

# Shell 구조물의 비선형 동적응답 해석에 관한연구

배 동 명 · 진 종 대

부산수산대학교

(1992년 2월 20일 접수)

## A Study on the Nonlinear Analysis of Dynamic Response of Shell Structure

Dong-Myung BAE and Jong-Dae JIN

National Fisheries University of Pusan

(Received February 20, 1992)

This is analyzed using the finite element method which is applying excellent isoparametric curve element in the aspect of large usages of dynamic responses in which is regarding geometric and material nonlinear of a large scale shell structure of an airplane, a submarine, a ship, and an ocean structure.

The solution of dynamic equations is got by direct integration method using time-stepping procedure and regarding Central Difference Method of the both solutions.

But because formal matrix factorization is not necessary in each time step and it does not take less time to compute relatively, this method must be regarded very few time steps on the condition. Axisymmetric shell problems are inspected using 8 node Isoparametric element in this paper.

Partial axisymmetric spherical shell is used as a model to analyze axisymmetric nonlinear dynamic behavior regarding Total Lagrangian formulation in geometric nonlinear behavior and elastio-viscoplastic in material nonlinear behavior.

### 기호정의

$\epsilon_e$  : 탄성변형률  
 $\epsilon_{vp}$  : 점소성변형률  
 $d\epsilon$  : 변형률증분  
 $\mu$  : 점성계수  
 $\xi, \eta$  : *Natural Coordinates*  
 $\Omega$  : *Domain of interest*  
 $\delta u$  : 가상변위벡터  
 $\Gamma_t$  :  $t_n$ 를 지정하는 경계 부분

$D$  : 탄성 행렬  
 $(d\epsilon_{ij})_P$  : 변형률증분동안 일어나는 변형률의 소성성분  
 $J, J^{(e)}$  : *Jacobian* 행렬과 요소의 *Jacobian* 행렬  
 $K, K^{(e)}$  : 강성행렬, 요소 강성행렬  
 $f_s, f_s^{(e)}$  : 탄성력과 요소 탄성력 벡터  
 $f_b, f_b^{(e)}$  : 물체력 벡터와 요소 물체력 벡터  
 $f_r, f_r^{(e)}$  : 경계항력과 요소의 경계항력 벡터  
 $b_n$  : 적용되는 물체력 벡터

- $t_n$  : 표면 항력 벡터
- $[d_i^{(e)}]_n$  : 절점 변위 벡터
- $F$  : 항복함수
- $\gamma$  : 유동성 계수
- $B$  : 변형률 행렬
- $E_n$  : Green 변형률의 행렬
- $\epsilon_L, \epsilon_{NL}$  : 선형, 비선형 변형률

## 서 론

오늘날 해양 및 해저자원의 개발과 비축, 우주 및 항공산업에 대한 관심의 증대로 해양 구조물과 해저 탐사용 수중 장비, 항공우주장비, 원자로 등 여러분야에 Shell 구조와 Shell 형상 부재의 활용이 급증하게 됨에 따라, Shell 구조의 엄밀한 동적 거동 및 강도 해석이 주요 연구 과제로 등장하게 되었다. 그러나 이러한 Shell 구조는 그 형상이 복잡하고, 변형대상이 하중이나 경계조건에 민감할 뿐 아니라, 실제 Shell 구조의 조작성에서 초기변형을 피할수 없으며, 때로는 Shell 구조가 탄성한도 이상의 하중을 받게 되는 경우가 있다<sup>1),6)~10)</sup>. 따라서 Shell 해석의 구성방정식은 본질적으로 비선형이 되어 탄성이론으로는 해결이 거의 불가능한 실정이다. 특히 우수성과 그 위력이 확인된 유한요소법의 이용으로 Shell의 비선형문제해석은 많은 진전을 보아 오고는 있으나 Shell의 *impulse, blast, impact* 또는 *earthquake* 하중과 같은 불규칙한 *time-varying loads*를 받을 때의 정적 비선형 응답 해석은 많은 반복계산에도 불구하고 그 결과가 부정확하며, Shell의 형태, 재료의 탄점소성 효과 초기변형등이 극한하중과 동적 거동에 미치는 영향들은 아직 정확히 밝혀져 있지 않은 실정이다<sup>2-5)</sup>. 대규모 Shell 구조물의 기하학적 및 재료의 비선형성을 고려한 동적 응답의 특성을 범용성의 점에 있어서 우수한 *Isoparametric* 곡면 요소를 적용한 유한요소법을 이용하여 해석해 보았다. 운동방정식의 해는 *time-stepping*

*procedure*를 이용한 직접적분법으로서, 양해의 *Central Difference Method*를 고려하였다. 단, 이 방법은 각 *Time step* 중, *Formal matrix factorisation*이 필요하지 않으므로, 상대적으로 *computational effort*가 적지만, 조건에 따라 안정하므로 아주 적은 *time step*을 고려해야 한다<sup>2),11)</sup>. 본 논문에서는 8절점 *isoparametric* 요소를 이용하여 축대칭 Shell 문제를 검토하였다. 기하학적 비선형 거동은 *Total Lagrangian Formulation*을 고려하고, 재료 비선형 거동은 탄점소성을 고려하는 것으로 하여, 축대칭 반구각의 비선형 동적 응답에 관한 해석을 위해서 부분 축대칭 반구각을 *test* 모델로 하여 해석해 보았다<sup>12-13)</sup>.

## 재 료 모 델

비탄성 변형과정에서 *time rate effect*는 구조 재료에 언제나 어느 정도 나타나며, 정상온도, 정적하중조건하에서 구조성분의 거동에 *time rate effect*는 일반적으로 중요하지 않으나 구조물의 동적 과도상태 하중 (*Dynamic Transient Loading*)인 경우에 반드시 고려되어야하며, 재료에서 *Visco-plasticity* 현상은 시간 종속적인 소성변형에서 나타난다<sup>2),5)</sup>. 재료가 초기항복에 이를때까지 탄성계수에 따라 변형하다가 하중이 증대함에 따라 재료는 선형 변형을 경화에 의해서,  $E_T$  (*Tangential modulus*)에 따라서 변형된다고 가정한다. 또 변형율이 탄성성분과 소성(점소성)성분으로 분리된다고 가정하면, 전 변형율은,

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \text{ (OR } \epsilon_{vp}) \quad (1)$$

응력은,

$$\sigma_e = \sigma = E \epsilon_e \quad (2)$$

로 된다.

한편, 변형율의 증분이 탄소성성분으로 분리된다

고 가정하면,

$$d\epsilon = d\epsilon_e + d\epsilon_p \quad (3)$$

로 되며, 선형 변형을 경화 변수  $H'$ 는,

$$H'(\bar{\epsilon}_p) = \frac{d\sigma}{d\bar{\epsilon}_p} = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon_e} = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (4)$$

로 정의된다.

