

유한요소법을 이용한 원통형 압전변환기의 입력임피던스 해석

Input Impedance Analysis of Piezoelectric Cylinder Transducer using Finite Element Method

김 천 덕*, 서 회 선**, 김 대 환**, 윤 종 락***

(Chun-Duck Kim, Hee-Sun Seo, Dae-Whan Kim, Jong-Rak Yoon)

요 약

본 연구는 유한요소법을 이용한 원통형 압전변환기의 전기·기계 임피던스 해석으로 변환기가 공기중에 있는 조건, 즉 전기·기계 임피던스보다 음향계(공기)의 임피던스가 상대적으로 작을 경우 기계구조 해석에 광범하게 응용되는 유한요소법이 전기적 특성이 결합된 변환기 해석에 어떻게 적용되는지를 보이고 유한요소 수치해석 결과와 임피던스 분석기를 이용한 측정결과를 비교한 것이다. 또한 변환기에 부가되는 기계요소(음향원도우)의 특성이 미지일 때 측정 결과와 유한요소 결과를 비교함으로써 미지재질의 기계적 특성이 규명될 수 있음을 보인다.

ABSTRACT

This study shows how the Finite Element Method(FEM) for the structural problems could be applied in the electromechanical impedance analysis of an in-air piezoelectric cylinder transducer and then compares the numerical results by the FEM with the measured results using the impedance analyzer.

The results also show that the comparison between both results could be applied to examine the mechanical properties of the added unknown material to transducer such as an acoustic window.

I. 서 론

전기·기계·음향계가 결합되어 있는 변환기의 전기 입력단자에서 본 입력임피던스 해석은 변환기 동작 주파수에 대한 송신출력감도, 지향성 및 효율과 관련된 임피던스 정합문제 해결에 필수적이다. 그러나 세 가지 서로 다른 형태의 에너지가 결합된 변환기의 임피던스는 변환기의 기하학적 형상, 전기·기계 결합형태에 의한 진동모드, 음향계에 의한 외부 경계조건 및 음향적 혹은 기계적 부재에 좌우되어 이상적인 조건을 제외하면 해석적으로 계 전체의 임피던스를 정

확히 예측하기는 불가능하다. 이러한 임피던스 해석 기법의 연구 방향은 진공 중의 전기·기계 임피던스 해석^[1,2,3,4], 음향계에 의한 방사임피던스 해석^[5,6] 및 전기·기계·음향계의 전체 임피던스 해석^[7,8,9]으로 분류된다.

이들 연구중 Mason의 등가회로 해석모델^[1,2]은 적층으로 된 원통형 압전 변환기의 두께가 평균반경에 비해 상대적으로 작은 경우 적용할 수 있는 축대칭 원주모드의 집중정수모델로 방사면의 Head mass가 상대적으로 두꺼운 1차원 모델에만 우수한 결과를 얻을 수 있고 또한 적층간의 접착제나 절연체의 기계적 특성 상수가 정확히 주어져야 적용할 수 있다. 또한 외부음향계에 의한 방사임피던스가 다른 어떤 방법으로 구해져야만 변환기 전체의 특성 해석이 가능하

*부산수산대학교 전자공학과

**국방과학연구소

***부산수산대학교 정보통신공학과

접수일자: 1992년 9월 19일

다.

본 연구에서는 원통형 압전변환기를 1차원 모델로 가정한 상기의 등가회로 해석법을 지양하고 구조해석에 광범하게 사용되는 유한요소법을 응용함으로써 압전변환기의 응력을 1차원이 아닌 다차원으로 취급하여 전기·기계적 특성이 결합된 변환기의 임피던스를 구하였다. 또한 임피던스 분석기를 이용한 측정 결과와 비교하여 유한 요소 수치해석이 변환기 임피던스 해석의 강력한 수단임을 보이고 아울러 압전변환기에 부가된 기계재질의 기계적 특성 상수를 규명하는 데도 응용될 수 있음을 보인다.

II. 전기·기계 결합계의 유한요소법

본 절에서는 Kagawa^[3,4,8]가 발표한 압전변환기에 대한 유한요소해석 알고리즘에 대해 요약 소개한다. 본 연구에서 대상으로 하는 원통형 압전변환기는 기계계와 전기계가 결합하고 있어 탄성적 성질인 왜곡 응력장과 전기적 정전장이 본질적으로 일체가되어 결합하고 있어 일반적인 경계면을 통한 두가지 장의 결합 형태와는 다르다. 그림 1은 유한요소 e 및 압전변환기의 경계조건으로 전극 A_p와 A_r에 각각 전위 ϕ와 전하 Q가 주어지고 경계면 A_f와 A_u에 각각 힘 f와 변위 u가 주어질 경우로 이때 에너지 원리에 의한 장의 범함수는

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \sum_e (V_e - T_e - H_e) \\ & - \iint_{A_u} \hat{f} u dA - \iint_{A_f} \hat{f} u dA - \iint_{A_p} \hat{\phi} D_n dA \\ & - \iint_{A_r} \hat{\phi} D_n dA \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 V_e, T_e, H_e는 각각 유한 요소e의 위치에너지, 운동에너지 및 정전에너지이고 경계조건에 대한 4개의 적분항은 순서적으로 각각 변위, 힘, 전위, 전하에

