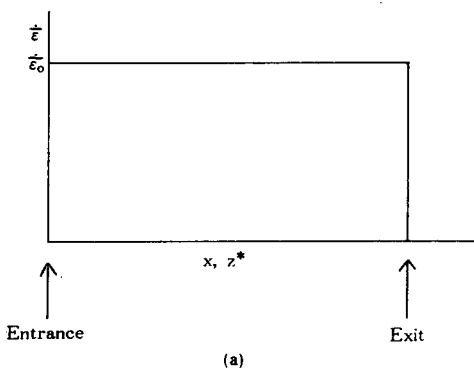


Fig. 1 Variation of (a) strain rate and (b) die height/radius along die length (\*, Axisymmetric).

$$U_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_0 L}{R - 1} \quad (7)$$

로 얻을 수 있다. 여기서 R은 압출비(extrusion ratio,  $H_0/H_1$ )이다. 식(7)에서 U는 R, L의 함수이며 U가 구해지면 규정된 압출비 및 변형율속도에 대하여 금형길이 L을 구할 수 있다.

축대칭 압출의 경우 금형형상, 다이 입구에서의 압출 속도 및 다이 반경을 각각  $r(z)$ ,  $U_0$ ,  $r_0$ 라 하면 평면 변형의 경우와 마찬가지로

$$\dot{\epsilon}_0 = \frac{-2r_0^2 U_0}{r^3} \frac{dr}{dz} \quad (8)$$

이 얻어진다. 따라서

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2} \left( 1 + \frac{\dot{\epsilon}_0}{U_0} z \right) \quad (9)$$

이고 출구  $z=L$ 에서  $r=r_1$ 의 관계로부터

$$U_0 = \frac{\dot{\epsilon}_0 L}{R-1} \quad (10)$$

을 얻을 수 있다. 여기서 R은 압출비(extrusion ratio,  $r^2/r_1^2$ )이다.

### 3. 상계 해석

비압축성, 등방성인 재료가 Fig. 2와 같이 슬랩 내부에서 균일한 속도로 변형되며 이 경우 von Mises 유동법칙을 따른다고 가정한다.

상계이론(upper bound thorem)은 극한해석의 하나

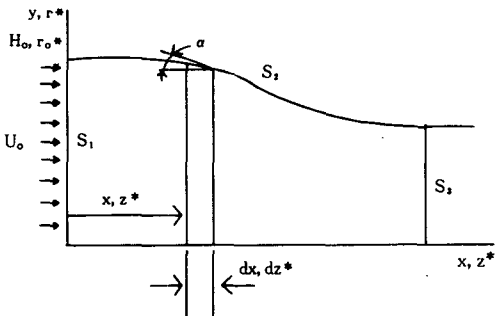


Fig. 2 Velocity field in extrusion (\*, Axisymmetric).

로써 아래와 같다(4). 소성변형 영역의 동적 가용속도 장으로부터 계산되는 총에너지 소비율의 상계 J는 다음과 같이 표현된다.

$$J = \dot{W}_i + \dot{W}_s + \dot{W}_f \quad (11)$$

여기서  $\dot{W}_i$ 는 내부변형 에너지를,  $\dot{W}_s$ 는 금형의 입구와 출구에서의 속도 불연속으로 인한 전단변형 에너지를,  $\dot{W}_f$ 는 금형과 소재의 접촉면에서의 마찰 에너지를 나타내며 다음과 같은 식으로 주어진다.

내부변형 에너지율 :

$$\dot{W}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \int \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}} dV \quad (12)$$

전단변형 에너지율 :

$$\dot{W}_s = \int_{S_1} \tau |\Delta U| dS_1 + \int_{S_3} \tau |\Delta U| dS_3 \quad (13)$$

마찰 에너지율 :

$$\dot{W}_f = \int_{S_2} \tau |\Delta U| dS_2 \quad (14)$$

입구에서의 최적속도  $U_0$ 를 구하기 위하여 J를  $U_0$ 에 대하여 다음과 같이 최소화한다.

$$\frac{\partial J}{\partial U_0} = 0 \quad (15)$$

이와 같이 계산된 입구속도  $U_0$ 는 다음과 같다(부록 참조).

$$\text{평면변형 압출 : } U_0 = \frac{\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0 H_0 \ln R}{m(R^2-1)} \quad (16)$$