점소성 변형의 시작은 일축응력의 항복응력,  $\sigma_Y$ 에 의해서 결정되며, 연속적인 점소성흐름에 대한 응력은 재료의 변형을 경화 특성에 따르므로, 점소성 항복에 대한 응력은

$$Y = \sigma_Y - H' \epsilon_{vp} \quad (5)$$

로 된다.

그리고, 탄-소성재료와 탄-점소성재료는 Fig. 1, (a), (b)와 같이 모델화 되며, *friction slider*의 응력은

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \sigma \quad \text{if} \quad \sigma_p < Y \\ \sigma_p &= Y \quad \sigma_p \geq Y \end{aligned} \quad (6)$$

로 정의한다.

점성 *dashpot*의 응력  $\sigma_d$ 는,

$$\sigma_d = \mu \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} \quad (7)$$

점성계수  $\mu$ 에 의해서 점소성 변형률과 관계 지워진다. 그리고, 전응력은 다음과 같다.

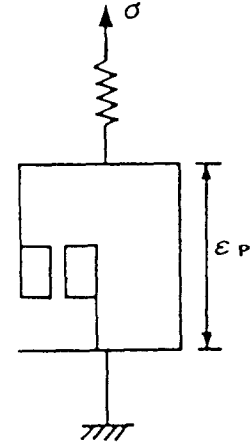
$$\sigma = \sigma_d + \sigma_p \quad (8)$$

이제, 탄성과 탄-점소성 조건하에서 모델에 대한 관계를 설정해 보면, 점소성 항복전에 적용되는 식(1), (2)을 고려하고, 탄성응력-변형률 관계에서,

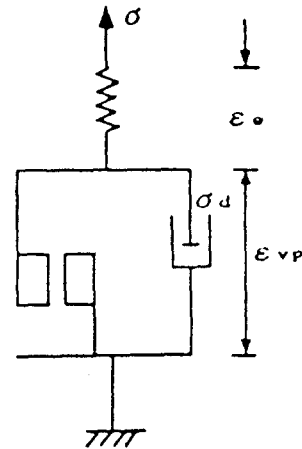
$$\sigma = E\epsilon \quad (9)$$

이므로 식(6), (7)을 식(8)에 대입하면,

$$\begin{aligned} \sigma &= \mu \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} + Y \\ &= \sigma_Y + H' \epsilon_{vp} + \mu \frac{d\epsilon_{vp}}{dt} \end{aligned} \quad (10)$$



(a) Elasto-Plastic model



(b) Elasto-Visoplastic model

Fig. 1. Material Model.

로 된다.

따라서, (1), (2)를  $\epsilon_{vp}$ 에 대입하면 점소성 조건하에서 응력과 변형률 사이의 시간종속 관계되는 1계 상미분방정식이,

$$H' E \epsilon + \mu E \frac{d\epsilon}{dt} = H' \sigma + E(\sigma - \sigma_Y) + \mu \frac{d\sigma}{dt} \quad (11)$$

로 되고, 이 식에 유동성 계수  $\gamma = (\frac{1}{\mu})$ 를 도입하면, 식(11)에서

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma[\sigma - (\sigma_Y + H' \epsilon_{vp})] \quad (12)$$

로 된다. 즉,

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_{vp} \quad (13)$$

따라서, 정상상태 항복치를 초과하는 응력부분에 대한 점소성의 변형률속도 (strain rate)는 다음 식으로 정의된다.

$$\dot{\epsilon}_{vp} = \gamma[\sigma - (\sigma_Y + H' \epsilon_{vp})] \quad (14)$$

## 이론 해석

### 1. Isoparametric 요소를 사용한 정식화

2차원 축대칭 문제의 재료는 선형 등방성 변형을 경화율 가지는 Von Mises<sup>2)</sup> 항복 조건에 지배를 받는 것으로 가정한다. 본 연구의 반구각 (hemispherical cap shell) 구조물 해석을 위해서 isoparametric 요소를 고려하면, 형상 함수는 다음과 같이 된다<sup>14)</sup>.

모서리 절점에서,

$$N_i^{(e)} = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1) \quad (15)$$

$$i = 1, 3, 5, 7$$

변 중앙절점에서,

$$N_i^{(e)} = \frac{\xi_i^2}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2) + \frac{\eta_i^2}{2}(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2) \quad (16)$$

$$i = 2, 4, 6, 8$$

로 된다.

구조물이 물체력  $\mathbf{b}$ 를 받으면 가상일의 원리에 의한 평형방정식은

$$\int_{\Omega} [\delta\epsilon]^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} [\delta\mathbf{u}]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} [\delta\mathbf{u}]^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (17)$$

로 된다.

변위, 변형률, 가상변위, 가상 변형률은 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i, \quad \delta \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \delta \mathbf{d}_i \quad (18)$$

$$\epsilon_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i, \quad \delta \epsilon_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \delta \mathbf{d}_i \quad (19)$$

식 (18), (19)를 식 (17)에 대입하면,

$$\sum_{i=1}^n [\delta \mathbf{d}_i]^T \left\{ \int_{\Omega} [\mathbf{B}_i]^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} [\mathbf{N}_i]^T \mathbf{t} d\Gamma \right\} = 0 \quad (20)$$

로 된다.

Isoparametric 요소를 사용함으로써, 요소내  $x, y$  좌표에 대해서 고려해보면,

$$\begin{pmatrix} x^{(e)} \\ y^{(e)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^r \begin{pmatrix} \mathbf{N}_i^{(e)} & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_i^{(e)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i^{(e)} \\ y_i^{(e)} \end{pmatrix} \quad (21)$$

여기서, Jacobian matrix는,

$$\mathbf{J}^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{N}_i^{(e)}}{\partial \xi} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{N}_i^{(e)}}{\partial \xi} y_i^{(e)} \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{N}_i^{(e)}}{\partial \eta} x_i^{(e)} & \sum_{i=1}^r \frac{\partial \mathbf{N}_i^{(e)}}{\partial \eta} y_i^{(e)} \end{pmatrix} \quad (22)$$

로 되며, 변형률-변위 관계에서,

$$\epsilon^{(e)} = \sum_{i=1}^r \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{d}^{(e)}, \quad (23)$$

$$\mathbf{u}^{(e)} = \sum_{i=1}^r \mathbf{N}_i^{(e)} \mathbf{d}_i^{(e)}, \quad (24)$$

이산화요소의 체적은

$$d\Omega^{(e)} = h^{(e)} \det \mathbf{J}^{(e)} d\xi d\eta \quad (25)$$

관성력과 감쇠력을 고려한 단위 체적당 물체력은,

$$\mathbf{b}_n - \rho_n \ddot{\mathbf{u}}_n - \mathbf{c}_n \dot{\mathbf{u}}_n \quad (26)$$

식 (26)를 식 (20)에 대입하면

$$\int_{\Omega} [\delta \epsilon_n]^T \sigma_n d\Omega - \int_{\Omega} [\delta u_n]^T [b_n - \rho_n \ddot{u}_n - c_n \dot{u}_n] d\Omega - \int_{\Gamma} [\delta u_n]^T t_n d\Gamma = 0 \quad (27)$$

로 된다.