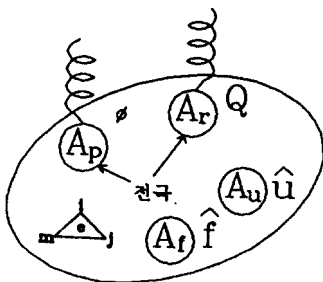


그림 1. 압전변환기의 경계조건

의해 계에 행해지는 일이다. 예로서 경계면 A_u에서 계에 행해지는 일은 (1)식의 면적적분항중에 첫항에 해당되는 것으로 압전변환기의 일부가 고정되어 있다면 u=0으로 되어 이항은 삭제될 것이다. 범함수식(1)이 일반 탄성체와 다른 점은 정전에너지 H_e의 존재이다. 또한 각 에너지 항은 다음과 같이 주어진다.

$$\left. \begin{aligned} V_e &= \frac{1}{2} \{d\}_e^T [K]_e \{d\}_e + \frac{1}{2} \{d\}_e^T [\Theta]_e \{\phi\}_e \\ T_e &= \frac{1}{2} \omega^2 \{d\}_e^T [M]_e \{d\}_e \\ H_e &= -\frac{1}{2} \{d\}_e^T [\Theta]_e \{\phi\}_e + \frac{1}{2} \{\phi\}_e^T [G]_e \{\phi\}_e \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

여기서 {d}_e, {φ}_e는 각각 요소 절점에 대한 변위벡터, 전위벡터이고 [K]_e, [M]_e, [Θ]_e, [G]_e는 각각 요소강성행렬, 요소질량행렬, 전기기계결합행렬 및 정전행렬로 요소형상, 요소 내삽함수의 차수 및 전기적, 기계적 특성 상수에 의해 결정된다. 경계조건에 대한 4개의 적분항의 이산화 표시는

$$\left. \begin{aligned} \int_{A_u} \hat{f} u dA &= \{\hat{d}\}_u^T \{f\}_u \\ \int_{A_f} \hat{f} u dA &= \{d\}_f^T \{\hat{f}\}_f \\ \int_{A_p} \hat{\phi} D_n dA &= \{\hat{\phi}\}_p^T \{Q\}_p \\ \int_{A_r} \hat{\phi} D_n dA &= \{\phi\}_r^T \{\hat{Q}\}_r \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

로 주어져 결국 범함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \sum_e \left(\frac{1}{2} \{d\}_e^T [K]_e - \omega^2 [M]_e \right) \{d\}_e + \{d\}_e^T [\Theta]_e \{\phi\}_e \\ & - \frac{1}{2} \{\phi\}_e^T [G]_e \{\phi\}_e - \{\hat{d}\}_u^T \{f\}_u - \{d\}_f^T \{\hat{f}\}_f \\ & - \{\hat{\phi}\}_p^T \{Q\}_p - \{\phi\}_r^T \{\hat{Q}\}_r \end{aligned} \quad (4)$$

절점에 있어서 적합조건은, 기계적조건은 같은 절점에 있어서 변위가 같고, 절점에 작용하는 힘의 총합은 0 (외부에서 가해지는 힘도 포함), 전기적 조건은 같은 절점에서 전위가 같다는 것을 고려하면 범함수는 전체 계에 대하여

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & \frac{1}{2} \{d\}^T ([K] - \omega^2 [M]) \{d\} + \{d\}^T [\Theta] \{\phi\} \\ & - \frac{1}{2} \{\phi\}^T [G] \{\phi\} - \{\hat{d}\}_u^T \{f\}_u - \{d\}_f^T \{\hat{f}\}_f \\ & - \{\hat{\phi}\}_p^T \{Q\}_p - \{\phi\}_r^T \{\hat{Q}\}_r \end{aligned} \quad (5)$$

로 쓸 수 있다. $\{d\}, \{\phi\}$ 는 계 전체의 절점변위, 절점 전위 벡터이고 $\{d\}_u, \{d\}_f, \{\phi\}_p, \{\phi\}_s$ 은 경계조건에 대한 것으로 $\{d\}, \{\phi\}$ 성분에도 포함되어 있다.

변위에 의한 구동력이 없고 전극에 전하가 주어지지 않는 것으로 하면 $\{d\}_u=0, \{Q\}_s=0$. 따라서 식 (5)에 변분원리 $\delta \cdot = 0$ 을 적용하면

$$([K] - \omega^2[M])\{d\} + [\Theta]\{\phi\} = \{f\}_f \quad (6)$$

$$([\Theta]^T\{d\} - [G])\{\phi\} = \{Q\}_p \quad (7)$$

식 (6), (7)이 압전 변환기 해석에 적용되는 유한요소법의 이산화 연립대수방정식의 기본이다. 그러나 식(6), (7)은 계에서의 에너지 손실은 고려하지 않은 것으로 기계적 부재 즉 음향원도우나 집착층 등의 기계적 손실, 변환기 자체의 기계적 손실, 변환기 전기계의 전기적 손실등이 추가되면 식(6) 및 (7)은 다음 식으로 표시된다.