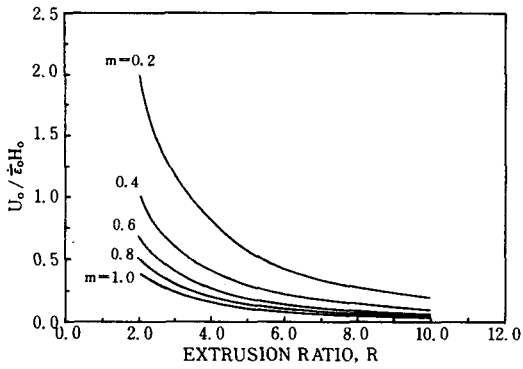
$$\text{축대칭 압출 : } U_0 = \frac{3\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0 r_0}{8m} \cdot \frac{\ln R}{(R^{3/2} - 1)} \quad (17)$$

### 4 결과 및 고찰

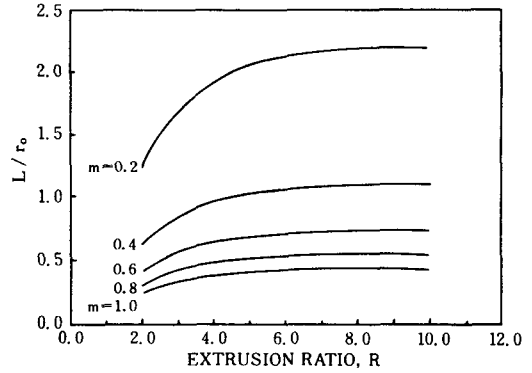
식(16), (17)로부터 압출비 R, 마찰상수 m에 따라 금형입구 압출속도를 구할 수 있으며, 이를 무차원수  $U_0/(\dot{\epsilon}_0 H_0)$  및  $U_0/(\dot{\epsilon}_0 r_0)$ 로 표현하면 Fig. 3과 같다.

일정한 변형율속도와 초기 재료의 높이 또는 반경에 대하여 마찰상수가 작을수록, 또한 압출비가 작을수록 입구 압출속도는 증가함을 알 수 있다.

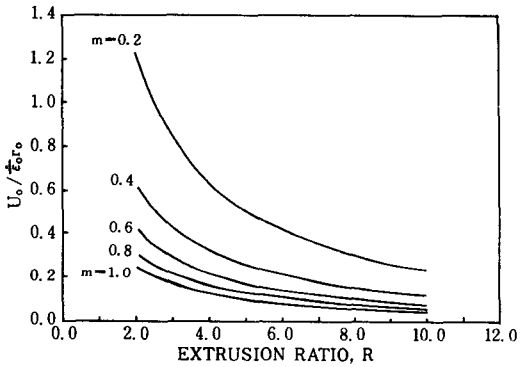
압출비에 따른 금형길이 L을 무차원수  $L/H_0$ 와  $L/r_0$



(a) Plane Strain



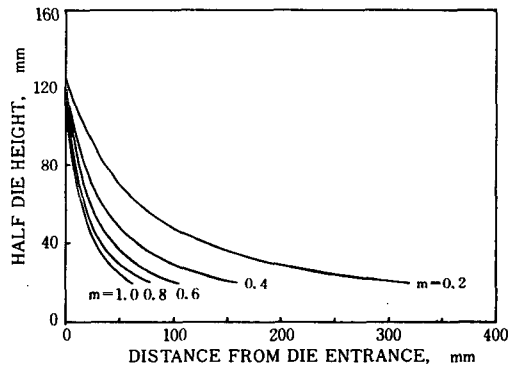
(b) Axisymmetric



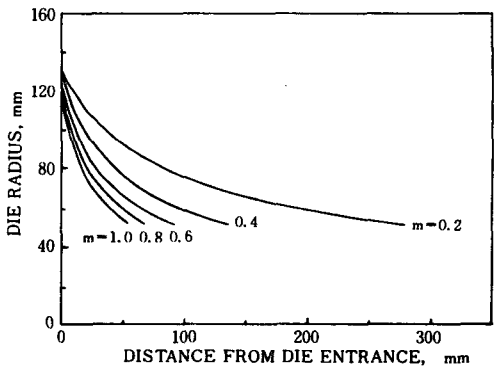
(b) Axisymmetric

Fig. 3 Change of dimensionless die entrance velocity with extrusion ratio.

Fig. 4 Change of dimensionless die length with extrusion ratio.



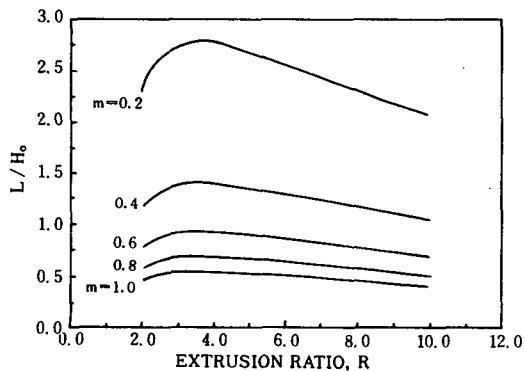
(a) Plane Strain



(b) Axisymmetric

Fig. 5 Die shapes for constant strain rate extrusion.