변위, 변형율, 가상변위, 가상변형율은 각각

$$u_n = \sum_{i=1}^m N_i [d]_n \quad \delta u_n = \sum_{i=1}^m N_i [\delta d]_n \quad (28)$$

$$\epsilon_n = \sum_{i=1}^m B [d]_n \quad \delta \epsilon_n = \sum_{i=1}^m B [\delta d]_n \quad (29)$$

로 되며, 속도, 가속도 성분은 각각

$$\dot{u}_n = \sum_{i=1}^m N_i [\dot{d}]_n, \quad \ddot{u}_n = \sum_{i=1}^m N_i [\ddot{d}]_n \quad (30)$$

여기서, 식 (28), (29), (30)을 식 (27)에 대입하여 정리하면,

$$[p]_n - [f_{B_i}]_n + [f_{f_i}]_n + [f_{D_i}]_n - [f_{T_i}]_n = 0 \quad (31)$$

## 2. 등가절점력

변위법에 의한 구조물 유한요소해석에서 초기 응력과 다른 하중형식은 절점에서의 집중하중의 규정에 종속한다. 따라서, 하중형식(분포하중)은 문제를 풀기 전에 등가절점력으로 환산해야 한다. 즉 어떤 요소변에 수직방향, 접선방향의 단위길이 당 분포하중이 작용할 경우 하중이 가하여지는 요소의 변을 구성하는 3절점에서의 수직방향, 접선방향의 값으로 분포하중을 정의한다.<sup>1,2)</sup>

이제, 본 논문에서는 Gravity Load, Point Load, Thermal Load 등의 경우는 생각하지 않고, 변을 따라 작용하는 분포 하중만 고려한 2차

원 축대칭에서, Parabolic Isoparametric 2차원 축대칭 요소의 변에 적용되는 수직, 접선방향, 분포하중의 3 절점 값을 각각  $(P_n)_i$ ,  $(P_t)_i$ , 단,  $(i=1\sim 3)$ 라 하면 요소변을 따르는 접선을 정의하는 3개의 형상함수를  $N_1, N_2, N_3$ 라 하자. 하중이 가해진 변을 따라 어떤점에서의 분포하중의 크기는

$$\begin{pmatrix} P_n \\ P_t \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i \begin{pmatrix} (P_n)_i \\ (P_t)_i \end{pmatrix} \quad (32)$$

로 되고,  $x, y$  방향에 작용하는 힘의 성분과 체적을 고려해 보면,

$$dP_x = (P_n \frac{\partial x}{\partial \xi} - P_t \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi \quad (33)$$

$$dP_y = (P_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + P_t \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi$$

으로 된다.

절점  $i$ 에 대한 절점력은 다음과 같다.

$$P_{x_i}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} (P_n \frac{\partial x}{\partial \xi} + P_t \frac{\partial y}{\partial \xi}) d\xi \quad (34)$$

$$P_{y_i}^{(e)} = \int_{\Gamma^{(e)}} N_i^{(e)} (P_n \frac{\partial y}{\partial \xi} + P_t \frac{\partial x}{\partial \xi}) d\xi$$

## 3. 탄-점소성 문제에 관한 이론(재료에 의한 비선형성)

비선형 연속체 문제의 일반적인 방법에서 전 변형율 속도와 전응력 속도는

$$\dot{\epsilon}_n = [\dot{\epsilon}_e]_n - [\dot{\epsilon}_{vp}]_n \quad (35)$$

$$\sigma_n = D [\dot{\epsilon}_e]_n \quad (36)$$

로 되고, 점소성흐름은  $F > F_0$ 인 범위내에서만 발생한다고 가정하면, 점소성거동의 시작은 식 (37)의 scale 항복조건에 의해서 결정되므로

$$F(\sigma, \epsilon_{vp}) - F_0 = 0 \quad (37)$$

로 된다.

Table 1. Constants defining the yielding surface, Effective stress and Uniaxial yield stress levels for Von-mises Yield Criteria included in the Elasto-Plastic Computer cope

Yield criterion	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	Equation No.	Stress level Uniaxial
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0	$(J_2')^{1/2} = k(\mathbf{x})$ $3(J_2')^{1/2} = \sigma_V(\mathbf{x})$	$3(J_2')^{1/2}$

점소성 변형률 속도는

$$[\dot{\epsilon}_{vp}]_n = f(\sigma) \quad (38)$$

점소성유동 규칙에 의하면,

$$[\dot{\epsilon}_{vp}]_n = \gamma \langle \Phi_n(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \quad (39)$$

로 되고, 함수  $\Phi$ 는

$$\Phi_n(F) = \left( \frac{F - F_0}{F_0} \right)^n \quad (40)$$

단, 항복이 일어나면 :  $\langle \Phi_n(F) \rangle = 0$

항복이 일어나지 않으면 :  $\langle \Phi_n(F) \rangle = 1$

\* 점소성 변형률의 증분 :

식(39)의 변형률 속도 법칙에  $\epsilon_{vp}$ 에 대해 *Explicit time stepping* 법을 사용해서 시간구간  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ 에서 일어나는 변형률의 증분  $\Delta \epsilon_{vp}^n$ 는

$$\Delta \epsilon_{vp}^n = \Delta t_n [(1 - \Theta) \dot{\epsilon}_{vp}^n + \Theta \dot{\epsilon}_{vp}^{n+1}] \quad (41)$$

Taylor 급수를 이용하면

$$\dot{\epsilon}_{vp}^{n+1} = \dot{\epsilon}_{vp}^n + \mathbf{H}^n \Delta \sigma^n \quad (42)$$

여기서,

$$\mathbf{H}^n = \left( \frac{\partial \dot{\epsilon}_{vp}}{\partial \sigma} \right)^n = \mathbf{H}^n(\sigma^n) \quad (43)$$

따라서,

$$\begin{aligned} [\Delta \epsilon_{vp}]^n &= \Delta t_n \{ (1 - \Theta) [\dot{\epsilon}_{vp}]^n + \Theta ([\dot{\epsilon}_{vp}]^n + \mathbf{H}^n \Delta \sigma^n) \} \\ &= [\dot{\epsilon}_{vp}]^n \Delta t_n + \Theta \Delta t_n \mathbf{H}^n \Delta \sigma^n \quad (44) \end{aligned}$$

$\Theta = 0$ 이면 점소성 변형률의 증분은 아래와 같다.

$$\Delta \epsilon_{vp}^n = \dot{\epsilon}_{vp}^n \Delta t^n \quad (45)$$

\* 응력 증분 :

식(36)의 증분형식을 사용하면,

$$\Delta \sigma^n = \mathbf{D} \Delta \epsilon_e^n = \mathbf{D} (\Delta \epsilon^n - \Delta \epsilon_{vp}^n) \quad (46)$$

변위증분에 관한 전변형율은,

$$\Delta \epsilon^n = \mathbf{B}^n \Delta \mathbf{d}^n \quad (47)$$

식(45), (47)을 식(46)에 대입하면 응력증분은,

$$\Delta \sigma^n = \mathbf{D}^n (\mathbf{B}^n \Delta \mathbf{d}^n - \dot{\epsilon}_{vp}^n \Delta t^n) \quad (48)$$