$$([K] + j[R] - \omega^2[M])\{d\} + [\Theta]\{\phi\} = \{f\}_f \quad (6)'$$

$$([\Theta]^T\{d\} - ([G] + j[R_g])\{\phi\} = \{Q\}_p \quad (7)'$$

여기서 $[R]$: 기계적 손실행렬, $[R_g]$: 전기적 손실행렬

특히 압전체인 경우 기계적 손실 및 전기적 손실이 각각 재료의 히스테리시스손실과 유전체 손실에만 관련된다면 손실행렬 $[R]$ 및 $[R_g]$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$[R] = \alpha[K]$$

$$[R_g] = \tan\delta[G]$$

여기서 α 는 기계적 손실계수로 압전재복소탄성 정수의 실수부에 대한 허수부의 비⁽¹⁰⁾로 온도, 응력, 방향성분에 따라 다른 값을 갖지만 상기식은 상온, 10^6 N/m² 이하의 응력에 대한 주응력방향의 값을 모든 방향성분에 공통으로 적용한 결과이고 또한 $\tan\delta$ 는 유전손실계수로 유전상수의 실수부에 대한 허수부의 비⁽¹⁰⁾로 온도, 전장, 방향성분에 따라 다르지만 상기식은 상온, 1KV/cm 이하의 전장에 대한 분극방향의 값을 각 방향성분에 공통으로 적용한 결과이다.

식(6)', (7)'는 손실에 의한 허수 성분으로 복소 연립대수방정식이 되어 그 해는 복소형태로 주어질 것이다.

III. 유한요소해석 및 측정결과와의 비교

그림 2는 본 연구에서 대상으로 한 원통형 PZT4 압전변환기의 크기 및 경계조건을 나타낸 단면도로 분극방향은 경방향으로 단위는 mm ()안의 수치는 유한요소 분할수이고 그림은 단면의 1/4을 보인 것이다. 표 6.1은 압전변환기의 특성⁽¹¹⁾ 및 음향원도우 (polyurethane)특성으로 1차원 모델에서는 탄성계수 행렬요소 중 C_{11}^E 만 임피던스계산에 고려되지만 유한요소 해석에서는 행렬요소 전체가 적용됨으로써 보다 정확한 임피던스 값이 예측될 것이다. 측정 및 유한요소해석에서 적용한 압전자 단자전압은 1V로 하였다.

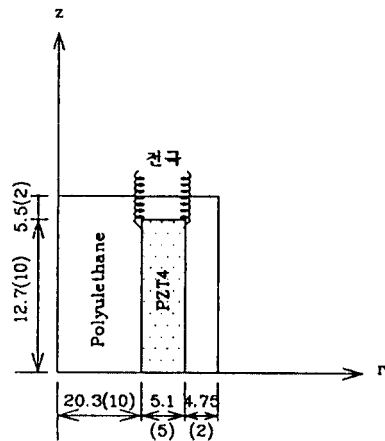


그림 2. 원통형 PZT4 압전변환기 단면도

표 1. 압전변환기(PZT4) 및 음향원도우(polyurethane) 특성⁽¹¹⁾

| | | | |
|--|--|--------------------------------|-----------------------|
| ρ | 7.500 Kg/m ³ | e_{31} | -5.2 C/m ² |
| C_{11}^E | 13.9×10^{10} N/m ² | e_{33} | 15.1 C/m ² |
| C_{12}^E | 7.78×10^{10} N/m ² | e_{15} | 12.7 C/m ² |
| C_{13}^E | 7.43×10^{10} N/m ² | $\epsilon_{11}^s / \epsilon_0$ | 730 |
| C_{22}^E | 13.9×10^{10} N/m ² | $\epsilon_{22}^s / \epsilon_0$ | 730 |
| C_{23}^E | 7.43×10^{10} N/m ² | $\epsilon_{33}^s / \epsilon_0$ | 635 |
| C_{33}^E | 11.5×10^{10} N/m ² | $\tan \delta$ | 0.0039 |
| C_{44}^E | 2.56×10^{10} N/m ² | 높이 | 0.0254m |
| C_{66}^E | 3.06×10^{10} N/m ² | 외경 | 0.0254m |
| $C_{22}^E = C_{11}^E, C_{23}^E = C_{13}^E$ | | 내경 | 0.0203m |
| α | 0.002 | | |

Polyurethane : $Y : 0.25 \times 10^{10}$
 $\sigma : 0.4$
 $\rho : 1020$ Kg/m³

원통형 압전변환기는 축대칭이므로 유한요소분할은 그림 3과 같이 삼각 환상요소로 2차원 평면장의 문제로 단순화되고 계전체의 특성은 원주방향(θ)에 대한 적분 형태로 주어진다. 그림 3에서 i, j, m 은 임의의 삼각형 요소절점, u, v 는 요소내 임의점의 변위, u_m, v_m 은 요소절점 m 에서의 변위 성분을 뜻하고 본 연구에서 내삽함수는 1차로 하였다.