로 나타내면 Fig. 4와 같다. 이 관계는 식 (7) 과 (16) 또는 (10) 과 (17)로부터 얻을 수 있다. 평면변형 압출인 경우에는 마찰상수  $m$  값이 증가할수록 금형 길이는 짧아지며 일정한  $m$  값에 대하여 압출비가 증가함에 따라 금형 길이는 일정 구간까지는 길어지다가 점차로 짧



(a) Plane Strain

아지는 경향을 나타내고 있다. 축대칭 압출인 경우에는  $m$  값이 증가할수록 금형 길이는 짧아지고 압출비가 증가할수록 금형 길이는 길어지나 어느 시점의 압출비 이상에서는 거의 일정한 값을 나타내고 있음을 보여주고

있다.

Fig. 5는  $m$  값에 따른 금형형상을 나타낸 것이며 평면변형 및 축대칭 압출의 경우 모두 압출비 6.56, 초기높이  $H_0$  및 초기반경  $r_0$ 가 130.2mm이다. 마찰상수가 작을수록 금형 길이가 현저히 길어짐을 알 수 있다.

### 5. 유한요소 해석

이론 해석 결과를 검증하는 방법에는 실험에 의존하는 physical simulation과 유한요소 해석에 의한 simulation 등이 있으며, 본 논문에서는 변형구간 내의 변형률속도 분포를 확인하기 위하여 유한요소 해석을 수행하였다.

해석에 사용된 프로그램은 변형률속도 의존성 재료의 구성식을 이용한 강·점소성 유한요소 프로그램(5)이며 벌칙함수(penalty function)를 도입한 범함수를 최소화시키므로써 축대칭 압출 해석이 가능하다.

유한요소 해석은 원추형 금형과 본 논문에서 설계된 금형에 대하여 각각 수행하였으며 이 경우 빌렛반경 10mm, 압출비 6.56, 마찰상수 0.23에 대하여 요구 변형률속도를  $1.3 \times 10^{-3}/\text{sec}$ 로 하였다.

각각의 금형 형상에 대한 변형률속도 분포를 Fig. 6에 나타내었으며 본 논문에서 설계된 금형형상이 원추형 금형 형상보다 요구 변형률속도가 넓게 분포하고 있음을 알 수 있다.

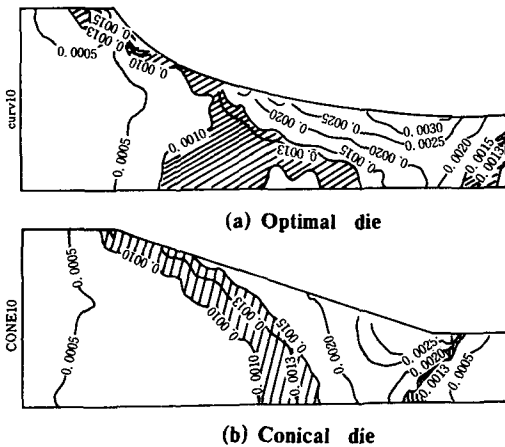


Fig. 6 Effective strain rate distribution.

### 6. 결론

변형률속도에 민감한 재료의 평면변형 및 축대칭 전방 압출에서 재료의 변형률속도를 제어하기 위한 금형형상을 설계하고 유한요소 해석을 행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 최적의 초기 압출속도를 구하기 위하여 상계해석을 수행함으로써 식(7) 및 (10)에서의 공정 변수를 줄일 수 있었다.
2. 최적의 입구 압출속도가 정해지므로써 금형과 재료 사이의 경계면 마찰을 고려한 금형 형상을 결정할 수 있었다.
3. 이론해석 결과에 따른 축대칭 압출 금형 형상에 대하여 강·점소성 유한요소 해석을 한 결과 본 논문에서 구해진 금형 형상이 기존의 원추형 금형보다 변형 영역에서 더 균일한 변형률속도 분포를 나타내었으며, 이는 속도 민감성 재료의 변형률속도 제어를 위해 제안된 금형형상 및 초기압출 속도가 타당함을 보여 준다.