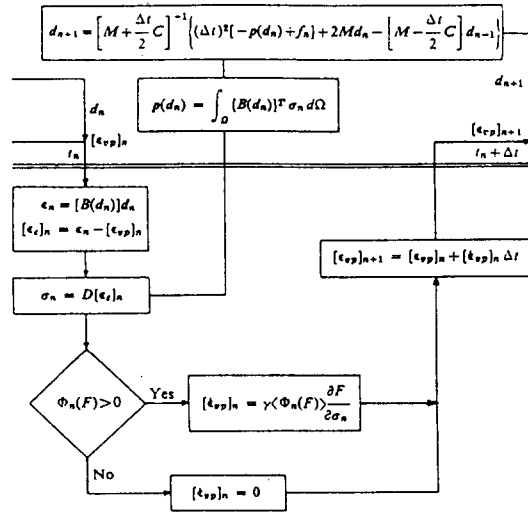
로 된다.

단, 변형률 행렬  $\mathbf{B}^n$ 가 상수로 되지 않을 경우, 즉, 대변형이 고려되면

$$\mathbf{B}^n = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_n^n \quad (49)$$

로 된다.

이제 시간  $t_n + \Delta t$ 에서 변위는 *Explicit* 하게 주어지는 탄-점소성 변형률에 대해서 나타내어 보면 Fig. 2와 같다.



여기서,  $[d_i]_n$  ; Nodal displacement

Fig. 2. Algorithm for elasto viscoplastic straining during a time step.

#### 4. 기하학적 비선형성

구조물의 동적하중에 의해서 비선형 영역까지 응력의 증대가 기끔씩 일어나며, 기하학적 비선형의 영향을 설명하는데, 고려해야 할 요소로서,  $\mathbf{B}(d_n)$ 의 수정,  $\mathbf{J}_D(d_n)$ 를 사용해서 변형률을 계산한다. 전 *Lagrange* 정식화에서, *Green* 변형률의 행렬은

$$\mathbf{E}^n = \frac{1}{2} [(\mathbf{J}_D)_n^T (\mathbf{J}_D)_n - \mathbf{I}] \quad (50)$$

로 되고, *Green* 변형율은

$$\epsilon_n = [\epsilon_L]_n + [\epsilon_{NL}]_n \quad (51)$$

로 된다.

여기서,

$$[\epsilon_{NL}]_n = \frac{1}{2} [A_\theta]_n \theta_n \quad (52)$$

$$\theta_n = \sum_{i=1}^m G_i [d_i]_n$$

가상변위에 대응하는 가상 Green 변형율은

$$[\delta\epsilon]_n = [\delta\epsilon_L]_n + [A_\theta]_n \delta\theta_n \quad (53)$$

로 된다.

식(27)의 가상일의 식에서

$$\int_{\Omega} [\delta\epsilon_n]^T \sigma_n d\Omega - \int_{\Omega} [\delta u_n]^T [b_n - \rho u_n - c u_n] d\Omega - \int_{\Gamma} [\delta u_n]^T t_n d\Gamma = 0 \quad (54)$$

로 된다.

### 5. Explicit 시간적분법

\* 중앙차분법 :

임의의 시간  $t_n$ 에서, 식(31)을 바꾸어 쓰면

$$M \dot{d}_n + C d_n + p_n = f_n \quad (55)$$

차분식을 사용한 가속도, 속도의 근사치를 동적 평형방정식에 적용하여 중앙차분법으로 풀어보면,

$$\text{속도} : \dot{d}_n \simeq v_n = \frac{1}{2\Delta t} (d_{n+1} - d_{n-1}) \quad (56)$$

$$\text{가속도} : \ddot{d}_n \simeq a_n = \frac{1}{(\Delta t)^2} (d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1}) \quad (57)$$

식(56), (57)을 식(55)에 대입하면

$$M \left\{ \frac{d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1}}{(\Delta t)^2} \right\} + c \left\{ \frac{d_{n+1} - d_{n-1}}{2\Delta t} \right\} + p_n = f_n \quad (58)$$

로 되고, 위식을  $d_{n+1}$ ,  $d_n$ ,  $d_{n-1}$ 에 대해서 정리하면

$$d_{n+1} = [M + \frac{\Delta t}{2} C]^{-1} \times \left\{ (\Delta t)^2 [-p_n + f_n] \right.$$

$$\left. + 2M d_n - [M - \frac{\Delta t}{2} C] d_{n-1} \right\} \quad (59)$$

로 된다.

여기서,  $d_{n+1} = g(d_n, d_{n-1})$ 로 주어지게 된다. (60)

축대칭 문제에 이 식을 적용해 보면,

$$(d_{ui})_{n+1} = (m_{ii} + \frac{\Delta t}{2} c_{ii})^{-1} [(\Delta t)^2 \{- (p_{ui})_n + (f_{ui})_n\} + 2m_{ii} (d_{ui})_n - (m_{ii} - \frac{\Delta t}{2} c_{ii}) (d_{ui})_{n-1}] \quad (61)$$

$$(d_{vi})_{n+1} = (m_{ii} + \frac{\Delta t}{2} c_{ii})^{-1} [(\Delta t)^2 \{- (p_{vi})_n + (f_{vi})_n\} + 2m_{ii} (d_{vi})_n - (m_{ii} - \frac{\Delta t}{2} c_{ii}) (d_{vi})_{n-1}] \quad (62)$$

\* 시간구간의 임계치

Explicit 시간 적분법에서 적정한 시간구간의 선택은, 결과치의 정도와 안정성을 위해서 가능한 작은값이 요구되나, 경제적인 이유(컴퓨터의 CPU 사용시간 과대)때문에 가능한 큰 시간구간을 취하려한다. 전기의 서로 모순되는 문제에 대해서 조건부로 안정한 Explicit 법을 적용할 경우 안정성의 조건이 가장 중요하므로, 최소한의 안정성을 만족하는 범위 내에서 다른 조건을 고려해야 한다. 이와같은 논의에 따른 시간구간은

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (63)$$

로 주어지며, 여기서  $\omega_{max}$ 는 유한요소 mesh의 가장높은 원진동수이므로 이에대한 고유치 문제의 해를 구해야 하는 복잡한 절차를 피하기 위해서 (cf. 가장높은 계의 고유치는 개개요소의 가장높은 고유치보다 언제 작아야 한다) 다음의 근사식이 일반적으로, 축대칭 용력 문제에 사용된다.

$$\Delta t \leq \mu L \left\{ \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right\}^{1/2} \quad (64)$$

단, 탄·점소성 모델을 사용할 경우, 재료에 의

한 비선형성의 논의로부터  $0 < 1/2$  범위에서 적분 과정은 조건부로 안정하며 Euler의 수치시간적분은 어떤 임계치 보다 작은  $t_n$  값에 대해서만 수행될 수 있는 즉, 관계되는 점-소성  $Q=F$ 와 선형함수  $\Phi_n=F$ 에 대해서 시간구간길이는 Von Mises 항복기준을 적용할 경우에 다음과 같은 제한을 받는다. 즉,

$$\Delta t \leq \frac{4(1+\nu)F_0}{3\gamma E} \quad (65)$$

본 논문에서는 식 (64), (65)식을 만족하는 범위 내의 시간구간을 적절하게 잡았다.