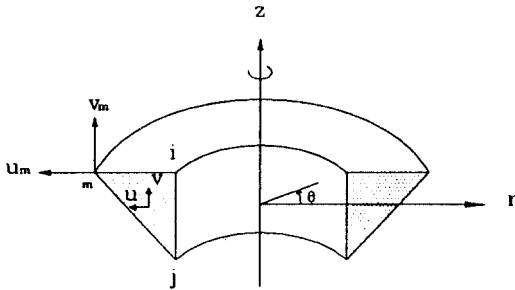


그림 3. 축대칭 원통형 변환기 유한요소 모델

식 (6)'에서 우변은 압전변환기에 작용하는 외력으로 송신용 변환기의 경우 외부 음향계에 의한 반작용력이 이에 해당하나 변환기가 공기중에 있을 때는 공기에 의한 음향계 임피던스와 변환기 기계임피던스의 상대적 크기와 변환기의 기하학적 크기를 고려하면 반작용력은 무시될 수 있으므로 우변은 0이 될 것이다. 식(6)', (7)'에서 전위벡터를 소거하면,

$$([K] + j\alpha[K] - [\Theta])[G + j\tan\delta G]^{-1}[\Theta]^T - \omega^2[M]\{d\} = -[G + j\tan\delta G]^{-1}\{Q\}_p \quad (8)$$

가 얻어진다. 입력임피던스 계산은 전극에 전위를 부과할 기준전하가 필요하므로 한쪽 전극의 전하를 $\{Q\}_p$ 로 주면 전극상에 전위 $\{\phi\}_s$ 가 생긴다.

따라서 식(8)을 풀어 전극상의 전위 $\{\phi\}_s$ 를 얻을 수 있으므로 입력어드미턴스 $\{Y\}_{in}$ 는

$$\{Y\}_{in} = \frac{d\{Q\}_p}{dt} / \{\phi\}_s = j\omega\{Q\}_p / \{\phi\}_s \quad (9)$$

로 구해진다. 그림 4-(a)~(d)는 표 1에 주어진 압전자

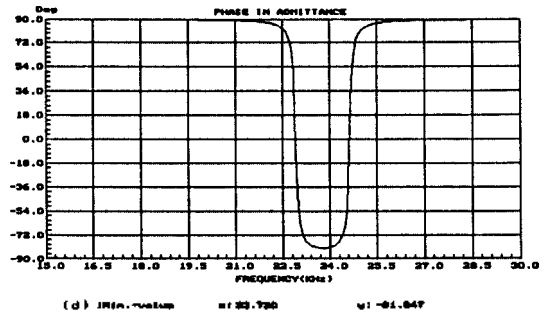
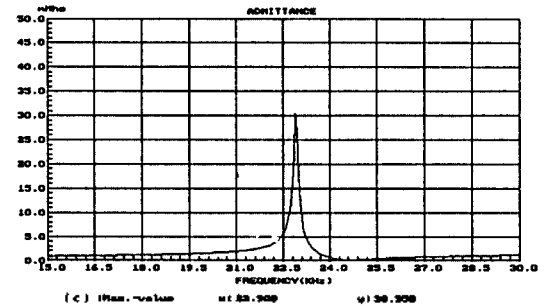
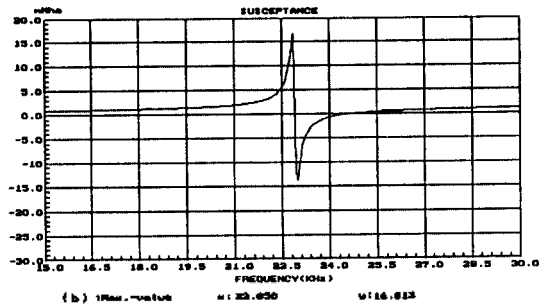
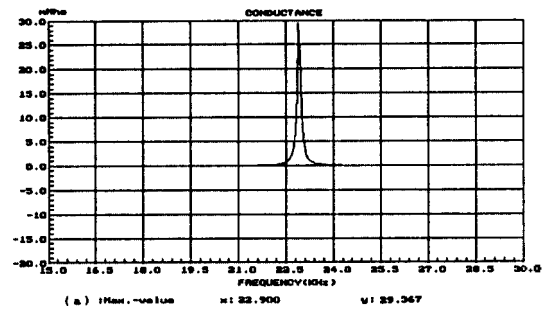
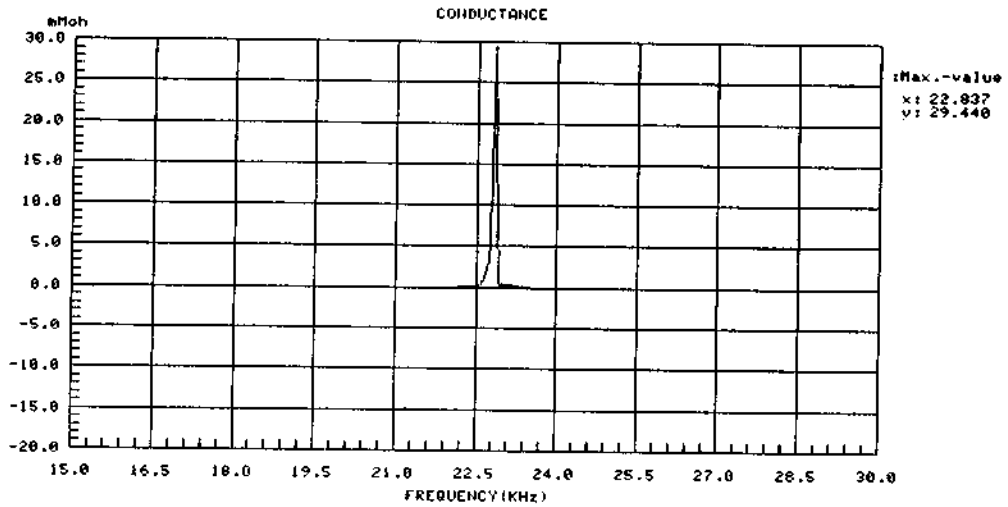
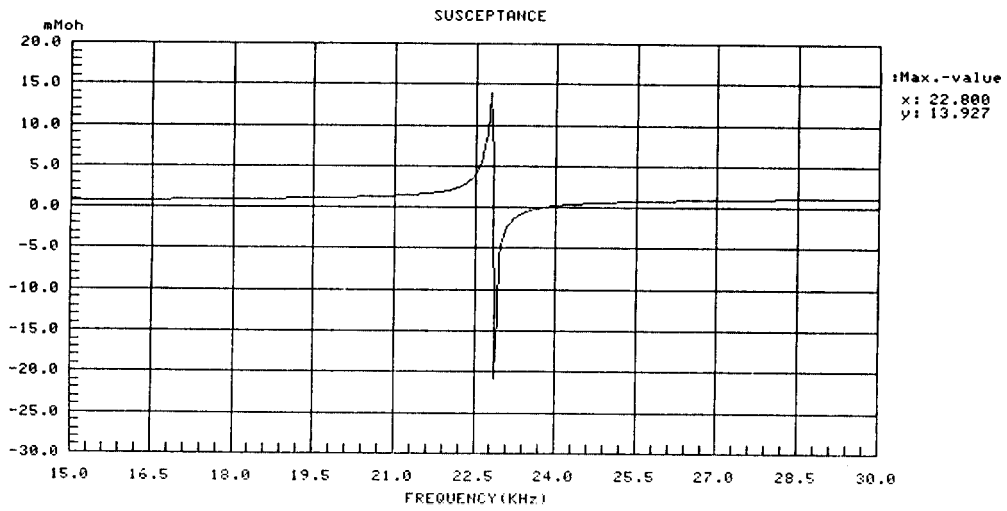