### 참 고 문 헌

1. J. C. Malas, H. L. Gegel, J. S. Gunasekera, J. T. Morgan and S. M. Doraivelu, "Computer-Aided Design of Extrusion Dies by Metal-Flow Simulations", Computers in Engineering 1983, T. J. Cokonis (Ed.), American Society of Mechanical Engineers, New York, 1983, pp. 137-142
2. R. Srinivasan, J. S. Gunasekera, H. L. Gegel and S. M. Doraivelu, "Extrusion through Controlled Strain Rate Dies", J. Materials Shaping Technology, Vol. 8, No. 2, 1990, pp. 133-141
3. J. S. Lee, S. S. Hong and N. C. Cho, "An Optimal Extrusion of Rate Sensitive Materials", Proc. Int. Conf. Superplasticity in Advanced Materials, 1991, pp. 777-782
4. B. Avitzur, "Metal Forming: Processes and Analysis", McGraw-Hill, New York, 1968
5. 최재찬, 김병민, 최인근, 이종수, 홍성석, 조남춘, "속도의존성 재료에 대한 축대칭 전방압출의 유한요소 해석", 대한기계학회논문집, Vol. 15, No. 12, 1991, pp. 536-543

부 록

A. 평면변형 압출

Fig. 2와 같은 균일한 유동을 고려하면 체적 일정 조건으로부터 속도장은

$$U_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_0 x + U_0$$

$$U_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_0 y$$

$$U_z = 0$$

따라서 변형율속도 성분은 다음과 같다.

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_0$$

$$\dot{\epsilon}_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_0$$

$$\dot{\epsilon}_z = 0$$

경계면  $S_1$  및  $S_3$ 에서의 속도 불연속 성분은

$$\Delta U_1 = \Delta U_3 = U_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{\epsilon}_0 y$$

이고 이 때  $dS_1 = dS_3 = dH$ 이다.

한편  $S_2$ 에서의 속도 불연속 성분  $\Delta U_2$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta U_2 = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$$

이 경우

$$dS_2 = \frac{dH}{\sin \alpha} \quad \text{이다.}$$

따라서

$$\dot{W}_i = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sigma_0 H_0 U_0 \ln R$$

$$\dot{W}_{s1} = \frac{\dot{\epsilon}_0 \sigma_0 H_0^2}{2} \quad \dot{W}_{s3} = \frac{\dot{\epsilon}_0 \sigma_0 H_0^2}{2R^2}$$

$$\dot{W}_f = -\frac{2 m \sigma_0 U_0^2}{3 \dot{\epsilon}_0} (R^2 - 1) + \frac{1}{2} m \sigma_0 \dot{\epsilon}_0 H_0^2 (R^2 - 1)$$

이고

$$J = \dot{W}_i + \dot{W}_{s1} + \dot{W}_{s2} + \dot{W}_f$$

이며 입구에서의 최적속도를 구하기 위하여  $J$ 를  $U_0$ 에

대하여 최소화하면

$$U_0 = \frac{\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0 H_0 \ln R}{m(R^2 - 1)}$$

B. 축대칭 압출

축대칭 압출의 경우 속도장은

$$U_z = U_0 + \dot{\epsilon}_0 z$$

$$U_r = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_0 r$$

$$U_\theta = 0$$

이므로 변형율속도 성분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\theta = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_0$$

$$\dot{\epsilon}_z = \dot{\epsilon}_0$$

한편 경계면  $S_1$  및  $S_3$ 에서의 속도 불연속 성분은

$$\Delta U_1 = \Delta U_3 = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_0 r$$

이며  $S_2$ 에서의 속도 불연속 성분  $\Delta U_2$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Delta U_2 = \sqrt{U_r^2 + U_z^2} = \left[ \frac{1}{4} \dot{\epsilon}_0^2 r^2 + (U_0 + \dot{\epsilon}_0 z)^2 \right]^{1/2}$$

따라서

$$\dot{W}_i = 2\pi \sigma_0 U_0 r_0^2 \ln R$$

$$\dot{W}_{s1} = \frac{\pi \sigma_0 r_0^3}{3\sqrt{3}} \dot{\epsilon}_0$$

$$\dot{W}_{s3} = \frac{\pi \sigma_0}{3\sqrt{3}} \frac{r_0^3}{R^{3/2}} \dot{\epsilon}_0$$

$$\dot{W}_f = -\frac{\pi r_0 m \sigma_0}{2\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0} \left[ \frac{8}{3} (R^{3/2} - 1) U_0^2 - \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_0^2 r_0^2 (R^{3/2} - 1) \right]$$

이로부터 최적속도  $U_0$ 는 다음과 같다.

$$U_0 = \frac{3\sqrt{3} \dot{\epsilon}_0 r_0}{8m} \frac{\ln R}{(R^{3/2} - 1)}$$