### 해석결과 및 고찰

Fig. 3과 같이 60개의 mesh로 구성되는 축대칭 반구각(hemispherical shell cap)의 대칭성을 이용하여 그 반을 모델로 정하고, 경계조건은 주변고정으로 하였다.

재료 비선형성의 고려에 따른 외력의 작용과 소성흐름의 시작 사이에 시간지연(delay time)이 존재하므로, 결정방정식의 해를 얻기 위한 시간적분의 증분을  $0.4 \times 10^{-3} \text{sec}$ 로 하고, 하중 조건은 Fig. 4와 같이 균일한 충격하중으로서 하중 경과 시간/loading duration time)은 0.001초로 하고 하중의 크기는 800 psi로 하였으며, 과도상태 응답의 충분한 거동을 관찰하기 위해서, total time step의 수는 2500으로 하였다. 본 논문의 이론 해석과 수치 해석의 타당성 검증을 위해서는 10개의 요소를 갖는 부분 구각에 대해서 Kawai가 제안한 새로운 이산화 모델(RBSM)을 사용해서  $Toi^{14)}$  등이 해석한 결과와 비교하여, 잘 맞고 있음을 알 수 있으며, (Fig. 5) 또 유동성계수  $\gamma$  값을 100으로 하여 탄점소성 모델(Elasto-viscoplastic model)에 대해서는, Owen과 Hinton 등이 해석한 결과와 잘 맞고 있음을 알 수 있다.(Fig. 6)

Fig. 7은 충격하중을 받는 반구각 구조물의 재료 비선형성을 고려한 탄점소성 해석에 의한 정점(1절점)에서의 각 하중에 대한 수직방향 변위의 과도상태 응답으로서 900 psi 부터는 시간이 지남에 따라 재료의 발산응답의 거동을 보인다.

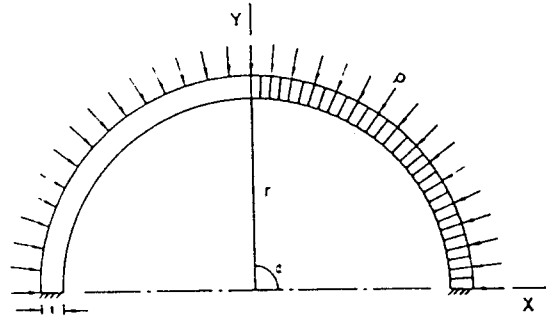


Fig. 3. Hemispherical shell cap and finite element mesh.

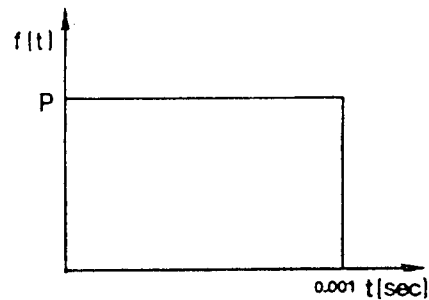


Fig. 4. Applied uniform impules load.

$R=22.27 \text{ in.}$ ,  $E=10.5 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ,  $\alpha=90^\circ$   
 $\nu=0.3$ ,  $\sigma_v=0.024 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ,  
 $\sigma=2.45 \times 10^{-4} \text{ lb-sec}^2/\text{in}^4$   
 $P=800 \text{ lb/in}^2$ ,  $E_T=0.21 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ,  $t=0.41 \text{ lb/in}^2$

Fig. 8은 재료 비선형성을 고려한 탄점소성 해석시의 유동성계수  $\gamma$ 를 100, 1000, 5000, 10000으로 했을때 정점에서의 수직방향 변위의 과도상태 응답으로서 탄점소성 해석시의 유동성 계수를 100 이하의 낮은 값을 취해야 한다.

Fig. 9, 10, 11은 4절점 요소와 8절점 요소의 탄성해석과 비선형성을 고려한 대변형해석 및 탄점소성해석에 의한 정점에서의 변위의 과도 상태 응답으로서 탄성해석과 탄성대변형해석의 경우 6t까지 비슷한 경향을 보이다가 그 이후의 응답은 4절점 요소인 경우의 피크치가 8절점 요소의 경우보다 현저히 크게 나타나고, 그 응답의 경향도 완전히 다름을 알 수 있다. 탄점소성인 경우는 4절점 요소 일때 과도상태 응답이 과도현상을 보임을 알 수 있다.



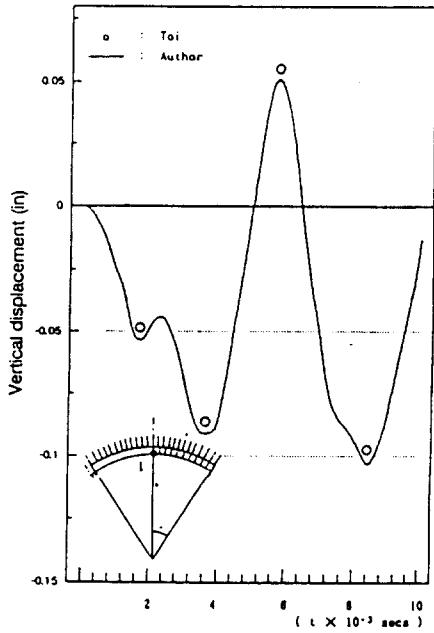


Fig. 5. Small elastic displacement response of the spherical shell cap under 600 psi uniform external step pressure.

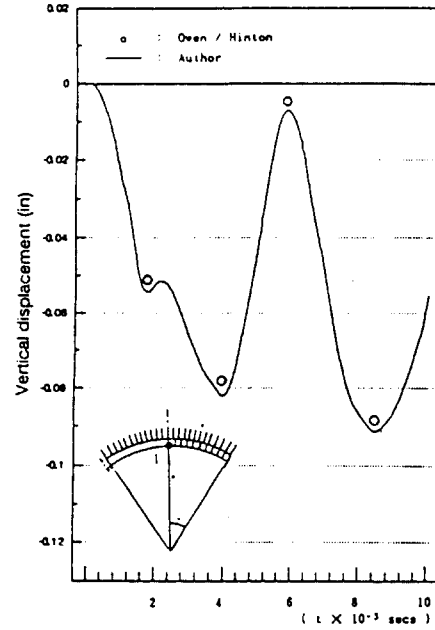


Fig. 6. Elasto-viscoplastic displacement response of the spherical shell cap under 600 psi uniform external step pressure.