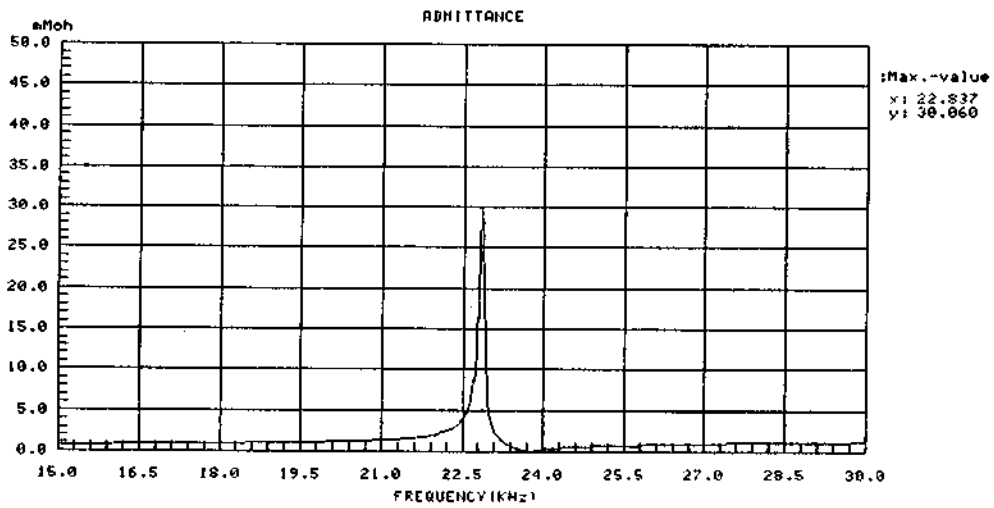
그림 4. 원통형 변환기 공기중 어드미턴스(유한요소법)
(a) 컨덕턴스 (b) 서셉턴스 (c) 어드미턴스 (d) 위상



(a)



(b)



(c)