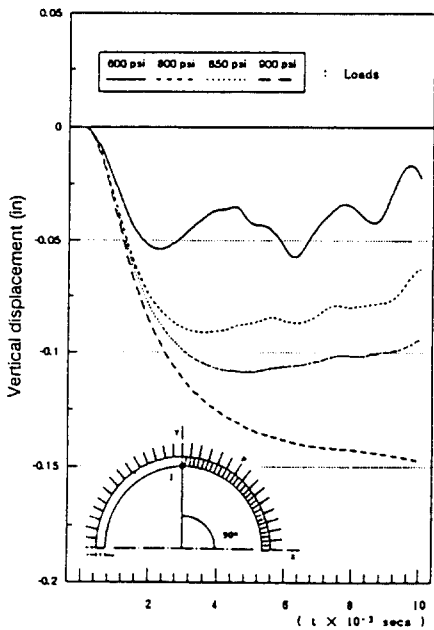


Fig. 7. Response of the vertical displacement according to loads for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap (for elasto-viscoplastic analysis with  $\gamma = 100$ ) at 1 node.

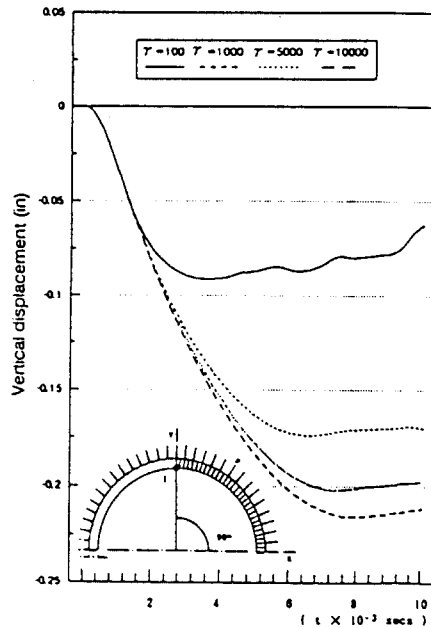


Fig. 8. Response of the vertical displacement according to  $\gamma$  for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap (for elasto-viscoplastic analysis) at 1 node.

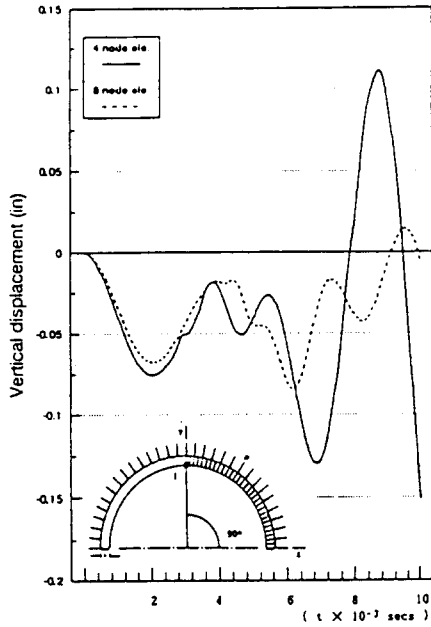


Fig. 9. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 1 node (small elastic).

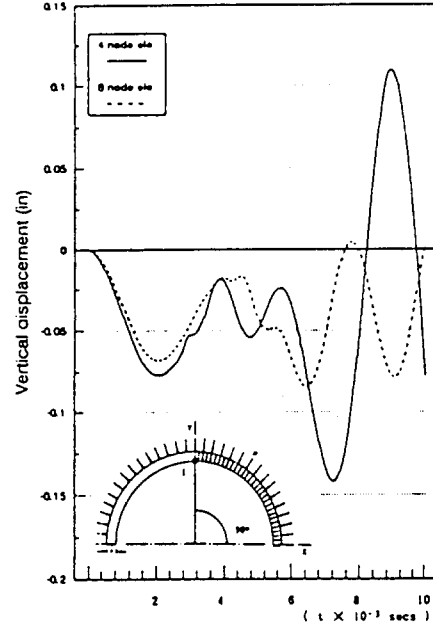


Fig. 10. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 1 node (large deformation).

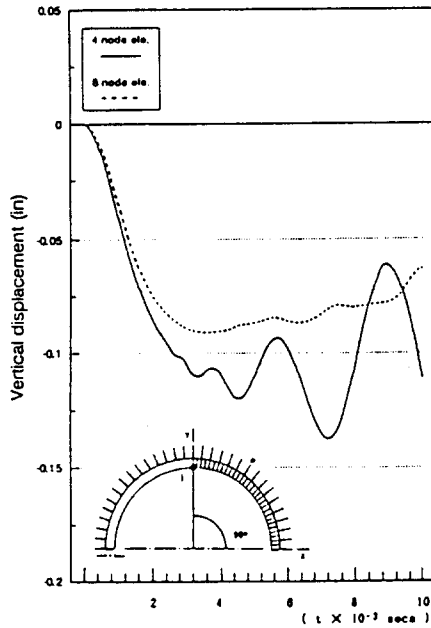


Fig. 11. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 1 node (elasto-viscoplastic).

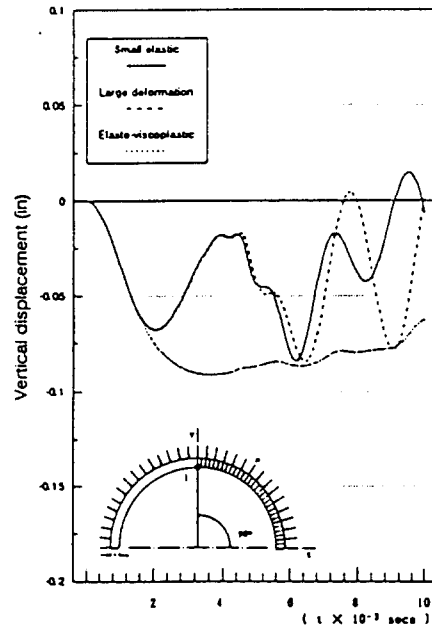


Fig. 12. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 1 node.

Fig. 12은 탄성해석과 기하학적 대변형해석 및 탄점소성해석에 의한 정점에서의 수직 변위의 과도 상태 응답으로서 탄성해석과 대변형해석의 경우 4t까지 서로 비슷한 경향을 보이다가, 4t에서 8t까지 대변형해석의 응답이 탄성의 경우 보다 오른쪽으로 약간 *shift* 되어지며, 8t에서 10t까지는 두 경우의 과도응답이 완전히 달라짐을 알 수 있다. 그리고, 탄점소성일 경우 2t 이후부터 위 두가지 경우와는 달리 변위의 과도응답에 파동현상이 거의 나타나지 않고 현저히 다른 특성을 보인다.

Fig. 13, 14은 51절점에서의 수직방향 및 수평방향 변위응답으로서 탄성해석과 대변형해석의 응답은 5t까지 비슷한 경향을 보이다가, 그 이후는 오른쪽으로 약간 *shift*되어지는 응답 특성을 나타냄을 알 수 있다. 탄점소성해석의 응답은 2t

이후 부터 앞의 두 경우와 현격한 차이가 남을 알 수 있고 정점에서의 경우와 같이 파동현상은 거의 보이지 않는다.