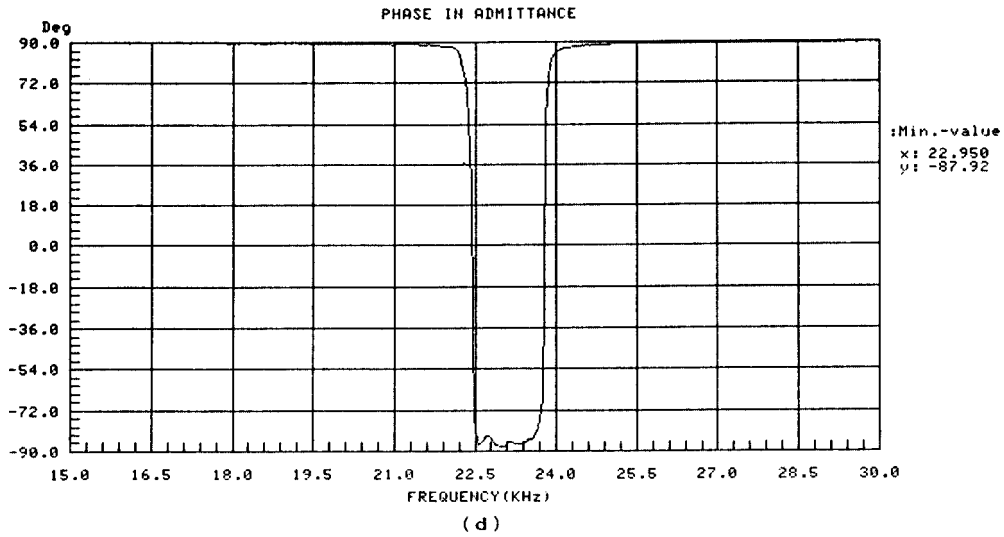


그림 5. 원통형 변환기 공기중 어드미턴스(측정)
 (a)컨덕턴스 (b)서셉턴스 (c)어드미턴스 (d)위상

의 특성에 대한 공기중의 어드미턴스 유한요소 결과이고, 그림 5.(a)~(d)는 임피던스 분석기를 이용한 측정치로 그림 2에서 폴리우레탄이 제거된 경우의 변환기 자체만의 특성이다. 그림 4-(a)와 그림 5.(a)는 컨덕턴스 특성으로 고유주파수는 유한요소법에 의한 값이 22.900KHz로 측정치 22.837KHz에 비해 약 0.3%오차를 보이고 컨덕턴스값은 계산치 29.367mMho, 측정치 28.44mMho로 약 0.2%오차를 보였다. 또한 서셉턴스, 어드미턴스 최대치의 크기는 측정치보다 각각 약 3mMho 및 1mMho 크게 나타났고 위상은 측정치에 비해 주파수 측상에서 천이되나 전체적으로 잘 일치하는 결과이다.

그림 6-(a)~(d) 및 그림 7-(a)~(d)는 공기중 상태에

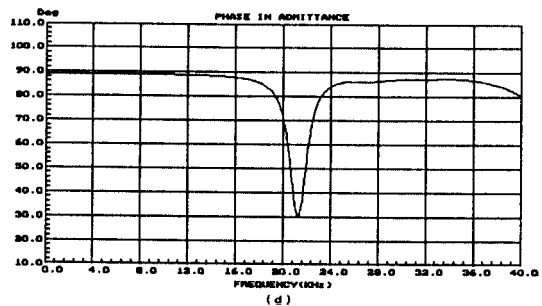
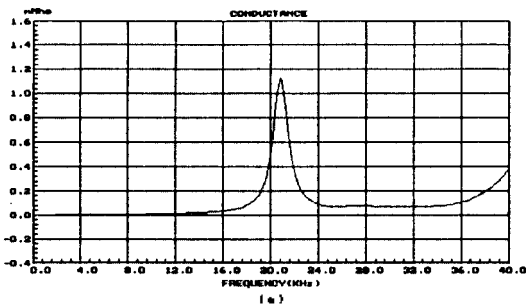
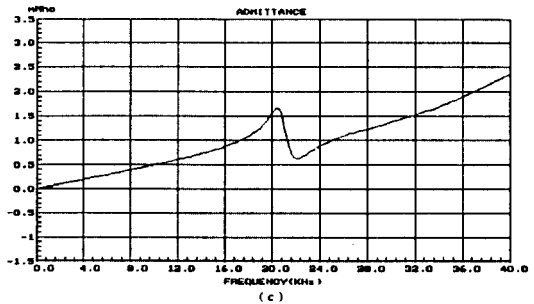
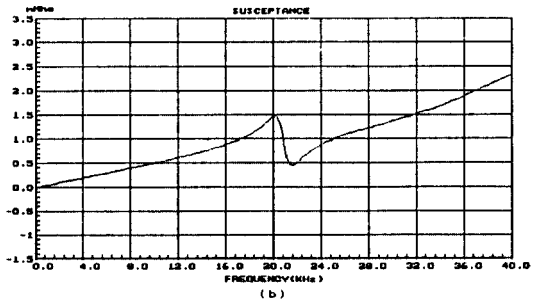


그림 6. (원통형 변환기 + 원도우) 공기중 어드미턴스(유한요소법)
 (a)컨덕턴스 (b)서셉턴스 (c)어드미턴스 (d)위상

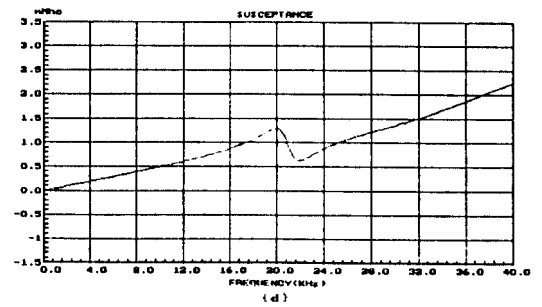
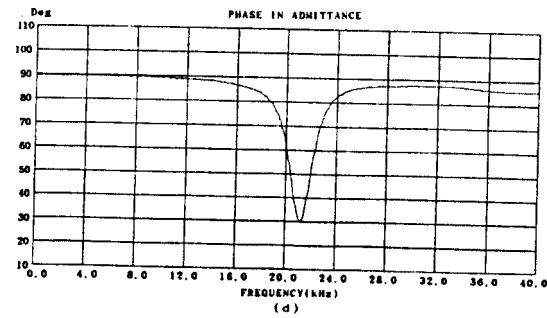
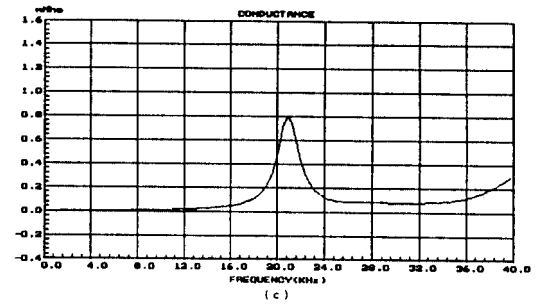
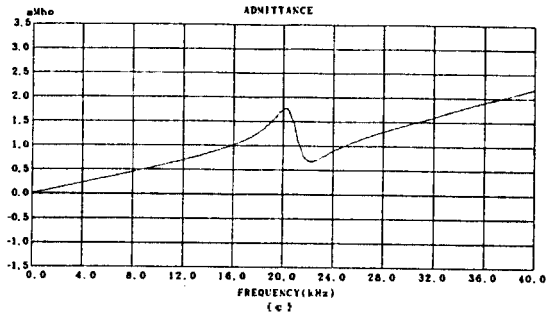
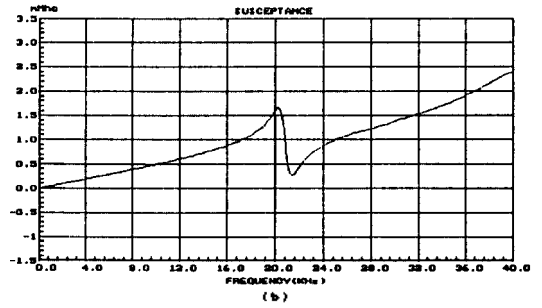
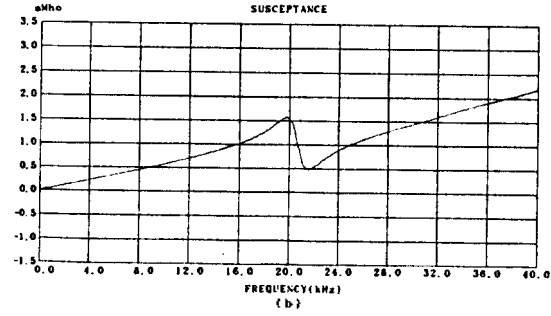
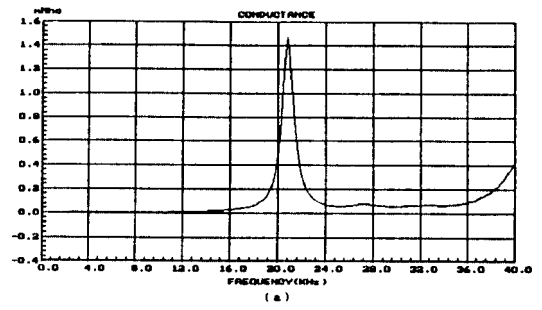
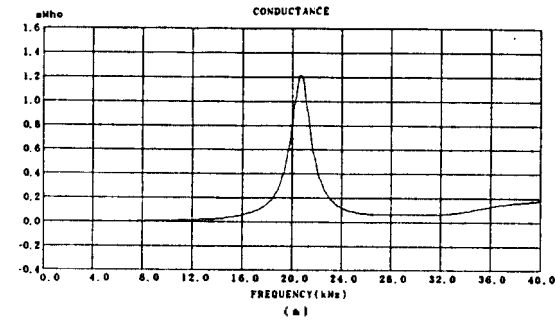