Fig. 15, 16은 101절점에서의 변위응답으로서 51절점에서의 응답특성과 거의 같은 경향을 보인다. 다만, 수직방향 변위응답보다 수평방향 응답이 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 17은 기하학적 및 재료의 비선형성의 비교 검토를 위해서 대변형해석과 탄점소성해석 및 탄소성해석에 의한 정점에서의 수직방향 응답으로서 2t 이후 부터 거동 특성이 현저히 달라지며, 대변형 해석의 경우, 이로 부터 음의 파동 현상이 나타나며, 6t 이후 부터는 *sine* 파 특성을 보인다. 재료 비선형성의 특성을 검토하기 위해서, 점성을 고려한 경우와 점성을 고려하지 않은 탄점소성인 경우의 응답 특성을 보면, 후자가 (큰 유

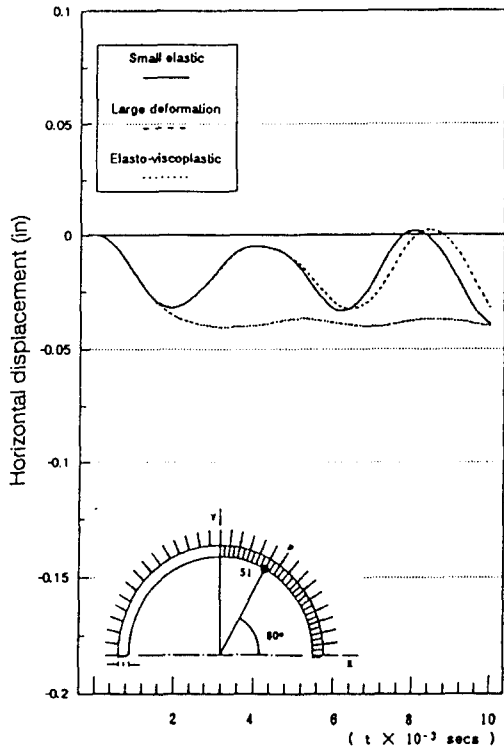


Fig. 13. Response of the horizontal displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 51 node.

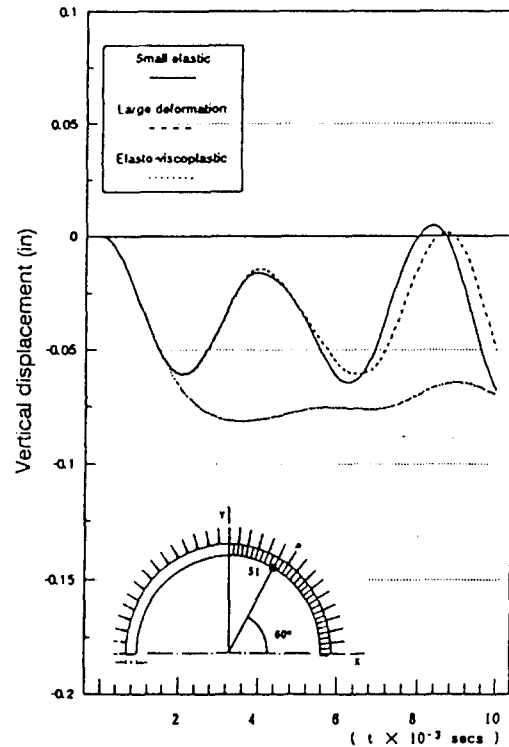


Fig. 14. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 51 node.

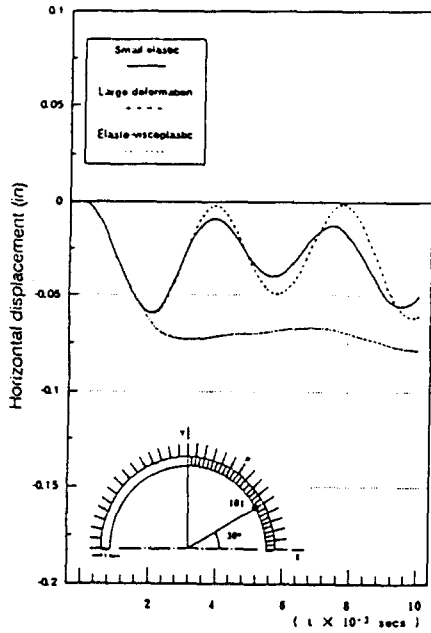


Fig. 15. Response of the horizontal displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 101 node.

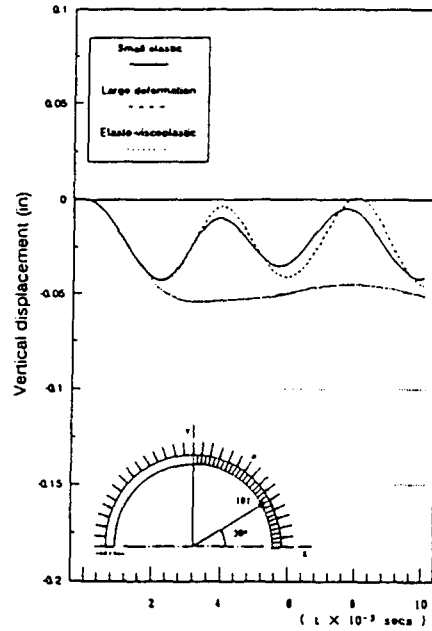


Fig. 16. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 101 node.

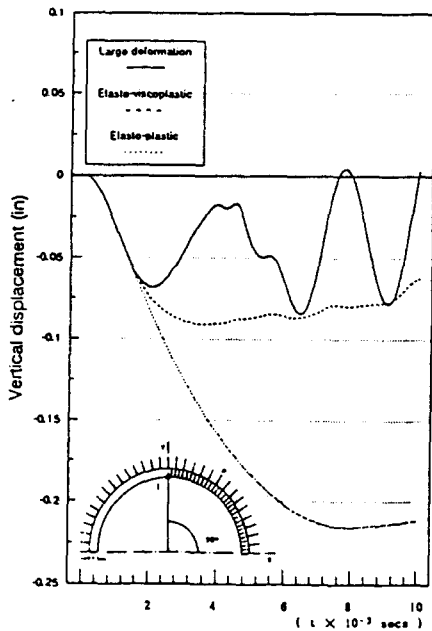


Fig. 17. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 1 node.

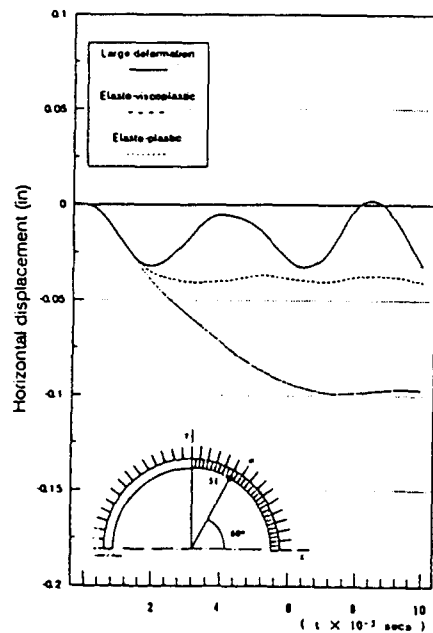


Fig. 18. Response of the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 51 node.

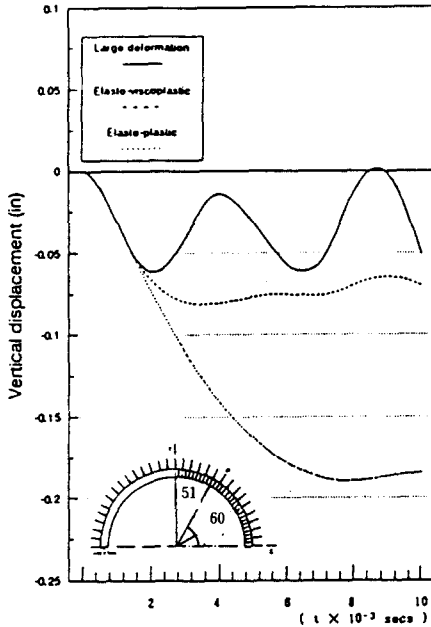


Fig. 19. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 51 node.

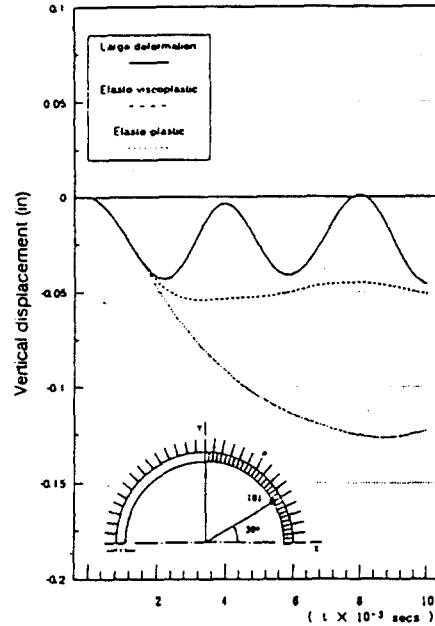


Fig. 21. Response of the vertical displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 101 node.

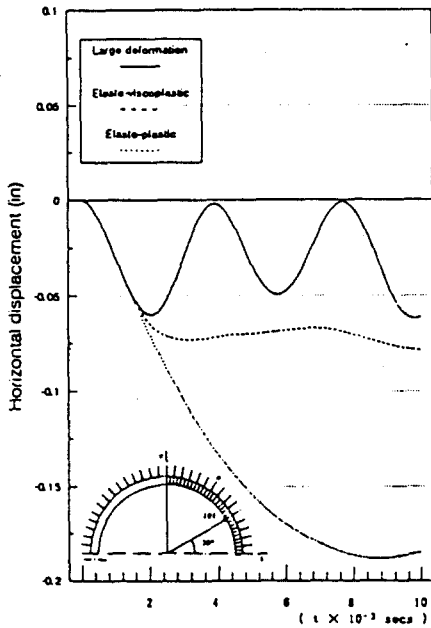


Fig. 20. Response of the horizontal displacement for the transient dynamic analysis of a hemispherical shell cap at 101 node.

동성 계수값 ( $\gamma=10000$ ) 으로  $2t$  이후는 큰 음의 변위값을 나타냄을 알 수 있다.

Fig. 18, 19 은 51 절점에서의 대변형, 탄점소성 및 탄소성 해석에 의한 변위응답 특성곡선으로서 대체로, 정점에서의 특성과 유사한 경향을 보이며, 수평방향보다 수직방향 변위응답의 크기가 크게 나타남을 알 수 있다.

Fig. 20, 21은 101절점에서의 변위 응답으로서 51절점의 특성과 유사하다. 다만, 이 절점에서는 수평방향의 응답의 절대치 크기가 수직방향보다 더 큼을 알 수 있다.

## 결론

이상과 같이 기하학적 및 재료 비선형성을 고려한 반구각 (*hemispherical shell cap*) 구조물이 주변 고정의 경계조건을 가지고 800 psi의 충격을 받을때 비선형 동적거동 해석에서 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 충격하중을 받는 반구각의 비선형 과도상태

동적응답의 해석에 대한 결장방정식을 풀기 위해서 중앙차분법을 적용할 때 안정한 해를 얻기 위해서는 시간증분  $0.4 \times 10^{-6}$  초 이하로 취해야 한다.

2. 재료의 비선형성을 고려한 탄점소성 및 탄소성 해석시의 유동성계수 값을 작게 취할수록 변위의 응답은 작게 나타난다. 따라서 탄점소성 해석과 탄소성해석시는 유동성계수 값  $\gamma$ 를 각각 100과 10000으로 해야한다.

3. 4절점 요소와 8절점 요소의 탄성해석과 탄성대변형해석 및 탄점소성해석의 경우 대체로 4절점 요소가 8절점 요소보다 크게 나타나고, 탄점소성의 8절점 요소인 경우 파동현상의 과도응답 특성이 거의 나타나지 않음을 알 수 있다.

4. 탄성해석과 대변형해석의 경우 Sine파 형태의 응답 특성을 보이거나 탄점소성인 경우 응답의 피크로부터 완만히 수렴되는 경향을 보인다.

### 참 고 문 헌

- 1) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier (1986): Theory of elasticity. 기문당, 23-57.
- 2) D. R. J. Owen and E.Hinton (1980): Finite elements in plasticity. Pineridge Press, 1-594.
- 3) W. Johnson and P. B. Mellor (1977): Engineering Plasticity. Van Nostrand Reinhold Co., 1-96.
- 4) E. Hinton and D. R. J. Owen (1977): Finite element programming. Academic Press, 69-123.
- 5) I. M. Smith and D. V. Griffiths (1988): Programming the finite element method, John Willey and Sons. 192-249.
- 6) R. W. Clough and J. Penzien (1975): Dynamics of structures. McGraw-Hill Kogakusha. 260-249.
- 7) 김창열, 김사수 (1982): 응용탄성학. 대학사, 259-283.
- 8) Mario Paz (1980): Structural dynamics, Van Nostrand Reinhold Company. 231-270.
- 9) J. S. Przemieniecki (1968): Theory of matrix structural analysis. McGraw-Hill, 1-24.
- 10) K. J. Bathe (1982): Finite element procedures in engineering analysis, 114-300.
- 11) S. S. Kuo (1972): Computer applications of numerical methods. 연합출판, 176-212.
- 12) 김재복 (1984): 외압을 받는 축대칭 Shell의 비선형 해석, 1-71.
- 13) 배동명 (1983): 축대칭 SHELL의 동적응답 해석, 105-119.
- 14) 都井 裕 (1987): 第1コース 計算固體力學, 非線形 有限要素法と 剛體・ばねモデル, 東京大學生産技術研究所.