그림 7. (원통형 변환기 + 원도우) 공기중 어디미턴스(측정)
(a)컨덕턴스 (b)서셉턴스 (c)어드미턴스 (d)위상

그림 8. 원도우 손실계수에 대한 컨덕턴스 및 서셉턴스
(a),(b): 손실계수: 0.15
(c),(d): 손실계수: 0.30

서 그림 2에 보이는 바와같이 음향원도우(Polyurethane)를 압전자에 부가한 경우로 컨덕턴스 특성에서 측정치에 비해 유한요소에 의한 고유주파수는 0.2%, 크기는 10% 오차를 보이고 원도우에 의해 공기중 고유 주파수보다 낮아짐을 보인다. 서셉턴스와 어드미턴스 최대 크기는 각각 1.45mMho 및 1.6mMho로 측정치 1.6mMho 및 1.77mMho에 아주 잘 일치한다. 이 경우 Q값과 위상특성은 측정치와 일치함을 보인다. 원도우 유무에 대한 상기 두 결과의 유한요소 해석시 원도우의 손실계수는 0.2로 하였다. 또한 그림 8은 원도우의 손실계수를 0.15 및 0.3으로 한 경우 컨덕턴스 및 서셉턴스 특성으로 그림 7의 측정치와 비교하면 0.2로 한 경우보다 측정치와 큰 오차를 보여 그림 6과 같이 원도우의 손실계수 0.2가 최적인 것으로 확인되었다. 측정자료 획득시 유한요소 해석에 적용한 경계조건과는 다른 기계적 경계조건(압전자 받침대)이 부가되므로 이에 대한 영향이 유한요소 결과의 오차요인으로 사료된다.

IV. 결 론

본 연구에서는 원통형 PZT4 압전변환기가 공기중에서 동작할때 공기에 의한 방사임피던스 영향을 무시한 경우 전기·기계 임피던스 특성을 유한요소법으로 수치해석하여 임피던스 분석기에 의한 측정치와 비교하였다. 고유주파수 1% 이하의 오차로, 고유주파수에서의 어드미턴스는 10% 이하의 오차로 잘 일치하였다. 이러한 오차 범위는 유한요소법이 임의의 압전변환기 임피던스 해석에 이용될 수 있는 타당성을 뒷받침하는 것으로 판단되고 또한 그림 8의 결과에서 보이는 바와같이 기계적 특성 상수가 미자인 접착제, 음향원도우등의 기계적 부재가 변환기에 추가될때 시행착오적 방법으로 그 특성을 구하는 데도 응용될 수 있음을 보인다.

감사의 글

본 논문의 저자들은 이 연구의 수행중 많은 조언을 해주신 일본 岡山大學 加川幸雄 교수께 감사를 드린다.

참 고 문 헌

1. M. V. Crombrugge and W. Thompson, Jr., "Optimization of the Transmitting characteristics a Tonpiltz-type Transducer by Proper choice of Impedance Matching Layers : , JASA, Vol.77 No.2, 1985.
2. J.M. Decarpigny, J.C. Debus, B. Toquet and D. Boucher, "In-air Analysis of Piezoelectric Tonpiltz Transducers in a Wide frequency band USING A Mixed Finite Element-Plane Wave Method," JASA, Vol78 No.5, 1985.
3. Y. Kagawa and T. Yamabuchi, "IEEE Trans.on Sonic and Ultrasonics," Su-23, 1976.
4. 山瀬龍夫, 加川幸雄 (Y.Kagawa), "複合壓電超音波 變換機의 有限要素 Simulation," 일본음향학회지, 34권 12호, 1978.
5. T. Nimura and Y. Watanabe, "Sound Radiation from Zonal Radiators," Sci. Rep. Ritu, B-(Elect.Comm), Vol.5, No.3, 4, 1953.
6. R. A. Langevin, "The Electro-Acoustic Sensitivity of Cylindrical Ceramic Tubes," JASA, Vol 26 No.3, 1954.
7. R.R. Smith, J.T.Hunt and D.Barach, "Finite Element Analysis of Acoustically Radiating Structures with Applications to Sonar Transducers," JASA, Vol54 No.5, 1973.
8. T. Tsuchiya, Y. Kagawa and T. Yamabuchi, "Finite Element Analysis of Focusing Transducers and their Response," 日本 電子情報通信學會 論文誌, Vol.J74-A No7, 1991.
9. S.S. Jarng, "Sonar Transducer Analysis and Optimization Using the Finite Element Method," Ph.D. Dissertation, Univ.of Birmingham, 1991.
10. O.E. Mattiat, "Ultrasonic Tranducer Materials," Plenum Press, 1971.
11. W.P. Mason, "Physical Acoustics," Academic Press, 1964.

▲김 천 덕

1946년 5월 23일생
현재 : 부산수산대학교 전자공학과 부교수
(1988년 제7권 2호 참조)

▲서 희 선



1966년 5월 20일생
1989년 2월 : 부산대학교 기계설계공학과 졸업(공학사)
1991년 2월 : 한국과학기술원 기계공학과 졸업(공학석사)
1991년 3월 ~ 현재 : 국방과학연구소 연구원

▲김 대 환



1954년 3월 31일생
1977년 2월 : 울산대학교 기계공학과 졸업(공학사)
1986년 2월 : 한국과학기술원 기계공학과 졸업(공학석사)
현재 : 국방과학연구소 수중음향센서 연구실장

▲윤 증 락

1954년 6월 17일생
현재 : 부산수산대학교 정보통신공학과 조교수
(1991년 제 10권 2호 참조)